Vorlesung im WS 2012 / 13

Endliche einfache Gruppen

V: Montag 10-12 und Donnerstag 14-16 in MZH 7200
Ü: Mittwoch 12-13.30 in MZH 7050

Eine endliche Gruppe ist im technischen Sinn einfach, wenn sie sich nicht durch Übergang zu einem homomorphen Bild vereinfachen lässt, m.a.W. wenn sie keine nichttrivialen Normalteiler besitzt. Jede endliche Gruppe G hat eine Kompositionsreihe

$$G= G_0 > G_1 > G_2 \ldots > G_n= \{e\},$$

wobei G_{i+1} ein Normalteiler in G_i und G_i/G_{i+1} jeweils eine einfache Gruppe ist. Man kann daher die einfachen Gruppen als die Bausteine ansehen, aus denen alle endlichen Gruppen entstehen.

Ein großes Projekt im vorigen Jahrhundert war es, die endlichen einfachen Gruppen zu klassifizieren. Das ist schließlich gelungen: es gibt neben den zyklischen Gruppen von Primzahlordnung und den alternierenden Gruppen A_n für $n \geq 5$ unendliche Serien:

- von klassischen Gruppen über endlichen Körpern, wie z.B. die projektiven linearen Gruppen $PS\ell_n(\mathbb{F}_q)$ (außer $PS\ell_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$ und $PS\ell_2(\mathbb{F}_3) \cong A_4$)
- von Ausnahmegruppen von Lie-Typ über endlichen Körpern

sowie 26 sporadische einfache Gruppen, die sich nicht in die obigen Serien einordnen lassen.

Der Beweis der Klassifikation ist das Werk vieler Mathematiker und verstreut über eine Unzahl von Zeitschriftenartikeln, man schätzt den Gesamtumfang auf über 1000 Seiten. Lange Zeit galt der Beweis als unvollständig, vor einigen Jahren scheinen aber die größten Lücken geschlossen worden zu sein.

Im Kurs werde ich mich nicht an diesem Beweis versuchen, sondern möglichst viele der endlichen einfachen Gruppen vorstellen. Dabei werde ich soweit wie möglich elementar bleiben und nur Tatsachen wie die Sylowsätze, die in jedem Algebrakurs behandelt werden, als bekannt voraus setzen. Als Orientierung und Vorbild dient mir

Robert A. Wilson: „The Finite Simple Groups“
Springer 2009.