Claas Grenzebach

Charakterisierung der hyperbolischen Mannigfaltigkeiten mit großen Automorphismengruppen

Diplomarbeit
am Fachbereich Mathematik
der Universität Bremen
(März 2003)

korrigierte und ergänzte Version 2008

Gutachter:
Prof. Dr. E. Oeljeklaus
Prof. Dr. J. Gamst

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungen und Symbole

Hier sind häufig vorkommende Bezeichnungen dieser Arbeit aufgeführt.

Das Ende eines Beweises wird mit dem Symbol $\blacksquare$ gekennzeichnet; um das Ende eines untergeordneten, eingeschobenen Beweises anzudeuten, wird stattdessen $\square$ verwendet. Ein in einem Beweis eventuell auftretender Widerspruch soll mit einem Blitz $\lightning$ markiert werden.

Ein *Bereich* ist eine nichtleere, offene Menge; ein *Gebiet* ist ein zusammenhängender Bereich.

In einem metrischen Raum M mit Metrik d wollen wir die offene Kugel vom Radius $r > 0$ um $x \in M$ mit $B_r(x) := \{y \in M \mid d(x,y) < r\}$ bezeichnen.

Für die Poincaré-Metrik verwenden wir das Symbol ϱ, für die Kobayashi-Pseudometrik d_M.

Außerdem treten folgende Bezeichnungen auf:

$\varnothing$:	leere Menge;
$\bar{A}$ bzw. $\mathring{A}$:	Abschluß bzw. Inneres einer Menge A;
$\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$:	komplexe Zahlenebene / Menge der reellen Zahlen;
$\mathbb{K}$:	$\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$;
$\mathbb{D}$:	offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$;
$\mathbb{H}$:	obere komplexe Halbebene;
$\mathbb{P}^n$:	n-dimensionaler (komplex-)projektiver Raum.

Unter der offenen *Einheitskugel* um $0 \in \mathbb{C}^n$ verstehen wir die Menge

$$B^n := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| < 1\}.$$

Der offene *Polyzylinder* vom Radius 1 um $0 \in \mathbb{C}^n$ ist gegeben durch

$$\mathbb{D}^n := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \forall j\colon |z_j| < 1\} = \mathbb{D} \times \cdots \times \mathbb{D}.$$

Speziell ist natürlich: $B^1 = \mathbb{D}^1 = \mathbb{D}$.

Die komplexe Konjugation sei mit $\overline{a+ib} = a - ib$ bezeichnet. Die Identität werde id abgekürzt, eine n-dimensionale Einheitsmatrix mit E_n. Die Transposition bzw. Adjunktion schreiben wir als ${}^t\cdot$ bzw. $\cdot^*$.

Die Gruppe aller Automorphismen einer Mannigfaltigkeit M bezeichnen wir mit $\operatorname{Aut} M$. Unter Automorphismen verstehen wir dabei die biholomorphen Abbildungen der Mannigfaltigkeit auf sich selbst.

Einleitung

Auf komplexen Mannigfaltigkeiten M kann man verschiedene Abstandsbegriffe einführen (siehe z. B. Isaev u. Krantz, 2000). Neben einigen anderen gibt es beispielsweise die Carathéodory-Pseudometrik $c_M(p,q) := \sup_f \varrho(f(p), f(q))$ oder die in dieser Arbeit verwendete Kobayashi-Pseudometrik d_M.

Die Mannigfaltigkeit heißt Carathéodory- bzw. Kobayashi-hyperbolisch, falls die entsprechend bezeichnete Pseudometrik bereits eine Metrik ist. Oft läßt man den Namen der Pseudometrik fort und spricht einfach von hyperbolischen Mannigfaltigkeiten. So ist in dieser Arbeit unter der Hyperbolizität stets die nach Kobayashi zu verstehen.

Ein einfaches Beispiel für eine hyperbolische Mannigfaltigkeit ist durch die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ in der komplexen Zahlenebene gegeben, versehen mit der Poincaré-Metrik ϱ (nichteuklidische Geometrie; vgl. hierzu z. B. *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie* von Fischer u. Lieb, 1994). Bekanntermaßen kann man $\mathbb{D}$ mit der Transformation $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$ biholomorph (Umkehrung ist die Cayley-Transformation $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$) auf die obere Halbebene $\mathbb{H}$ abbilden. Alle Automorphismen (alle biholomorphen Abbildungen) des Einheitskreises lassen sich explizit angeben: Sie bilden die Gruppe $\operatorname{Aut}\mathbb{D}$, die genau aus den Möbius-Transformationen $z \mapsto e^{i\lambda}\frac{z-z_0}{\bar{z}_0 z-1}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $z_0 \in \mathbb{D}$ besteht. Insbesondere hat man: $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut}\mathbb{D} = 3$.

Man kann den Fall der oberen Halbebene auf höhere Dimensionen verallgemeinern und erhält dann die sogenannten Siegel-Gebiete im $\mathbb{C}^n$, die spezielle hyperbolische Mannigfaltigkeiten darstellen.

Zur Definition der Kobayashi-Pseudometrik sowie von hyperbolischen Mannigfaltigkeiten, Automorphismengruppen und Siegel-Gebieten dient das erste Kapitel.

Das zweite und das dritte Kapitel dieser Arbeit stellen die Grundlagen bereit, die für die im vierten Kapitel durchgeführte Charakterisierung der hyperbolischen Mannigfaltigkeiten mit großen Automorphismengruppen benötigt werden. Als Größenbegriff dient dabei die Dimension der Automorphismengruppe. Ist diese hoch genug, ist die Mannigfaltigkeit dadurch im wesentlichen festgelegt. Beispielsweise kann eine hyperbolische Mannigfaltigkeit M der Dimension $n := \dim_{\mathbb{C}} M$ bei $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} M \geq n^2 + 3$ nur der Ball B^n sein (bis auf biholomorphe Äquivalenz), und in Wirklichkeit ist dann bereits $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} M = n^2 + 2n$. Es stellt sich insbesondere heraus, daß hyperbolische Mannigfaltigkeiten mit großen Automorphismengruppen grundsätzlich schon Siegel-Gebiete sind (bis auf biholomorphe Äquivalenz).

Die Charakterisierung der hyperbolischen Mannigfaltigkeiten mit großen Automorphismengruppen ist in dem Artikel von Isaev u. Krantz (2001) ausgeführt. Diese hier ausgearbeitete Veröffentlichung stellt zwei verschiedene Beweise bereit. Mit einer gewissen Umsortierung folge ich den Autoren hierin und stelle in Kapitel 4 beide Beweise vor.

Die benötigten Grundlagen dafür bestehen aus der Theorie der Lie-Gruppen und -Algebren (Kapitel 2) und (für einen der Beweise) aus Aussagen über graduierte Lie-Algebren und Vektorfelder auf Siegel-Gebieten (Kapitel 3), wie sie beispielsweise in dem gut lesbaren Artikel von Kaup, Matsushima und Ochiai (1970) dargeboten werden.

Mathematikhistorisch gibt es andere bekannte Beispiele von Klassifikationen, die der hier vorgestellten ähneln. Am einfachsten ist der Riemannsche Abbildungssatz: Jedes einfach zusammenhängende Gebiet in $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{P}^1$ ist biholomorph äquivalent zu $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{D}$.

Die nächste Stufe ist der sogenannte Uniformisierungssatz: Jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche ist biholomorph äquivalent zu $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{D}$ (vgl. z. B. *Funktionentheorie* von Fischer u. Lieb, 1988, S. 110f).

Für mehrere Veränderliche ist die Lage komplizierter; hier hat man bislang keine erschöpfenden Ergebnisse. Die Klassifizierung nach Isaev und Krantz ist eines von vielen Teilergebnissen.

Zum Schluß der Einleitung möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. E. Oeljeklaus für die interessante Themenstellung bedanken und bei allen, die mich während der Ausarbeitung unterstützt haben.

Nachtrag aus dem Jahr 2008: Inzwischen gibt es – aufbauend auf dem Artikel von Isaev und Krantz (2001) – eine Reihe von weitergehenden Resultaten, die im Anhang B auf Seite 66 nachzulesen sind.

1. Hyperbolische Mannigfaltigkeiten

1.1. Komplexe Mannigfaltigkeiten

Die hier zusammengestellten Begriffe finden sich zum Beispiel in: Gamst (2000, Skript zur Analysis auf Mannigfaltigkeiten); *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups* von Warner (1983); *Foundations of Differential Geometry* von Kobayashi u. Nomizu (1963); *Complex Manifolds* von Morrow u. Kodaira (1971) und *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces* von Helgason (1978). Auf diese Literatur sei für in dieser Übersicht aus Platzgründen unerwähnt bleibende Details und Beweise verwiesen.

Definition: *Eine* ***differenzierbare Mannigfaltigkeit*** *M ist ein Hausdorffraum mit einem maximalen C^∞-Atlas, der einen höchstens abzählbaren C^∞-Atlas enthält. (Einen maximalen C^∞-Atlas nennt man auch C^∞-Struktur.)*

*Ein (maximaler) C^∞-**Atlas** ist eine (vollständige) Menge von miteinander C^∞-verträglichen Karten, die ganz M überdecken. Jede **Karte** (U, φ) ist ein Homöomorphismus $\varphi\colon U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ eines Bereiches $U \subset M$ auf einen Bereich im $\mathbb{R}^n$ und stellt so ein lokales Koordinatensystem bereit. (n heißt dann Dimension von M.) Die C^∞-Verträglichkeit bedeutet, daß man diffeomorphe Übergangsabbildungen zwischen je zwei Karten hat.*

*Speziell ist eine **komplexe Mannigfaltigkeit** M ein Hausdorffraum mit einem maximalen komplexen Atlas, in dem ein höchstens abzählbarer komplexer Atlas enthalten ist. Hier sind die Karten Homöomorphismen auf einen Bereich im $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ mit biholomorphen Übergangsabbildungen zwischen je zwei Karten.*

Bemerkung: Eine differenzierbare bzw. komplexe Mannigfaltigkeit M erfüllt das *zweite Abzählbarkeitsaxiom* (besitzt eine abzählbare Basis offener Mengen). Weiter ist M *separabel* (es gibt eine abzählbare, dichte Teilmenge in M), *lokalkompakt* (jeder Punkt hat eine kompakte Umgebung) und *parakompakt*.

Definition: *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein Bereich. Eine Abbildung $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ heißt **holomorphe Funktion**, falls es zu jedem $w \in \Omega$ eine offene Umgebung $U \subset \Omega$ gibt, so daß man f in eine für alle $z \in U$ konvergente Potenzreihe um w entwickeln kann:*

$$f(z) = \sum_{\nu_1,\dots,\nu_n \in \mathbb{N}} a_{\nu_1,\dots,\nu_n} (z_1 - w_1)^{\nu_1} \cdots (z_n - w_n)^{\nu_n}.$$

*Eine **holomorphe Abbildung** ist eine Abbildung $f\colon \Omega \to \mathbb{C}^m$, bei der jede Komponente eine holomorphe Funktion ist.*

*Seien M und N komplexe Mannigfaltigkeiten mit Karten φ_j bzw. ψ_k und $U \subset M$ eine offene Menge. Dann heißt eine Abbildung $f\colon U \to N$ **holomorph**, falls $\psi_k \circ f \circ \varphi_j^{-1}$ holomorph ist (soweit definiert).*

Satz 1.1 (Osgood)**:** *Eine komplexe Funktion auf einem Bereich $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ist genau dann holomorph, wenn sie holomorph in jeder einzelnen Variablen und stetig ist.*

Beweis: siehe z. B. Gunning u. Rossi (1965, S. 2f); Morrow u. Kodaira (1971, S. 2f) ∎

Bemerkung: Nach dem Theorem von Hartogs ist eine komplexe Funktion bereits dann holomorph, wenn sie holomorph in jeder einzelnen Variablen ist.

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten lassen die Einführung von *Tangentialräumen* zu:

Eine *Kurve* auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist eine differenzierbare Abbildung $\alpha\colon I \to M$ mit einem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ als Definitionsbereich. Sei $p \in M$ ein Punkt und α eine Kurve durch p (es sei also $0 \in I$ und $\alpha(0) = p$). Sei (U, φ) eine Karte mit $p \in U$. Dann wird durch $(\varphi \circ \alpha)'(0) \in \mathbb{R}^n$ ein Geschwindigkeitsvektor von α in p gegeben. Ein *Tangentialvektor* an den Punkt p ist eine Äquivalenzklasse $[\alpha]$ von Kurven durch p bei der Relation $\alpha \sim \beta :\Leftrightarrow (\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0)$ für die Karte (U, φ) um $p = \alpha(0) = \beta(0)$. Die Menge aller Tangentialvektoren an p bildet einen reellen Vektorraum, der *Tangentialraum* genannt und mit T_pM bezeichnet wird. Jede Karte um p liefert eine Basis von T_pM.

Ist M eine komplexe Mannigfaltigkeit, so ist der Tangentialraum an p ein komplexer Vektorraum per Identifikation $T_pM \simeq \mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$.

Sei $f\colon U \to \mathbb{K}$ eine auf einer Umgebung U von p definierte differenzierbare bzw. holomorphe Funktion. Die *Richtungsableitung* von f längs der Kurve α durch p ist gegeben durch: $X_pf := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\alpha(t))\big|_{t=0} \in \mathbb{K}$. Die Abbildung $f \mapsto X_pf$ von der Algebra aller auf einer Umgebung U von p definierten differenzierbaren bzw. holomorphen Funktionen nach $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ ist reell linear und erfüllt:

$$X_p(fg) = (X_pf)g(p) + f(p)(X_pg).$$

Das führt auf eine weitere Charakterisierung von Tangentialvektoren: Ein Tangentialvektor X_p an einen Punkt $p \in M$ ist eine durch die obige Vorschrift definierte lineare Abbildung $f \mapsto X_pf$. Wir können identifizieren: $X_p \mathrel{\widehat{=}} [\alpha]$.

Seien $z_1, \ldots, z_n$ durch eine Karte (U, φ) bei $p \in M$ gegebene Koordinaten, und seien die Komponenten einer Kurve α in lokalen Koordinaten mit α_j bezeichnet. Dann kann man jeden Vektor $X_p = [\alpha]$ an p als Linearkombination schreiben: $X_p = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial z_j}\big|_p$ mit $a_j := \frac{\mathrm{d}\alpha_j(t)}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}$, denn es gilt für alle $f\colon U \to \mathbb{K}$:

$$X_pf = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\alpha(t))\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(p) \cdot \frac{\mathrm{d}\alpha_j(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}.$$

Durch die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume erhält man eine differenzierbare bzw. holomorphe Mannigfaltigkeit $TM := \bigcup_{p \in M} T_pM$ der doppelten Dimension von M; diese nennt man das *Tangentialbündel* von M.

Ein *Vektorfeld* auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine Abbildung $X\colon M \to TM$, die jedem $p \in M$ einen Tangentialvektor X_p zuordnet. Für jede differenzierbare bzw. holomorphe Funktion f auf M können wir dann $Xf\colon M \to \mathbb{K}; p \mapsto X_pf$ bilden, und das Vektorfeld X heißt differenzierbar bzw. holomorph, falls Xf differenzierbar bzw. holomorph für alle differenzierbaren bzw. holomorphen Funktionen f ist.

Vektorfelder haben die Eigenschaften $X(\alpha f + \beta g) = \alpha X(f) + \beta X(g)$ (reelle Linearität) und $X(fg) = fX(g) + gX(f)$, sie stellen also *Derivationen* dar.

Definition: *Sei X ein differenzierbares bzw. holomorphes Vektorfeld auf M. Eine Kurve $\alpha\colon I \to M$ heißt* ***Integralkurve****, falls für alle $t \in I$ gilt:*

$$X(\alpha(t)) = X_{\alpha(t)} = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha(t).$$

Zu jedem X gibt es einen *maximalen Fluß* $\Phi_X : I \times M \to M$ auf dem Lebensintervall $I \subset \mathbb{R}$ bzw. eine maximale Integralkurve durch $p \in M$: $\alpha_p(t) = \Phi_X(t,p)$ und eine lokale Einparametergruppe $(\varphi_t)_{t\in I}; \varphi_t(p) = \Phi_X(t,p)$. Hierfür schreiben wir auch:

$$\exp(tX) := \varphi_t\colon M \to M.$$

Definition: *Die* ***Richtungsableitung*** *einer differenzierbaren bzw. holomorphen Funktion $f\colon M \to \mathbb{C}$ bezüglich des differenzierbaren bzw. holomorphen Vektorfeldes X mit maximalem Fluß Φ_X ist gegeben durch:*

$$\begin{aligned} Xf\colon M &\to \mathbb{C} \\ p &\mapsto Xf(p) := \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\alpha_p(t))\big|_{t=0} = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\Phi_X(t,p))\big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Zur späteren Verwendung führen wir noch das *Klammerprodukt* ein:

Definition: *Seien X und Y zwei differenzierbare bzw. holomorphe Vektorfelder auf einer differenzierbaren bzw. komplexen Mannigfaltigkeit M. Das* ***Klammerprodukt*** *von X und Y auf M ist das Vektorfeld $[X,Y]$ auf M, für das $[X,Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$ die Richtungsableitung ist.*

Es gilt dann die Jacobi-Identität: $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$.

Lokal kann man jedes Vektorfeld X als Linearkombination $X = \sum_{j=1}^n \xi_j \partial_j$ schreiben, wobei die ξ_j auf der lokalen Koordinatenumgebung definierte Funktionen sind und die ∂_j als partielle Ableitung gegeben sind:

$$\partial_j\big|_p f = \tfrac{\partial f}{\partial z_j}(p).$$

Geht das sogar global, heißt das Tangentialbündel *trivial*. Differenzierbare bzw. holomorphe Vektorfelder sind dann genau die Vektorfelder X, die sich mit differenzierbaren bzw. holomorphen Funktionen $f\colon M \to \mathbb{K}^n$ als Linearkombination schreiben lassen: $X(p) = \sum_{j=1}^n f_j(p)\partial_j(p)$ (f_j: Komponenten von f). Man kann also differenzierbare bzw. holomorphe Vektorfelder $X : M \to TM$ identifizieren mit differenzierbaren bzw. holomorphen Abbildungen $f\colon M \to \mathbb{K}^n$. Außerdem kann dann das Tangentialbündel TM identifiziert werden mit dem Produkt $M \times \mathbb{K}^n$ (es gibt einen Diffeomorphismus $f\colon M \times \mathbb{K}^n \to TM$ mit $f(p,z) \in T_pM$).

Definition: *Eine Gruppe G heißt* ***reelle*** *bzw.* ***komplexe Lie-Gruppe****, falls sie eine differenzierbare bzw. komplexe Mannigfaltigkeit ist mit differenzierbarer bzw. holomorpher Abbildung $G \times G \to G; (a,b) \mapsto ab^{-1}$.*

(mehr zu Lie-Gruppen in Kapitel 2)

1.2. Hyperbolizität

Die für diesen Abschnitt verwendete Literatur ist: *Introduction to Complex Hyperbolic Spaces* von Lang (1987); *Hyperbolic Complex Spaces* von Kobayashi (1998); *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings* von Kobayashi (1970).

Definition: *Eine komplexe Mannigfaltigkeit M heißt* ***hyperbolisch****, falls die Kobayashi-Pseudometrik d_M eine Metrik ist (also $d_M(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$).*

Dabei ist die ***Kobayashi-Pseudometrik*** *$d_M\colon M \times M \to \mathbb{R}$ gegeben durch:*

$$d_M(x,y) := \inf_{f_i a_i b_i} \sum_{i=1}^{m} \varrho(a_i,b_i)$$

mit holomorphen $f_i\colon \mathbb{D} \to M$ und $x = f_1(a_1), f_1(b_1) = f_2(a_2), \dots, f_m(b_m) = y$; $\varrho(a,b) = \operatorname{artanh}\left|\frac{a-b}{1-a\bar{b}}\right|$ ist die Poincaré-Metrik auf $\mathbb{D}$.

Bemerkung: d_M ist tatsächlich eine Pseudometrik, denn da ϱ eine Metrik ist, folgt direkt: $d_M(x,y) \geq 0$, $d_M(x,y) = d_M(y,x)$, und nach Konstruktion gilt:

$$d_M(x,z) = \inf_{f_i a_i b_i} \sum_{i=1}^{m} \varrho(a_i,b_i) \leq \inf_{f_i a_i b_i} \sum_{i=1}^{m} \varrho(a_i,b_i) = d_M(x,y) + d_M(y,z).$$

Das erste Infimum ist mit $f_1(a_1) = x$, $f_m(b_m) = z$ gebildet, beim zweiten Infimum ist zusätzlich ein Punkt festgehalten: $f_k(b_k) = f_{k+1}(a_{k+1}) = y$ für ein $k \in \{2, \dots, m-1\}$.

Des weiteren ist die Pseudometrik $d_M\colon M \times M \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung (vgl. z. B. Kobayashi, 1998, S. 53).

Lemma 1.2 (Schwarz-Pick)**:** *Holomorphe Funktionen $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ sind bezüglich der Poincaré-Metrik ϱ abstandsverringernd:*

$$\forall x,y \in \mathbb{D}\colon \varrho\big(f(x), f(y)\big) \leq \varrho(x,y).$$

Beweis: siehe z. B. Fischer u. Lieb (1994, S. 260) ∎

Satz 1.3: *Seien M, N komplexe Mannigfaltigkeiten und $f\colon M \to N$ holomorph. Dann ist f bezüglich der Kobayashi-Pseudometrik abstandsverringernd:*

$$\forall x,y \in M\colon d_N\big(f(x), f(y)\big) \leq d_M(x,y).$$

Beweis: Nach Definition ist

$$d_N\big(f(x), f(y)\big) = \inf_{f_i a_i b_i} \sum_{i=1}^{m} \varrho(a_i,b_i)$$

mit $f_1(a_1) = f(x), f_1(b_1) = f_2(a_2), \dots, f_m(b_m) = f(y)$. Nimmt man nur die f_i, die sich faktorisieren lassen als $f_i = f \circ g_i$, so folgt:

$$d_N\big(f(x), f(y)\big) \leq \inf_{g_i a_i b_i} \sum_{i=1}^{m} \varrho(a_i,b_i) = d_M(x,y).$$ ∎

Satz 1.4: *Für komplexe Mannigfaltigkeiten M, N gilt:*

$$\forall x, y \in M \ \forall a, b \in N\colon d_{M\times N}\big((x,y),(a,b)\big) = \max\big(d_M(x,y), d_N(a,b)\big).$$

Beweis: siehe z. B. Kobayashi (1998, S. 51f) ∎

Satz 1.5: *Spezielle komplexe Mannigfaltigkeiten sind $\mathbb{C}$ und $\mathbb{D}$. Für diese gilt:*

$$d_{\mathbb{D}} = \varrho, \qquad\qquad d_{\mathbb{C}} \equiv 0 \quad (\text{und daher: } d_{\mathbb{C}^n} \equiv 0).$$

Insbesondere ist $\mathbb{C}^n$ nicht hyperbolisch.

Beweis: ad $\mathbb{D}$: Weil $\mathrm{id}\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph ist, gilt nach Konstruktion der Pseudometrik: $d_{\mathbb{D}}(x,y) \leq \varrho(x,y)$. Andererseits kann man mit holomorphen $f_i\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, die so gewählt sind, daß $x = f_1(a_1), f_1(b_1) = f_2(a_2), \ldots, f_m(b_m) = y$ ist, auch schreiben:

$$\varrho(x,y) = \varrho\big(f_1(a_1), f_m(b_m)\big) \leq \sum_{i=1}^{m} \varrho\big(f_i(a_i), f_i(b_i)\big),$$

wobei im letzten Schritt die Dreiecksungleichung angewendet wurde. Nun liefert das Lemma von Schwarz-Pick:

$$\varrho(x,y) \leq \sum_{i=1}^{m} \varrho(a_i, b_i).$$

Durch Bilden des Infimums über alle möglichen Wahlen der f_i, a_i und b_i folgt:

$$\varrho(x,y) \leq \inf_{f_i a_i b_i} \sum_{i=1}^{m} \varrho(a_i, b_i) = d_{\mathbb{D}}(x,y).$$

ad $\mathbb{C}$: Seien $x, y \in \mathbb{C}$. Durch $f_\varepsilon(z) = x + \frac{y-x}{\varepsilon} z$ wird für beliebiges $\varepsilon \in \,]0,1[$ eine holomorphe Funktion $f_\varepsilon\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ definiert mit $f_\varepsilon(0) = x$ und $f_\varepsilon(\varepsilon) = y$. Nach Konstruktion der Pseudometrik gilt daher speziell:

$$d_{\mathbb{C}}(x,y) \leq \varrho(0,\varepsilon) = \operatorname{artanh} \varepsilon.$$

Diese Abschätzung ist für alle $\varepsilon \in \,]0,1[$ gültig, per $\varepsilon \to 0$ folgt: $d_{\mathbb{C}}(x,y) = 0$. ∎

Bemerkung: Allgemein kann man zeigen, daß für zusammenhängende komplexe Lie-Gruppen G gilt: $d_G \equiv 0$. Auf einer hyperbolischen Mannigfaltigkeit kann daher keine zusammenhängende komplexe Lie-Gruppe operieren* (vgl. z. B. Kobayashi, 1998, S. 56).

Folgerung: Sei M eine hyperbolische komplexe Mannigfaltigkeit und $f\colon \mathbb{C} \to M$ holomorph. Dann ist f konstant. Es gilt nämlich für $x, y \in \mathbb{C}$:

$$d_M\big(f(x), f(y)\big) \leq d_{\mathbb{C}}(x,y) = 0$$
$$\Longrightarrow\ d_M\big(f(x), f(y)\big) = 0 \ \Longrightarrow\ f(x) = f(y) \ \Longrightarrow\ f \text{ konstant.}$$

*zum Begriff einer *Aktion* siehe Abschnitt 1.3

1.3. Transformationsgruppen

Die für diesen Abschnitt verwendete Literatur besteht aus: *Hyperbolic Complex Spaces* von Kobayashi (1998); *Foundations of Differential Geometry* von Kobayashi u. Nomizu (1963); *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces* von Helgason (1978).

Definition: *Sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit. Die Gruppe aller biholomorphen Abbildungen* $\operatorname{Aut} M := \{f\colon M \to M \mid f \text{ biholomorph}\}$ *nennt man* ***Automorphismengruppe*** *von M.*

Die Automorphismengruppe kann mit der sogenannten ***Kompakt-Offen-Topologie*** *versehen werden. Diese ist wie folgt definiert:*

Seien $K \subset M$ kompakt und $U \subset M$ offen. Man setzt:

$$W(K,U) := \{g \in \operatorname{Aut} M \mid g(K) \subset U\}.$$

Die Kompakt-Offen-Topologie ist dann die gröbste Topologie auf $\operatorname{Aut} M$*, in der alle $W(K,U)$ offen sind.*

Ausgestattet mit der Kompakt-Offen-Topologie ist $\operatorname{Aut} M$ ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis: M hat nämlich eine abzählbare Basis offener Mengen U_i, und damit hat auch die Menge aller endlichen Durchschnitte der Mengen $W(\bar{U}_i, U_j)$ abzählbar viele Elemente und stellt eine Basis von $\operatorname{Aut} M$ dar (vgl. z. B. Helgason, 1978, Kap. IV, § 2).

Definition: *Eine bijektive Abbildung $f\colon M \to M$ nennen wir eine* ***Isometrie****, falls sie die durch die (Pseudo-)Metrik gegebenen Abstände erhält:*

$$d_M\big(f(x), f(y)\big) = d_M(x,y) \text{ für alle } x, y \in M.$$

Ist d_M insbesondere eine Metrik, so sind Isometrien offenbar umkehrbar stetig.

Mit $B_r(x)$ sei die offene Kugel $\{y \in M \mid d_M(x,y) < r\}$ vom Radius r um $x \in M$ bezeichnet. Für alle Isometrien f gilt dann wegen der Abstandserhaltung: $f(B_r(x)) = B_r(f(x))$.

Lemma 1.6: *Alle Automorphismen $f \in \operatorname{Aut} M$ sind Isometrien.*

Beweis: Als direkte Folge des Satzes 1.3 erhalten alle Automorphismen f die durch die Pseudometrik gegebenen Abstände:

$$d_M(x,y) = d_M\big(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(y))\big) \le d_M\big(f(x), f(y)\big) \le d_M(x,y). \qquad \blacksquare$$

Lemma 1.7: *Sei $(f_n)_{\mathbb{N}}$ eine Folge von Isometrien, die punktweise gegen eine Isometrie $f\colon M \to M$ konvergiert: $f_n(p) \to f(p)$ für alle $p \in M$. Dann konvergiert $(f_n)_{\mathbb{N}}$ auf jedem Kompaktum $K \subset M$ gleichmäßig gegen f:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall j \ge N\ \forall x \in K\colon d_M(f_j(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, und sei $K \subset M$ kompakt. Wegen der punktweisen Konvergenz gibt es zu jedem $p \in K$ ein n_p, so daß $d_M(f_j(p), f(p)) < \frac{\varepsilon}{3}$ ist für alle $j \ge n_p$.

Sei $B_{\varepsilon/3}(p)$ die offene Kugel vom Radius $\frac{\varepsilon}{3}$ um p; für jedes $x \in B_{\varepsilon/3}(p)$ und alle $j \geq n_p$ gilt dann mit Hilfe der Dreiecksungleichung und der Tatsache, daß Isometrien Abstände erhalten:

$$\begin{aligned} d_M(f_j(x), f(x)) &\leq d_M(f_j(x), f_j(p)) + d_M(f_j(p), f(p)) + d_M(f(p), f(x)) \\ &< 2d_M(x,p) + \tfrac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Wir überdecken nun K mit den $B_{\varepsilon/3}(p)$; weil K kompakt ist, gibt es endlich viele $p_\nu \in K$, so daß K überdeckt wird von den $B_{\varepsilon/3}(p_\nu)$. Sei $N = \max\{n_{p_\nu}\}$. Dann ist $d_M(f_j(x), f(x)) < \varepsilon$ für alle $x \in K$ und alle $j \geq N$. Die Konvergenz ist somit tatsächlich gleichmäßig. ∎

Für Automorphismen können wir Lemma 1.7 auch mit Hilfe der Kompakt-Offen-Topologie formulieren:

Lemma 1.8: *Sei $(f_n)_{\mathbb{N}}$ eine Folge von Automorphismen einer hyperbolischen Mannigfaltigkeit M, die punktweise gegen eine Isometrie $f\colon M \to M$ konvergiert. Dann ist f bereits biholomorph (d. h. $f \in \operatorname{Aut} M$), und $(f_n)_{\mathbb{N}}$ konvergiert auch bezüglich der Kompakt-Offen-Topologie gegen f.*

Beweis: Nach Lemma 1.7 konvergiert die Folge $(f_n)_{\mathbb{N}}$ auf jedem Kompaktum gleichmäßig gegen die Isometrie f.

Da d_M eine Metrik ist, ist die Isometrie f umkehrbar stetig. Es genügt also, für den Beweis von $f \in \operatorname{Aut} M$ die Holomorphie nachzuweisen. Dazu benötigen wir lokale Koordinaten: Die Abbildung f ist holomorph, falls $\psi_k \circ f \circ \varphi_j^{-1}$ holomorph ist (soweit definiert; φ_j, ψ_k: Karten von M). Des weiteren ist nach dem Satz 1.1 von Osgood eine komplexe Funktion auf einem Bereich $\Omega \in \mathbb{C}^n$ genau dann holomorph, wenn sie holomorph in jeder einzelnen Variablen und stetig ist. Wir brauchen also nur noch den eindimensionalen Fall zu betrachten. Spezielle kompakte Mengen in M sind solche, bei denen in lokalen Koordinaten alle Variablen bis auf eine fest gewählt sind und diese eine aus einer in $\mathbb{C}$ kompakten Menge kommt. Die gleichmäßige Konvergenz der gegebenen Folge auf solchen Kompakta liefert dann – etwa über den Satz von Weierstraß – die Holomorphie bezüglich der einen betrachteten Variable.

Wir wissen damit, daß die $(f_n)_{\mathbb{N}}$ auf jedem Kompaktum gleichmäßig gegen $f \in \operatorname{Aut} M$ konvergiert; mit anderen Worten gilt auf jedem Kompaktum $K \subset M$ für alle $\varepsilon > 0$ und fast alle Folgeglieder: $f_n(K) \subset \bigcup_{x \in K} B_\varepsilon(f(x))$. Die Folge $(f_n)_{\mathbb{N}}$ konvergiert gegen f bezüglich der Kompakt-Offen-Topologie, falls jede Umgebung von f fast alle Folgeglieder enthält.

Sei also W eine Umgebung von $f \in \operatorname{Aut} M$. Dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ und geeignete Indizes $i_1, \ldots, i_N, j_1, \ldots, j_N$, so daß gilt: $f \in \bigcap_{k=1}^N W(\bar{U}_{i_k}, U_{j_k}) \subset W$. Das bedeutet nach Definition: $f(\bar{U}_{i_k}) \subset U_{j_k}$ für alle $k \in \{1, \ldots, N\}$. Weil $f(\bar{U}_{i_k})$ kompakt und $M \setminus U_{j_k}$ abgeschlossen ist, haben wir:*

$$\delta := \min_k \operatorname{dist}\bigl(f(\bar{U}_{i_k}), M \setminus U_{j_k}\bigr) > 0.$$

Die gleichmäßige Konvergenz der Folge $(f_n)_{\mathbb{N}}$ auf jedem Kompaktum liefert nun für $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$: $f_n(\bar{U}_{i_k}) \subset \bigcup_{x \in \bar{U}_{i_k}} B_\varepsilon(f(x)) \subset U_{j_k}$ für fast alle Folgeglieder. Daher konvergiert die Folge bezüglich der Kompakt-Offen-Topologie. ∎

*Wie üblich sei: $\operatorname{dist}(A,B) := \inf\bigl\{d_M(a,b) \bigm| a \in A; b \in B\bigr\}$.

Die Voraussetzung von Lemma 1.7 kann noch wesentlich abgeschwächt werden; hierfür dient das folgende

Lemma 1.9: *Sei M eine zusammenhängende hyperbolische Mannigfaltigkeit. Sei $(f_n)_{\mathbb{N}}$ eine Folge von Isometrien auf M, und für ein $p \in M$ habe $(f_n(p))_{\mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt. Es gibt dann eine Teilfolge $(f_{n_k})_{\mathbb{N}}$, die punktweise gegen eine Isometrie $f\colon M \to M$ konvergiert.*

Beweis: siehe Anhang A auf Seite 63. ■

Definition: *Seien G eine Gruppe und M eine beliebige Menge. Die Gruppe G **operiert** auf M, wenn eine Abbildung („**Aktion**“) $G \times M \to M; (g,p) \mapsto gp$ vorliegt, so daß $ep = p$ ist für die Identität e in G und das Assoziativgesetz $g(hp) = (gh)p$ gilt.*

*Als **Bahn** eines Punktes $p \in M$ unter der Aktion von G bezeichnet man die Menge $G(p) := \{gp \mid g \in G\}$. Den Stabilisator $G_p := \{g \in G \mid g(p) = p\}$ des Punktes p nennt man auch **Isotropiegruppe** von p in G.*

*Die Aktion von G auf M heißt **transitiv**, wenn alle Bahnen übereinstimmen: $G(p) = M$.*

*Sei ab jetzt M wieder eine komplexe Mannigfaltigkeit. Dann operiert die Automorphismengruppe $\operatorname{Aut} M$ auf natürliche Weise auf M. Die Mannigfaltigkeit M heißt **homogen**, falls eine Gruppe $G \subset \operatorname{Aut} M$ von Automorphismen auf M transitiv operiert.*

*Eine **stetige Transformationsgruppe** ist eine Gruppe G, für die es einen stetigen Homomorphismus $G \to \operatorname{Aut} M$ gibt; auf diese Weise erhält man eine Aktion von G auf M. Die stetige Transformationsgruppe G operiert **effektiv**, wenn der Homomorphismus $G \to \operatorname{Aut} M$ den trivialen Kern e hat. (Das ist zum Beispiel für alle Untergruppen von $\operatorname{Aut} M$ der Fall.)*

*Eine stetige Transformationsgruppe G heißt **eigentliche Transformationsgruppe**, wenn ihre Aktion eigentlich ist, das heißt, wenn unter der Abbildung $\Psi\colon G \times M \to M \times M; (g,m) \mapsto (g(m), m)$ das Urbild jeder kompakten Menge wieder kompakt ist.*

Lemma 1.10: *Ist M eine komplexe Mannigfaltigkeit mit einer eigentlichen Transformationsgruppe G, so ist die Isotropiegruppe $G_p = \{g \in G \mid g(p) = p\}$ von $p \in M$ in G kompakt.*

Beweis: Für $p \in M$ ist $\Psi^{-1}(p,p) = (G_p, p)$ das Urbild von (p,p) bei der Abbildung Ψ; weil $\{(p,p)\}$ kompakt und Ψ eigentlich ist, ist auch G_p kompakt. ■

Ein Beispiel für eigentliche Transformationsgruppen liefert der folgende

Satz 1.11: *Auf einer zusammenhängenden hyperbolischen Mannigfaltigkeit M operiert die Automorphismengruppe $\operatorname{Aut} M$ eigentlich.*

Beweis: Zur Abkürzung sei $G := \operatorname{Aut} M$. Zu zeigen ist, daß die Abbildung $\Psi\colon G \times M \to M \times M; (g,x) \mapsto (g(x), x)$ eigentlich ist.

Sei $K_1 \times K_2 \subset M \times M$ kompakt, das heißt, seien $K_1, K_2 \subset M$ kompakt. Sei weiter $H := \{g \in G \mid K_1 \cap g(K_2) \neq \varnothing\}$. Zu zeigen ist, daß das Urbild

$$\Psi^{-1}(K_1 \times K_2) = \{(g,x) \in G \times M \mid g(x) \in K_1 \wedge x \in K_2\} \subset H \times K_2$$

kompakt ist. Weil $\Psi^{-1}(K_1 \times K_2)$ abgeschlossen ist, genügt es zu zeigen, daß die Menge H kompakt ist. Ist $H = \varnothing$, sind wir fertig, sei also $H \neq \varnothing$. Nun ist H kompakt, wenn jede Folge $(g_n)_{\mathbb{N}}$ in H eine bezüglich der Kompakt-Offen-Topologie konvergente Teilfolge mit Grenzwert in H besitzt. Nach Lemma 1.8 genügt es dafür, die punktweise Konvergenz gegen eine Isometrie zu zeigen.

Sei $(g_n)_{\mathbb{N}}$ eine Folge in H, für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte also: $K_1 \cap g_n(K_2) \neq \varnothing$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ wählen wir $p_n \in g_n^{-1}(K_1) \cap K_2$. Dann ist $(p_n)_{\mathbb{N}}$ eine Folge in K_2, und wegen $g_n(p_n) \in K_1 \cap g_n(K_2)$ ist außerdem $(g_n(p_n))_{\mathbb{N}}$ eine Folge in K_1. Weil K_1 und K_2 kompakt sind, gibt es also eine Teilfolge $(p_{n_j})_{\mathbb{N}}$ von $(p_n)_{\mathbb{N}}$, so daß $p_{n_j} \to p \in K_2$ und $g_{n_j}(p_{n_j}) \to q \in K_1$ gelten. Aus der Dreiecksungleichung erhält man unter Verwendung, daß g_{n_j} eine Isometrie ist:

$$\begin{aligned} d_M\big(g_{n_j}(p), q\big) &\leq d_M\big(g_{n_j}(p), g_{n_j}(p_{n_j})\big) + d_M\big(g_{n_j}(p_{n_j}), q\big) \\ &= d_M\big(p, p_{n_j}\big) + d_M\big(g_{n_j}(p_{n_j}), q\big), \end{aligned}$$

und deswegen konvergiert auch die Folge $(g_{n_j}(p))_{\mathbb{N}}$ gegen $q \in K_1 \subset M$.

Lemma 1.9 liefert nun, daß eine Teilfolge $(f_n)_{\mathbb{N}}$ von $(g_{n_j})_{\mathbb{N}}$ und damit von $(g_n)_{\mathbb{N}}$ existiert, die punktweise gegen eine Isometrie $f\colon M \to M$ konvergiert: $f_n(m) \to f(m)$ für alle $m \in M$. Insbesondere gilt $f(p) = q$ und daher $f \in H$.

Damit ist die Eigentlichkeit gezeigt. ∎

Satz 1.12: *Ist M eine zusammenhängende hyperbolische Mannigfaltigkeit, so ist* $\operatorname{Aut} M$ *eine lokal-kompakte, reelle Lie-Gruppe bezüglich der Kompakt-Offen-Topologie.*

Beweis: Für den Beweis, daß $\operatorname{Aut} M$ lokal-kompakt ist, sei $a \in M$ und U eine offene Umgebung von a mit kompaktem Abschluß. Es genügt zu zeigen, daß die Umgebung $W := W(\{a\}, U) = \big\{ f \in \operatorname{Aut} M \;\big|\; f(a) \in U \big\}$ der Eins $\mathrm{id} \in \operatorname{Aut} M$ einen kompakten Abschluß hat. (W hat kompakten Abschluß, falls alle Folgen in W eine in $\operatorname{Aut} M$ konvergente Teilfolge besitzen.)

Sei $(f_n)_{\mathbb{N}}$ eine Folge in W. Dann ist $(f_n(a))_{\mathbb{N}}$ eine Folge in der kompakten Menge $\bar{U}$ und besitzt als solche einen Häufungspunkt. Gemäß Lemma 1.9 können wir eine Teilfolge $(f_{n_k})_{\mathbb{N}}$ wählen, so daß $(f_{n_k}(x))_{\mathbb{N}}$ für alle $x \in M$ konvergiert. Mit Lemma 1.8 folgt, daß die Isometrie f, die gegeben ist durch $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$, bereits in $\operatorname{Aut} M$ liegt. Außerdem konvergiert $(f_{n_k})_{\mathbb{N}}$ sogar gleichmäßig gegen f auf jedem Kompaktum $K \subset M$, und somit hat W einen kompakten Abschluß.

Nach Bochner u. Montgomery (1946, Theorem A) ist eine lokal-kompakte Transformationsgruppe bereits eine reelle Lie-Gruppe. ∎

1.4. Siegel-Gebiete

Als Literatur zu diesem Abschnitt dienen: Kaup, Matsushima und Ochiai (1970); *Automorphic Functions and the Geometry of Classical Domains* von Pyatetskii-Shapiro (1969); *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings* von Kobayashi (1970); *Algebraic Structures of Symmetric Domains* von Satake (1980).

Wir wollen hier eine bestimmte Sorte hyperbolischer Mannigfaltigkeiten einführen, die sogenannten *Siegel-Gebiete*. Diese stellen eine Verallgemeinerung des Begriffs der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \big\{ z \in \mathbb{C} \;\big|\; \operatorname{Im} z > 0 \big\}$ dar.

Definition: *Ein spitzer, offener, konvexer Kegel oder kurz ein* ***spitzer Kegel*** *ist eine (nichtleere) offene Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^k$ mit den Eigenschaften:*

$$x, y \in K \implies \forall t, s > 0\colon tx + sy \in K;$$
$$\forall x, y \in K\colon x + \mathbb{R}y \not\subset K.$$

Weiter heißt $G(K) := \{g \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{R}) \mid gK = K\}$ die ***lineare Automorphismengruppe*** *des Kegels K.*

Die zweite definierende Bedingung des spitzen Kegels bedeutet, daß keine Gerade ganz im Kegel enthalten ist. Dann gibt es ein Koordinatensystem, in dem der Kegel nur positive Komponenten aufweist – daher die Bezeichnung *spitzer* Kegel. Diese Eigenschaft sorgt zusammen mit der Konvexität dafür, daß für jeden spitzen Kegel K stets $K + \bar{K} \subset K$ gilt.

Definition: *Seien $n, k \in \mathbb{N}$, $0 < k \leq n$ und $K \subset \mathbb{R}^k$ ein spitzer Kegel. Eine Abbildung $F\colon \mathbb{C}^{n-k} \times \mathbb{C}^{n-k} \to \mathbb{C}^k$ mit den Eigenschaften:*

1. $\forall x, y \in \mathbb{C}^{n-k}\colon F(x, y) = \overline{F(y, x)}$;
2. $\forall x_1, x_2, y \in \mathbb{C}^{n-k}\ \forall a, b \in \mathbb{C}\colon F(ax_1 + bx_2, y) = aF(x_1, y) + bF(x_2, y)$;
3. $\forall z \in \mathbb{C}^{n-k}\colon F(z, z) \in \bar{K}$ *und* $F(z, z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

*nennt man eine K-**hermitesche Form** auf $\mathbb{C}^{n-k} \times \mathbb{C}^{n-k}$. Weiter heißt*

$$U(K, F) := \{(z, w) \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k} \mid \operatorname{Im} z - F(w, w) \in K\}$$

*das **durch K und F definierte Siegel-Gebiet**.*

Bemerkung: $U(K, F)$ wird in der Literatur meistens als *Siegel-Gebiet zweiter Art* bezeichnet, im Spezialfall $k = n$ (also $F \equiv 0$) heißt $U(K) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \operatorname{Im} z \in K\}$ *Siegel-Gebiet erster Art*. Darüber hinaus gibt es auch allgemeinere Möglichkeiten, Siegel-Gebiete zu definieren (dritter Art, generalisiert, etc.), die wir hier aber nicht betrachten. In dieser Arbeit wollen wir daher Siegel-Gebiete zweiter Art der Einfachheit halber stets kurz Siegel-Gebiete nennen.

Das einfachste Beispiel eines Siegel-Gebietes liegt bei $n = k = 1$ vor. Dann gibt es nur die Möglichkeiten: $K =]0, \infty[$ und $K =]-\infty, 0[$, die auf die Halbebenen $U = \mathbb{H}$ oder $U = -\mathbb{H}$ führen. Mit der Cayley-Transformation $\pm z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ erhält man auf jeden Fall: $U \simeq \mathbb{D}$.

Zur Rechtfertigung der Sprechweise dient der folgende

Satz 1.13: *Ein Siegel-Gebiet ist ein konvexes Gebiet.*

Beweis: Ein Siegel-Gebiet $U(K, F)$ ist wegen $\mathbb{R}^k + iK = U(K) \hookrightarrow U(K, F)$ nichtleer. Es ist offen, weil K offen ist und Im und F stetig sind.

Seien nun $(z_1, w_1), (z_2, w_2) \in U$, das heißt, $\operatorname{Im} z_j - F(w_j, w_j) =: k_j \in K$ für $j \in \{1, 2\}$. Sei weiter $(z, w) \in \mathbb{C}^n$ eine konvexe Kombination (mit $t \in [0, 1]$):

$(z, w) := (1-t)(z_1, w_1) + t(z_2, w_2)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} z - F(w,w) &= (1-t)\big(k_1 + F(w_1,w_1)\big) + t\big(k_1 + F(w_1,w_1)\big) \\
&\quad - F\big((1-t)w_1 + tw_2, (1-t)w_1 + tw_2\big) \\
&= (1-t)k_1 + tk_2 + t(1-t)\big(F(w_1,w_1) + F(w_2,w_2) \\
&\qquad\qquad - F(w_1,w_2) - F(w_2,w_1)\big) \\
&= (1-t)k_1 + tk_2 + t(1-t)F(w_1 - w_2, w_1 - w_2).
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung sind $(1-t)k_1 + tk_2 \in K$ und $F(w_1 - w_2, w_1 - w_2) \in \bar{K}$. Weil K als spitzer Kegel $K + \bar{K} \subset K$ erfüllt, folgt dann, daß auch $\operatorname{Im} z - F(w,w) \in K$ ist. Also ist U tatsächlich konvex (und insbesondere zusammenhängend). ■

Im allgemeinen kann ein Siegel-Gebiet eine recht komplizierte Struktur haben, weil der spitze Kegel K lediglich offen und konvex zu sein braucht sowie keine Gerade ganz enthalten darf, aber bis auf diese vorgeschriebenen Eigenschaften völlig beliebig gewählt werden kann. Besonders einfache Siegel-Gebiete erhält man in den Fällen $k = 1$ und $k = 2$, weil man dann durch geeignete Wahl des Koordinatensystems dafür sorgen kann, daß $K =]0, \infty[$ bzw. $K =]0, \infty[^2$ ist. Für $k \geq 3$ können wir zwar immer noch o. B. d. A. annehmen, daß der spitze Kegel K nur positive Komponenten aufweist (und somit die K-hermitesche Form F sogar aus positiv semidefiniten Komponenten zusammengesetzt ist), aber im allgemeinen ist K lediglich enthalten in $]0, \infty[^k$.

Satz 1.14: *Sei $U(K,F)$ ein Siegel-Gebiet. Bei $k = 1$ ist $U(K,F) \simeq B^n$.*

Bei $k = 2$ und einer verschwindenden Komponente der K-hermiteschen Form F ist $U(K,F) \simeq \mathbb{D} \times B^{n-1}$.

Beweis: Im Falle $k = 1$ nehmen wir o. B. d. A. an, daß $K =]0, \infty[$ ist, dann gilt:

$$U \simeq \big\{(z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1} \;\big|\; \operatorname{Im} z > F(w,w) \geq 0\big\}.$$

Hier ist die hermitesche Form F positiv definit, o. B. d. A. sei $F(w,w) = \|w\|^2$. Wir definieren dann neue Koordinaten per $\zeta_1 := \frac{z-i}{z+i}$ und $\zeta_j := \frac{2w_{j-1}}{z+i}$ für alle $j \in \{2, \ldots, n\}$. Mit der Beziehung $|z+i|^2 - |z-i|^2 = 4 \operatorname{Im} z$ folgt:

$$\|\zeta\|^2 = \tfrac{1}{|z+i|^2} \cdot \Big(|z-i|^2 + 4 \cdot \sum_{j=2}^{n} |w_{j-1}|^2\Big) = 1 + \tfrac{4}{|z+i|^2} \cdot \big(-\operatorname{Im} z + \|w\|^2\big),$$

also $\|\zeta\| < 1 \iff (z,w) \in U$ und daher: $U \simeq B^n$.

Bei $k = 2$ kann man durch geeignete Wahl des Koordinatensystems dafür sorgen, daß $K =]0, \infty[^2$ ist. Dann ist:

$$U \simeq \big\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{n-2} \;\big|\; \operatorname{Im} z_1 > F_1(w,w) \geq 0; \operatorname{Im} z_2 > F_2(w,w) \geq 0\big\}$$

mit positiv semidefiniten hermiteschen Formen F_1, F_2, es gilt:

$$F_1(w,w) = 0 = F_2(w,w) \iff w = 0.$$

Ist z. B. $F_1 \equiv 0$, so muß F_2 positiv definit sein, o. B. d. A. sei $F_2(w,w) = \|w\|^2$. Dann haben wir:

$$U \simeq \big\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{n-2} \;\big|\; \operatorname{Im} z_1 > 0; \operatorname{Im} z_2 > \|w\|^2 \geq 0\big\} \simeq \mathbb{D} \times B^{n-1},$$

wobei die behauptete Äquivalenz durch Transformation in ein neues Koordinatensystem wie im Falle $k = 1$ folgt. ■

Bemerkung: Wenn bei $k = 2$ keine der Komponenten F_1 und F_2 überall verschwindet, gibt es immer noch zwei Möglichkeiten: $F_1 \sim F_2$ und $F_1 \not\sim F_2$. [Dabei kann der Fall $F_1 \not\sim F_2$ nur bei $n \geq 4$ realisiert werden: Die beiden hermiteschen Formen F_j können mit hermiteschen Matrizen R_j geschrieben werden als: $F_j(x, y) = {}^t x R_j \overline{y}$; für $n = 3$ ist aus Dimensionsgründen einfach $R_j \in \mathbb{R}$ und daher: $F_1(w, w) \sim |w|^2 \sim F_2(w, w)$.]

Wie im Kapitel 4 gezeigt wird (vgl. Satz 4.1), gilt aber in diesen Fällen $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} U \leq n^2$, und in dieser Arbeit interessieren nur Siegel-Gebiete mit einer Dimension $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} U \geq n^2 + 1$.

Das andere Extrem zu den eben betrachteten Fällen mit kleinen k ist der Fall $k = n$. Dabei kann der Kegel K vielfältig gewählt werden. Speziell für $k = n$ und $K =]0, \infty[^k$ haben wir (per Cayley-Transformation in jeder Komponente z_j):

$$U = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \;\middle|\; \forall j \in \{1, \dots, n\} \colon \operatorname{Im} z_j > 0 \right\} = \mathbb{H}^n \simeq \mathbb{D}^n.$$

Neben dieser besonders einfachen Möglichkeit soll hier noch ein Beispiel angegeben werden, bei dem die Komponenten des Kegels nicht unabhängig voneinander sind: In drei Dimensionen gibt es den spitzen Kegel

$$\begin{aligned} K^+ &:= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 > 0; x_3 > 0; -\sqrt{x_1 x_3} < x_2 < \sqrt{x_1 x_3} \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{smallmatrix}\right) \text{ positiv definit} \right\}. \end{aligned}$$

Bei $n = k = 3$ erhält man so den dreidimensionalen *Siegelraum* S:

$$\begin{aligned} U(K^+) &= \left\{ (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; \operatorname{Im}\left(\begin{smallmatrix} w_1 & w_2 \\ w_2 & w_3 \end{smallmatrix}\right) \text{ positiv definit} \right\} \\ &\simeq \left\{ (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; E_2 - Z \cdot \overline{Z} \text{ positiv definit; } Z := \left(\begin{smallmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{smallmatrix}\right) \right\} =: S. \end{aligned}$$

Die Äquivalenz $U \simeq S$ gilt, weil die Abbildung

$$\left(\begin{smallmatrix} w_1 & w_2 \\ w_2 & w_3 \end{smallmatrix}\right) =: W \mapsto (E_2 + iW)(E_2 - iW)^{-1} =: Z$$

biholomorph und

$$\begin{aligned} E_2 - Z \cdot \overline{Z} &= (E_2 - iW)^{-1} \cdot \Big((E_2 - iW)(E_2 + i\overline{W}) \\ &\qquad - (E_2 + iW)(E_2 - i\overline{W}) \Big) \cdot (E_2 + i\overline{W})^{-1} \\ &= (E_2 - iW)^{-1} \cdot (4 \operatorname{Im} W) \cdot (E_2 + i\overline{W})^{-1} \end{aligned}$$

positiv definit ist.

Des weiteren ist jede Abbildung $W \mapsto (AW + B)(CW + D)^{-1}$ mit Koeffizienten $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \operatorname{Sp}_2(\mathbb{R}) := \left\{ M \in \operatorname{GL}_4(\mathbb{R}) \;\middle|\; {}^t M J_4 M = J_4 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}$ ein Automorphismus von S; daher ist die Automorphismengruppe von S isomorph zu $\operatorname{Sp}_2(\mathbb{R}) / \pm E_4$ und hat die Dimension 10.

Für kleine n kann man alle Siegel-Gebiete $U = U(K, F)$ auflisten. Für $n = 1$ ist $U \simeq \mathbb{D}$. Für $n = 2$ kann nur entweder $k = 1$ (dann $U \simeq B^2$) oder $k = 2$ sein (dann $U \simeq \mathbb{D}^2$). Für $n = 3$ ist $k \in \{1, 2, 3\}$; für $k = 1$ haben wir $U \simeq B^3$, für $k = 2$ ist $U \simeq \mathbb{D} \times B^2$, und bei $k = 3$ ist U biholomorph äquivalent zu S oder $\mathbb{D}^3$ (bei Wahl des Kegels zu $K = K^+$ bzw. $K =]0, \infty[^3$).

Weitere Möglichkeiten gibt es bei $n = 3$ nicht, denn jedes Siegel-Gebiet mit $n \leq 3$ ist bereits* ein symmetrischer Raum, und diese lassen sich vollständig klassifizieren (vgl. z. B. Helgason, 1978, Tabelle S. 518f): Die einzigen Möglichkeiten für nicht zusammengesetzte (irreduzible) Räume der komplexen Dimension 3 sind nach der zitierten Tabelle: AIII $\simeq$ DIII $\simeq B^3$; BDI $\simeq$ CI muß dann der Siegelraum S sein; dazu kommen noch die Fälle, in denen sich das Siegel-Gebiet als Produkt schreibt: Weil dazu – wie bereits oben notiert – nur $B^1 = \mathbb{D}$ $(n = 1)$ sowie B^2 und $\mathbb{D}^2$ in Frage kommen, können hier nur die beiden Möglichkeiten $\mathbb{D} \times B^2$ und $\mathbb{D}^3$ auftreten.

Alle bislang betrachteten speziellen Realisierungen von Siegel-Gebieten stellen hyperbolische Mannigfaltigkeiten dar. Das gilt auch allgemein:

Satz 1.15: *Jedes Siegel-Gebiet ist eine hyperbolische Mannigfaltigkeit.*

Beweis: Sei $U := U(K, F) = \left\{(z, w) \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k} \;\middle|\; \operatorname{Im} z - F(w, w) > 0\right\}$ ein Siegel-Gebiet. O. B. d. A. sei dabei $K \subset\,]0, \infty[^k$; dann ist jede Komponente F_j der K-hermiteschen Form F eine positiv definite hermitesche Form und kann somit als endliche Summe von Linearformen dargestellt werden (L_j: endliche Teilmengen von $\mathbb{N}$):

$$F_j(w, w) = \sum_{\ell \in L_j} |\lambda_{j;\ell}(w)|^2; \quad j \in \{1, \ldots, k\}.$$

Die positive Definitheit übersetzt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} w = 0 &\iff F(w, w) = 0 \\ &\iff \forall j \in \{1, \ldots, k\} \colon F_j(w, w) = 0 \\ &\iff \forall j \in \{1, \ldots, k\}\; \forall \ell \in L_j \colon \lambda_{j;\ell}(w) = 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten also ein homogenes Gleichungssystem mit mindestens $n - k$ Linearformen, wegen $w \in \mathbb{C}^{n-k}$ wäre nämlich ansonsten eine eindeutige Lösung nicht möglich. Linear unabhängig sind aber nur genau $n - k$ Linearformen; um lineare Unabhängigkeit zu erreichen, müssen wir daher einige Linearformen streichen. Wir beginnen mit den durch L_1 indizierten Linearformen und gehen zu einer maximalen Teilmenge $L_1' \subset L_1$ über, so daß die verbleibenden $\ell_1 := |L_1'|$ Stück eine linear unabhängige Familie $\Lambda_1 := \left\{\lambda_{1;\ell} \;\middle|\; \ell \in L_1'\right\}$ bilden.

Als nächstes fügen wir durch L_2 indizierte Linearformen zu denen aus Λ_1 hinzu. Sei dazu L_2' eine maximale Teilmenge von L_2 (mit $\ell_2 := |L_2'|$), so daß

$$\Lambda_2 := \Lambda_1 \cup \left\{\lambda_{2;\ell} \;\middle|\; \ell \in L_2'\right\}$$

eine linear unabhängige Familie ist. Das Verfahren setzen wir bis L_k fort und haben dann für jedes $j \in \{1, \ldots, k\}$ eine maximale Teilmenge $L_j' \subset L_j$ mit $\ell_j := |L_j'|$ Elementen, so daß sich eine linear unabhängige Familie ergibt:

$$\Lambda_j = \left\{\lambda_{1;\ell} \;\middle|\; \ell \in L_1'\right\} \cup \ldots \cup \left\{\lambda_{j;\ell} \;\middle|\; \ell \in L_j'\right\}.$$

*Nach Cartan (1984) ist jeder beschränkte, homogene Bereich in zwei oder drei Dimensionen symmetrisch, dies überträgt sich auf die Siegel-Gebiete. Für ein Beispiel eines nicht symmetrischen Siegel-Gebietes mit kleinstmöglichem $n = 4$ siehe Pyatetskii-Shapiro (1969, S. 26ff).

Insgesamt enthält Λ_k dann genau $n-k = \ell_1 + \dots + \ell_k$ Linearformen, und mit diesen definieren wir nun neue positiv definite hermitesche Formen:

$$\widetilde{F_j}(x,y) := \sum_{\ell \in L'_j} \lambda_{j;\ell}(x)\overline{\lambda_{j;\ell}(y)}; \quad j \in \{1,\dots,k\}.$$

Wegen $L'_j \subset L_j$ gilt dabei stets: $\widetilde{F_j}(w,w) \le F_j(w,w)$. Wenn wir über $\widetilde{F}$ ein weiteres Siegel-Gebiet definieren: $\tilde{U} := \{(z,w) \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k} \mid \operatorname{Im} z - \widetilde{F}(w,w) > 0\}$, folgt also: $U \subset \tilde{U}$.

Mit den $n-k$ Linearformen aus Λ_k können wir einen Basiswechsel von $\mathbb{C}^{n-k}$ vornehmen (mit $\ell_j := |L'_j|$; beachte, daß $\ell_1 + \dots + \ell_k = n-k$):

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{n-k} \end{pmatrix} \mapsto \tilde{w} = \begin{pmatrix} \tilde{w}_{1;1} \\ \vdots \\ \tilde{w}_{1;\ell_1} \\ \tilde{w}_{2;1} \\ \vdots \\ \tilde{w}_{2;\ell_2} \\ \tilde{w}_{3;1} \\ \vdots \\ \tilde{w}_{k;\ell_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{1;1}(w) \\ \vdots \\ \lambda_{1;\ell_1}(w) \\ \lambda_{2;1}(w) \\ \vdots \\ \lambda_{2;\ell_2}(w) \\ \lambda_{3;1}(w) \\ \vdots \\ \lambda_{k;\ell_k}(w) \end{pmatrix}.$$

Es folgt dann (die zweite Zeile nutzt Satz 1.14):

$$\begin{aligned} U \subset \tilde{U} &\simeq \left\{ (z,\tilde{w}) \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k} \;\middle|\; \begin{matrix} \operatorname{Im} z_1 - |\tilde{w}_{1;1}|^2 - \dots - |\tilde{w}_{1;\ell_1}|^2 > 0 \\ \vdots \\ \operatorname{Im} z_k - |\tilde{w}_{k;1}|^2 - \dots - |\tilde{w}_{k;\ell_k}|^2 > 0 \end{matrix} \right\} \\ &\simeq B^{\ell_1+1} \times \dots \times B^{\ell_k+1} \subset \mathbb{D}^n. \end{aligned}$$

Jedes Siegel-Gebiet $U = U(K,F)$ ist somit enthalten in einem Gebiet, das biholomorph äquivalent zu einem Produkt offener Kugeln ist. Insbesondere kann U in den Polyzylinder $\mathbb{D}^n$ eingebettet werden: $\iota\colon U \hookrightarrow \mathbb{D}^n$.

Es gilt: $d_{\mathbb{D}^n}(\iota(x),\iota(y)) \le d_U(x,y)$. Weil $d_{\mathbb{D}^n}$ eine Metrik ist, muß es auch d_U sein, und daher ist U hyperbolisch. ∎

Umgekehrt gilt der

Satz 1.16 (Nakajima)**:** *Jede homogene hyperbolische Mannigfaltigkeit ist biholomorph äquivalent zu einem homogenen Siegel-Gebiet (zweiter Art).*

Beweis: siehe Nakajima (1985) ∎

In dieser Arbeit kommen nur homogene hyperbolische Mannigfaltigkeiten vor. Des Satzes von Nakajima wegen können wir statt hyperbolischer Mannigfaltigkeiten daher stets Siegel-Gebiete betrachten.

2. Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Für dieses Kapitel stütze ich mich hauptsächlich auf die Bücher: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory* von Humphreys (1972); *Lie Groups and Lie Algebras* von Bourbaki (1975); *Semisimple Lie Algebras* von Goto u. Grosshans (1978). Ausnahmen bilden der Abschnitt 2.2, der auf *Lie Groups and Algebraic Groups* von Onishchik u. Vinberg (1990) zurückgeht, und der Abschnitt 2.3.3 mit Rückgriff auf *Real Analysis* von Lang (1983) und *The Structure of Lie Groups* von Hochschild (1965). Für den Anfang dieses Kapitels gilt außerdem das zu Beginn von Abschnitt 1.1 notierte.

Definition: *Unter einer reellen bzw. komplexen **Lie-Algebra** wollen wir einen endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathfrak{a}$ verstehen, auf dem eine reell bzw. komplex bilineare Multiplikation $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}; (a,b) \longmapsto [a,b]$ definiert ist („Lie-Klammerprodukt"), so daß für alle $a, b, c \in \mathfrak{a}$ gilt: $[a,a] = 0$ (Antikommutativität) und $[a,[b,c]] + [b,[c,a]] + [c,[a,b]] = 0$ (Jacobi-Identität).*

(Lie-Gruppen wurden bereits in Abschnitt 1.1 definiert.)

Beispiel: ①: Die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ aller invertierbaren reellen bzw. komplexen Matrizen ist eine reelle bzw. komplexe Lie-Gruppe.

②: Der $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathbb{K}^{n\times n}$ aller komplexen bzw. reellen $(n\times n)$-Matrizen wird zu einer $\mathbb{K}$-Lie-Algebra, wenn man als Lie-Klammerprodukt den Kommutator $[A,B] := AB - BA$ verwendet. Man verwendet für diese Lie-Algebra die Bezeichnung $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$.

③: Der $\mathbb{K}$-Vektorraum aller differenzierbaren bzw. holomorphen Vektorfelder auf einer differenzierbaren bzw. komplexen Mannigfaltigkeit M wird mit dem im vorigen Kapitel definierten Klammerprodukt zu einer (allerdings unendlichdimensionalen) $\mathbb{K}$-Lie-Algebra $\mathcal{X}(M)$.

Definition: *Sei $\mathfrak{a}$ eine Lie-Algebra. Ein Untervektorraum $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{a}$ ist eine **Unteralgebra**, falls $\mathfrak{u}$ gegenüber der Multiplikation abgeschlossen ist: $[\mathfrak{u},\mathfrak{u}] \subset \mathfrak{u}$. Gilt sogar $[\mathfrak{a},\mathfrak{u}] \subset \mathfrak{u}$, so nennt man $\mathfrak{u}$ ein **Ideal** in $\mathfrak{a}$.*

Beispielsweise ist das *Zentrum* von $\mathfrak{a}$: $Z(\mathfrak{a}) = \{a \in \mathfrak{a} \mid \forall b \in \mathfrak{a} \colon [a,b] = 0\}$ ein Ideal in $\mathfrak{a}$: $[Z(\mathfrak{a}),\mathfrak{a}] = \{0\}$.

Sind $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ Ideale in einer Lie-Algebra $\mathfrak{a}$, so sind offensichtlich auch $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}$ und $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ Ideale in $\mathfrak{a}$. Weiter ist $[\mathfrak{i},\mathfrak{j}]$ ein Ideal, denn es gilt:

$$\begin{aligned}[]
[\mathfrak{a},[\mathfrak{i},\mathfrak{j}]] &\subset [\mathfrak{i},[\mathfrak{a},\mathfrak{j}]] + [[\mathfrak{a},\mathfrak{i}],\mathfrak{j}] \quad \text{(Jacobi-Identität)} \\
&\subset [\mathfrak{i},\mathfrak{j}] + [\mathfrak{i},\mathfrak{j}] \subset [\mathfrak{i},\mathfrak{j}] \quad (\text{da } [\mathfrak{a},\mathfrak{i}] \subset \mathfrak{i} \text{ und } [\mathfrak{a},\mathfrak{j}] \subset \mathfrak{j}). \qquad (*)
\end{aligned}$$

Weil $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ Ideale sind, hat man außerdem: $[\mathfrak{i},\mathfrak{j}] \subset \mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}$.

Zu jeder Lie-Gruppe G gehört eine Lie-Algebra*, die als Tangentialraum am Einheitselement $e \in G$ gegeben ist: $\mathfrak{g} := T_eG$. Damit dieser Vektorraum tatsächlich eine Lie-Algebra wird, müssen wir ihn mit einem Lie-Klammerprodukt versehen. Dazu dienen die folgenden Schritte:

*Wir wollen die Konvention verwenden, daß Lie-Algebren stets die gleiche Bezeichnung wie die zugehörige Lie-Gruppe erhalten, die jedoch klein geschrieben und – so wie diese Fußnote – in Fraktur gesetzt wird.

Sei $\xi \in \mathfrak{g} = T_eG$. Weil das Tangentialbündel einer Lie-Gruppe global trivial ist: $TG = G \ltimes \mathfrak{g}$ (siehe Literatur), können wir zu ξ wie folgt ein Vektorfeld bilden:

$$\begin{aligned} X_\xi \colon G &\to TG \qquad\qquad (= G \ltimes \mathfrak{g}) \\ g &\mapsto (T_eL_g)(\xi) \ (=: g \cdot \xi). \end{aligned}$$

Dabei ist $L_g \colon G \to G; h \mapsto gh$ die Linkstranslation auf der Lie-Gruppe G. Es gilt:

$$\begin{aligned} X_\xi\big(L_g(h)\big) &= (T_eL_{gh})(\xi) = \big(T_e(L_g \circ L_h)\big)(\xi) \\ &= \big(T_{L_h(e)}L_g \circ T_eL_h\big)(\xi) = (T_hL_g)\big(X_\xi(h)\big) \end{aligned}$$

bzw. suggestiv $X_\xi(gh) = gX_\xi(h)$. Vektorfelder mit dieser Eigenschaft nennt man *linksinvariant.* Wir haben also zu ξ ein linksinvariantes Vektorfeld X_ξ konstruiert.

Umgekehrt sei $Y\colon G \to TG$ irgendein linksinvariantes Vektorfeld. Dann ist $\xi := Y(e) \in T_eG = \mathfrak{g}$, und wir haben die Gleichheit $Y = X_\xi$, wie man leicht sieht:

$$Y(g) = Y\big(L_g(e)\big) = T_eL_g\big(Y(e)\big) = g \cdot \xi = X_\xi(g).$$

Die linksinvarianten Vektorfelder $G \to TG$ bilden eine endlichdimensionale Lie-Unteralgebra von $\mathcal{X}(G)$. Es gilt für alle $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ und $r \in \mathbb{R}$: $X_{\xi+r\eta} = X_\xi + rX_\eta$ und $X_{[\xi,\eta]} = [X_\xi, X_\eta]$, wenn man definiert:

Definition: *Das Lie-Klammerprodukt von* $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ *ist* $[\xi, \eta] := [X_\xi, X_\eta](e)$.

Dadurch wird auch der Tangentialraum $\mathfrak{g} = T_eG$ zu einer Lie-Algebra, die wir auf die angegebene Weise mit der Lie-Algebra aller linksinvarianten Vektorfelder identifizieren.

Als Beispiel hat die komplexe Lie-Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ die zugehörige Lie-Algebra $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) := T_{E_n}\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n\times n}$. Weitere Lie-Gruppen werden durch abgeschlossene Untergruppen von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ gegeben, man nennt sie lineare Gruppen. Als Übersicht seien hier einige komplexe und reelle lineare Gruppen mit ihren Lie-Algebren (identifiziert mit Teilmengen von $\mathbb{C}^{n\times n}$) aufgeführt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) &= \big\{M{\in}\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \bigm| \det M = 1\big\}; & \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) &= \big\{M{\in}\mathbb{C}^{n\times n} \bigm| \operatorname{spur} M = 0\big\}; \\
\mathrm{O}_n(\mathbb{C}) &= \big\{M{\in}\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \bigm| {}^tMM = E_n\big\}; & \mathfrak{o}_n(\mathbb{C}) &= \big\{M{\in}\mathbb{C}^{n\times n} \bigm| {}^tM{+}M = 0\big\}; \\
\mathrm{SO}_n(\mathbb{C}) &= \mathrm{O}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}); & \mathfrak{so}_n(\mathbb{C}) &= \mathfrak{o}_n(\mathbb{C}) \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}); \\
\mathrm{Sp}_n(\mathbb{C}) &= \big\{M{\in}\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \bigm| {}^tMJ_nM = J_n\big\}; & \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) &= \big\{M{\in}\mathbb{C}^{2n\times 2n} \bigm| {}^tMJ_n{+}J_nM = 0\big\}; \\
\mathrm{U}_n &= \big\{M{\in}\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \bigm| M^*M = E_n\big\}; & \mathfrak{u}_n &= \big\{M{\in}\mathbb{C}^{n\times n} \bigm| M^*{+}M = 0\big\}; \\
\mathrm{SU}_n &= \mathrm{U}_n \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}); & \mathfrak{su}_n &= \mathfrak{u}_n \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}); \\
\mathrm{Sp}_n &= \mathrm{Sp}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{U}_{2n}; & \mathfrak{sp}_n &= \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}_{2n}.
\end{aligned}$$

Dabei ist jeweils E_n die n-dimensionale Einheitsmatrix und $J_n = \left(\begin{smallmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Bemerkung: Hat man zwei Lie-Gruppen G, H und einen Lie-Gruppenhomomorphismus $f\colon G \to H$, das heißt, einen differenzierbaren bzw. holomorphen Gruppenhomomorphismus, so ist die Tangentialabbildung $T_ef\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ ein Lie-Algebrenhomomorphismus, das heißt, eine mit dem Lie-Klammerprodukt verträgliche lineare Abbildung.

Umgekehrt kann man zu jeder Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ eine Lie-Gruppe G finden, so daß $\mathfrak{g} = T_eG$ ist. Dazu verwendet man die *Exponentialabbildung*, die im folgenden eingeführt wird (zu Details siehe wieder die in Abschnitt 1.1 zitierte Literatur).

Linksinvariante Vektorfelder haben eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte maximale Integralkurve $\alpha_e(t)$ durch $e \in G$ mit $\alpha_e(t+s) = \alpha_e(t)\alpha_e(s)$. Man schreibt für die Einparametergruppe (vgl. S. 3) des Vektorfeldes X_ξ hier $\exp(t\xi) := \exp(tX_\xi) = \alpha_e(t)$. Die Kurve $t \mapsto \exp(t\xi)$ zu $\xi \in T_eG$ ist die eindeutige Lösung der Differentialgleichung:

$$\exp(0\xi) = e; \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(t\xi) = \exp(t\xi)\cdot\xi.$$

Definition: *Sei G eine Lie-Gruppe. Die Abbildung*

$$\begin{aligned}\exp\colon \mathfrak{g} = T_eG &\to G\\ \xi &\mapsto \exp(t\xi)\big|_{t=1}\end{aligned}$$

heißt ***Exponentialabbildung****.*

Die Exponentialabbildung ist holomorph bzw. differenzierbar sowie biholomorph bzw. diffeomorph in einer Umgebung der $0 \in \mathfrak{g}$. Für $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ist exp einfach die Matrixexponentialabbildung.

Mit Hilfe der Exponentialabbildung erhält man nun zu jeder Lie-Algebra eine Lie-Gruppe; genauer gesagt, erzeugt $\exp\mathfrak{g}$ die zusammenhängende Komponente, die die Identität $e \in G$ enthält, insbesondere ist: $\dim\mathfrak{g} = \dim G$. Zum Beispiel gilt: $\exp\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Die Exponentialabbildung läßt sich wie folgt auch anders charakterisieren: Ist $\gamma\colon \mathbb{R} \to G$ ein Lie-Gruppenhomomorphismus (insbesondere: $\gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s)$, also eine Einparametergruppe), so gilt bereits: $\gamma(t) = \exp(t\xi)$ mit $\xi := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)\big|_{t=0}$. Man hat nämlich $\gamma(0) = e$ und die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t) = \gamma(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\gamma(\tau)\big|_{\tau=0}$. Damit gelangt man zu folgendem

Satz 2.1: *Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit zugehöriger Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Sei H eine weitere Lie-Gruppe, $f\colon G \to H$ ein Lie-Gruppenhomomorphismus und $\widetilde{H} \subset H$ eine Lie-Untergruppe mit zugehöriger Lie-Algebra $\tilde{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{h}$. Dann gilt:*

$$T_ef(\mathfrak{g}) \subset \tilde{\mathfrak{h}} \implies f(G) \subset \widetilde{H}.$$

Beweis: Für jedes $\xi \in \mathfrak{g}$ ist $\gamma\colon \mathbb{R} \to H; t \mapsto f\big(\exp(t\xi)\big)$ ein Lie-Gruppenhomomorphismus mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)\big|_{t=0} = T_0(f\circ\exp(t\xi)) = (T_{\exp(0\xi)}f)(T_0\exp(t\xi)) = T_ef(\xi)$ (nach Kettenregel) und $\gamma(0) = f(e) = e$. Daraus erhält man über die obige Charakterisierung der Exponentialabbildung: $f\big(\exp(t\xi)\big) = \gamma(t) = \exp\big(tT_ef(\xi)\big)$.

Die Lie-Gruppe G wird erzeugt von $\exp\mathfrak{g}$, weil sie zusammenhängend ist. Daher wird $f(G)$ erzeugt von $f(\exp\mathfrak{g}) = \exp\big(T_ef(\mathfrak{g})\big)$. Nach Voraussetzung ist $T_ef(\mathfrak{g}) \subset \tilde{\mathfrak{h}}$. Somit haben wir: $f(G) \subset \widetilde{H}$. ∎

Folgerung: Sind G_1 und G_2 einfach zusammenhängende Lie-Gruppen, so gilt: $G_1 \simeq G_2 \iff \mathfrak{g}_1 \simeq \mathfrak{g}_2$. Die Richtung „$\Rightarrow$“ ist klar. Umgekehrt gibt es zu jedem Lie-Algebrenhomomorphismus $\varphi\colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ einen Lie-Gruppenhomomorphismus $f\colon G_1 \to G_2$ mit $T_ef = \varphi$ (vgl. Onishchik u. Vinberg, 1990, Theorem 6, S. 30ff). Der Satz 2.1 liefert dann die Rückrichtung „$\Leftarrow$“.

Definition: *Eine **lineare Darstellung** (V, ϱ) einer Lie-Gruppe G ist ein Lie-Gruppenhomomorphismus $\varrho\colon G \mapsto \mathrm{GL}(V)$ (V: $\mathbb{K}$-Vektorraum), das heißt, gleichzeitig ein Gruppenhomomorphismus und eine differenzierbare bzw. holomorphe Abbildung.*

*Eine **lineare Darstellung** (V, ϱ) einer $\mathbb{K}$-Lie-Algebra $\mathfrak{a}$ ist ein (Lie-Algebren-)Homomorphismus $\varrho\colon \mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{gl}(V)$ (V: $\mathbb{K}$-Vektorraum), das heißt, eine lineare Abbildung, die mit der Multiplikation verträglich ist:* $\varrho([a, b]) = [\varrho(a), \varrho(b)]$.

Lineare Darstellungen wollen wir kurz Darstellungen nennen.

*Die Darstellung (V, ϱ) der Lie-Algebra $\mathfrak{a}$ heißt **treu**, falls der Kern des Homomorphismus $\varrho\colon \mathfrak{a} \to \mathfrak{gl}(V)$ trivial ist:* $\operatorname{Ker} \varrho = \{0\}$.

Jede Lie-Gruppe G kann in der zugehörigen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ dargestellt werden: Zu jedem $g \in G$ gibt es den inneren Automorphismus $a_g\colon x \mapsto gxg^{-1}$. Die *adjungierte Darstellung* von G ist dann gegeben durch:

$$\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g}); g \mapsto T_e a_g.$$

Eine wichtige spezielle Darstellung einer Lie-Algebra $\mathfrak{a}$ ist die *adjungierte Darstellung* ($\mathrm{ad} = T\,\mathrm{Ad}$):

$$\begin{aligned} &\mathrm{ad}\colon \mathfrak{a} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{a}) \\ &\qquad x \mapsto \mathrm{ad}\, x\colon \mathfrak{a} \to \mathfrak{a}; (\mathrm{ad}\, x)(y) := [x, y]; \end{aligned}$$

auf diese Weise wird tatsächlich eine Darstellung definiert: die Linearität folgt aus der Bilinearität der Lie-Klammer, und es gilt wegen der Jacobi-Identität:

$$\begin{aligned} (\mathrm{ad}[a, b])(x) &= [[a, b], x] = -[[b, x], a] - [[x, a], b] \\ &= [a, [b, x]] - [b, [a, x]] = (\mathrm{ad}\, a)(\mathrm{ad}\, b)(x) - (\mathrm{ad}\, b)(\mathrm{ad}\, a)(x) \\ &= [\mathrm{ad}\, a, \mathrm{ad}\, b](x) \text{ für alle } a, b, x \in \mathfrak{a}. \end{aligned}$$

Man rechnet leicht nach, daß $\operatorname{Ker} \mathrm{ad} = Z(\mathfrak{a})$ gilt. Bei verschwindendem Zentrum ist die adjungierte Darstellung also treu.

Satz 2.2: *Sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe mit zugehöriger Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Sei $\varrho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung von G und $U \subset V$ ein Untervektorraum. Dann ist $T_e\varrho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung von $\mathfrak{g}$, und der Untervektorraum U ist genau dann $\varrho(G)$-invariant, wenn er $T_e\varrho(\mathfrak{g})$-invariant ist.*

Beweis: Durch $\mathrm{GL}(V, U) := \{A \in \mathrm{GL}(V) \mid AU \subset U\}$ wird eine Lie-Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$ definiert, und die zugehörige Lie-Algebra ist dann gegeben durch $T_e\mathrm{GL}(V, U) = \{\xi \in \mathfrak{gl}(V) \mid \xi U \subset U\}$.

Sei U $T_e\varrho(\mathfrak{g})$-invariant, das heißt: $T_e\varrho(\mathfrak{g})U \subset U$, also: $T_e\varrho(\mathfrak{g}) \subset T_e\mathrm{GL}(V, U)$. Es folgt mit dem Satz 2.1: $\varrho(G) \subset \mathrm{GL}(V, U)$, also: $\varrho(G)U \subset U$.

Umgekehrt hat man direkt: $\varrho(G) \subset \mathrm{GL}(V, U) \implies T_e\varrho(\mathfrak{g}) \subset T_e\mathrm{GL}(V, U)$. ■

2.1. Zerlegung in einfache Ideale

2.1.1. Auflösbare und nilpotente Lie-Algebren

Definition: *Eine Lie-Algebra* $\mathfrak{a}$ *heißt* ***einfach****, falls sie nur die trivialen Ideale* $\{0\}$ *und* $\mathfrak{a}$ *mit* $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \neq \{0\}$ *besitzt.*

Ein Ideal (insbesondere die Lie-Algebra selbst) $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{a}$ *heißt* ***auflösbar****, falls die abgeleitete Sequenz** $\mathfrak{i} =: \mathfrak{i}^{(0)} \supset \mathfrak{i}^{(1)} \supset \mathfrak{i}^{(2)} \supset \ldots$ *mit* $\mathfrak{i}^{(j+1)} := [\mathfrak{i}^{(j)}, \mathfrak{i}^{(j)}]$ *bei einem* $\mathfrak{i}^{(k)} = \{0\}$ *abbricht.*

Ist $\mathfrak{a}$ eine auflösbare Lie-Algebra, so sind auch alle Unteralgebren $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ auflösbar, denn man hat für alle $j \in \mathbb{N}$: $\mathfrak{b}^{(j)} \subset \mathfrak{a}^{(j)}$. Darüber hinaus gilt folgender:

Satz 2.3: *Seien* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *Lie-Algebren und* $f \colon \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ *ein surjektiver Homomorphismus. Dann gilt:* $f(\mathfrak{a}^{(k)}) = \mathfrak{b}^{(k)}$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$*. Ist* $\mathfrak{a}$ *auflösbar, sind insbesondere alle homomorphen Bilder von* $\mathfrak{a}$ *auflösbar.*

Beweis: Für $k = 0$ ist die Aussage trivial. Per Induktion nach k erhält man:

$$f(\mathfrak{a}^{(k+1)}) = f([\mathfrak{a}^{(k)}, \mathfrak{a}^{(k)}]) = [f(\mathfrak{a}^{(k)}), f(\mathfrak{a}^{(k)})] = [\mathfrak{b}^{(k)}, \mathfrak{b}^{(k)}] = \mathfrak{b}^{(k+1)}. \qquad \blacksquare$$

Ist $\mathfrak{a}$ eine Lie-Algebra und $\mathfrak{i}$ ein Ideal in $\mathfrak{a}$, so wird der Quotientenvektorraum $\mathfrak{a}/\mathfrak{i}$ zu einer Lie-Algebra, wenn man die Multiplikation gemäß $[a+\mathfrak{i}, b+\mathfrak{i}] := [a, b]+\mathfrak{i}$ (wohldefiniert!) erklärt. Die Quotientenabbildung

$$\begin{aligned} q \colon \mathfrak{a} &\to {}^{\mathfrak{a}}\!/_{\mathfrak{i}} \\ a &\mapsto a + \mathfrak{i} \end{aligned}$$

ist ein surjektiver (Liealgebren-)Homomorphismus.

Satz 2.4: *Seien* $\mathfrak{a}$ *eine Lie-Algebra und* $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{a}$ *ein Ideal in* $\mathfrak{a}$*. Genau dann ist* $\mathfrak{a}$ *auflösbar, wenn* $\mathfrak{i}$ *und* $\mathfrak{a}/\mathfrak{i}$ *auflösbar sind.*

Beweis: Die Richtung „$\Rightarrow$“ ist wegen Satz 2.3 klar. Für die Rückrichtung „$\Leftarrow$“ nehmen wir an, daß $\mathfrak{i}^{(j)} = \{0\}$ und $(\mathfrak{a}/\mathfrak{i})^{(k)} = \{0\}$ sind. Bezeichnet man den Quotientenhomomorphismus $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}/\mathfrak{i}$ mit q, so gilt also gemäß Satz 2.3:

$$\{0\} = q(\mathfrak{a})^{(k)} = q(\mathfrak{a}^{(k)}).$$

Somit ist $\mathfrak{a}^{(k)} \subset \mathfrak{i}$ und daher: $\mathfrak{a}^{(k+j)} = (\mathfrak{a}^{(k)})^{(j)} \subset \mathfrak{i}^{(j)} = \{0\}$. $\blacksquare$

Eine Folgerung dieses Satzes ist, daß mit zwei auflösbaren Idealen $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ in $\mathfrak{a}$ auch stets die Summe $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ auflösbar ist, es gilt nämlich: $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}$ ist auflösbar, daher auch $\mathfrak{i}/(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}) \simeq (\mathfrak{i} + \mathfrak{j})/\mathfrak{j}$ (Isomorphiesatz), und somit ist $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$ auflösbar.

Folglich gibt es in jeder Lie-Algebra ein größtes auflösbares Ideal, man erhält es durch Summation aller auflösbaren Ideale. Das führt zur

Definition: *Das* ***Radikal*** *von* $\mathfrak{a}$ *ist das größte auflösbare Ideal in* $\mathfrak{a}$*, und* $\mathfrak{a}$ *heißt* ***halbeinfach****, falls das Radikal von* $\mathfrak{a}$ *gleich* $\{0\}$ *ist.*

*Alle $\mathfrak{i}^{(j)}$ sind Ideale in $\mathfrak{a}$ (und in jedem $\mathfrak{i}^{(k)}$ mit $k \leq j$), weil Kommutatoren von Idealen wieder Ideale sind, vgl. ($*$) auf Seite 15.

Eine einfache Lie-Algebra $\mathfrak{a}$ ist halbeinfach: Weil $\{0\}$ und $\mathfrak{a}$ die einzigen Ideale von $\mathfrak{a}$ sind und $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \{0\}$ ausgeschlossen ist, gilt: $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{a}$; also ist $\mathfrak{a}$ nicht auflösbar und $\{0\}$ das Radikal von $\mathfrak{a}$, das heißt, $\mathfrak{a}$ ist halbeinfach.

Allgemein wird sich für halbeinfache Lie-Algebren im weiteren zeigen: $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{a}$ (siehe Satz 2.23).

Für eine halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{a}$ ist $Z(\mathfrak{a}) = \{0\}$, denn das Zentrum ist ein auflösbares Ideal: $[Z(\mathfrak{a}), Z(\mathfrak{a})] \subset [Z(\mathfrak{a}), \mathfrak{a}] = \{0\}$. Folglich ist die adjungierte Darstellung einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{a}$ treu, denn $\operatorname{Ker} \operatorname{ad} = Z(\mathfrak{a})$.

Lemma 2.5: *Seien $V \neq 0$ ein komplexer Vektorraum, $\mathfrak{a}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$ und $\mathfrak{i}$ ein Ideal in $\mathfrak{a}$. Es gebe einen gemeinsamen Eigenvektor für alle Endomorphismen in $\mathfrak{i}$: $v \in V \setminus \{0\}$ mit $\mathfrak{i}v \subset \mathbb{C}v$.*

Sei $\xi \in \mathfrak{i}$ ein beliebiger dieser Endomorphismen mit der Eigenwertgleichung $\xi(v) = \lambda v; \lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt für alle $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathfrak{a}$:

$$\xi\alpha_1 \cdots \alpha_k v = \lambda\alpha_1 \cdots \alpha_k v.$$

Mit anderen Worten ist $\xi\big|_W = \lambda \cdot \mathrm{id}_W$ auf dem $\mathfrak{a}$-invarianten Unterverktorraum $W := \left\{\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_k v \;\middle|\; \alpha_j \in \mathfrak{a}; k \in \mathbb{N}\right\} \subset V$.

Beweis: Sei $\varphi \in \mathfrak{a}$. Für alle $j \in \mathbb{N}$ sei V_j der von $\{v, \varphi(v), \dots, \varphi^{j-1}(v)\}$ aufgespannte (komplexe) Untervektorraum von V (also $V_0 = \{0\}$, $V_1 = \mathbb{C}v$, …). Sei m die größte ganze Zahl, so daß das System $\{v, \varphi(v), \dots, \varphi^{m-1}(v)\}$ (komplex) linear unabhängig ist, dann gilt: $V_m = V_{m+j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $\dim_{\mathbb{C}} V_m = m$.

Jedem $\xi \in \mathfrak{i}$ ordnen wir nun einen Eigenwert $\lambda(\xi) \in \mathbb{C}$ zu, so daß die jeweilige Eigenwertgleichung sich als $\xi(v) = \lambda(\xi) \cdot v$ schreibt, dabei ist $\lambda\colon \mathfrak{i} \to \mathbb{C}$ linear.

Behauptung: Für alle $\xi \in \mathfrak{i}$ gilt:

$$\xi \circ \varphi^j(v) \equiv \lambda(\xi) \cdot \varphi^j(v) \pmod{V_j}.$$

Beweis: (per Induktion nach j) Für $j = 0$ ist die Behauptung wegen $V_0 = \{0\}$ gerade die Voraussetzung $\xi(v) = \lambda(\xi) \cdot v$. Für $j \in \mathbb{N}, j \geq 1$ hat man:

$$\xi \circ \varphi^j(v) = \varphi \circ \xi \circ \varphi^{j-1}(v) - [\varphi, \xi] \circ \varphi^{j-1}(v). \qquad (\star)$$

Weil $\mathfrak{i}$ ein Ideal ist, ist mit $\xi \in \mathfrak{i}$ auch $[\varphi, \xi] \in \mathfrak{i}$, die Induktionsvoraussetzung gibt daher mit geeigneten $w, \tilde{w} \in V_{j-1}$:

$$\xi \circ \varphi^{j-1}(v) = \lambda(\xi) \cdot \varphi^{j-1}(v) + w;$$
$$[\varphi, \xi] \circ \varphi^{j-1}(v) = \lambda([\varphi, \xi]) \cdot \varphi^{j-1}(v) + \tilde{w}.$$

Also folgt für ($\star$):

$$\xi \circ \varphi^j(v) = \lambda(\xi) \cdot \varphi^j(v) + \varphi(w) - \lambda([\varphi, \xi]) \cdot \varphi^{j-1}(v) - \tilde{w},$$

und das liefert wegen $\varphi(w) \in V_j$ und $\lambda([\varphi, \xi]) \cdot \varphi^{j-1}(v) + \tilde{w} \in V_{j-1} \subset V_j$ die Behauptung. □

Es gilt: $\{0\} = V_0 \subsetneqq V_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq V_m = V_{m+1} = \ldots$, und jedes V_j wird von allen $\xi \in \mathfrak{i}$ invariant gelassen: Die Invarianz von V_0 ist klar, sei V_j also $\mathfrak{i}$-stabil, und sei $v_{j+1} = \alpha \cdot \varphi^j(v) + v_j \in V_{j+1}$ mit passend gewähltem $v_j \in V_j$. Dann liefert die eben bewiesene Behauptung für $\xi \in \mathfrak{i}$:

$$\begin{aligned} &\xi(v_{j+1}) \equiv \lambda(\xi) \cdot \alpha \cdot \varphi^j(v) + \xi(v_j) \pmod{V_{j+1}} \\ \Longrightarrow\ &\xi(v_{j+1}) \in V_{j+1} \text{ wegen } \xi(v_j) \in V_j \subset V_{j+1} \text{ und } \varphi^j(v) \in V_{j+1}. \end{aligned}$$

Insbesondere kann man ξ in V_m bezüglich der Basis $\{v, \varphi(v), \ldots, \varphi^{m-1}(v)\}$ als obere Dreiecksmatrix schreiben, deren Diagonaleinträge $\lambda(\xi)$ lauten. Daher ist in V_m: $\operatorname{spur} \xi = m\lambda(\xi)$. Speziell für $[\varphi, \xi] \in \mathfrak{i}$ ist: $m\lambda([\varphi, \xi]) = \operatorname{spur}[\varphi, \xi] = 0$, also gibt ($\star$):

$$\xi \circ \varphi(v) = \lambda(\xi) \cdot \varphi(v) - \lambda([\varphi, \xi]) \cdot v = \lambda(\xi) \cdot \varphi(v).$$

Jetzt können wir die Aussage des Lemmas durch Induktion nach k zeigen. Für $k = 0$ ist nichts zu zeigen, der Fall $k = 1$ ist mit der obigen Vorüberlegung abgearbeitet. Für $k > 1$ seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathfrak{a}$. Ist $\alpha_2 \circ \cdots \circ \alpha_k(v) = 0$, so gilt auf jeden Fall: $\xi \circ \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_k(v) = \lambda \cdot \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_k(v)$. Für $w := \alpha_2 \circ \cdots \circ \alpha_k(v) \neq 0$ gibt die Induktionsvoraussetzung: $\xi \circ \alpha_2 \circ \cdots \circ \alpha_k(v) = \lambda \cdot \alpha_2 \circ \cdots \circ \alpha_k(v)$ und daher wie für $k = 1$:

$$\xi \circ \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_k(v) = \xi \circ \alpha_1(w) = \lambda(\xi) \cdot \alpha_1(w) = \lambda \cdot \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_k(v). \qquad \blacksquare$$

Satz 2.6 (Lie)**:** *Seien $V \neq 0$ ein komplexer Vektorraum und $\mathfrak{a}$ eine auflösbare Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Dann gibt es einen gemeinsamen Eigenvektor für alle Endomorphismen in $\mathfrak{a}$, das heißt, ein $v \in V \setminus \{0\}$ mit $\mathfrak{a}v \subset \mathbb{C}v$.*

Beweis: (Induktion über $n := \dim \mathfrak{a}$) Die Fälle $n = 0$ und $n = 1$ sind klar. Sei nun $n \geq 2$ und die Behauptung richtig für Dimensionen $1, \ldots, n-1$.

Weil $\mathfrak{a}$ auflösbar ist, gilt: $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}^{(1)} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$, insbesondere $\dim \mathfrak{a}^{(1)} \leq n - 1$. Jeder Untervektorraum $\mathfrak{u}$ von $\mathfrak{a}$ mit $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{u}$ ist bereits ein Ideal in $\mathfrak{a}$, denn es gilt: $[\mathfrak{a}, \mathfrak{u}] \subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{u}$. Es gibt daher ein Ideal $\mathfrak{u}$ in $\mathfrak{a}$ mit $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{u}$ und $\dim \mathfrak{u} = n - 1$, dieses $\mathfrak{u}$ ist offensichtlich auflösbar.

Dann läßt sich die Algebra $\mathfrak{a}$ schreiben als $\mathfrak{a} = \mathfrak{u} + \mathbb{C}\alpha$ mit einem geeigneten $\alpha \in \mathfrak{a}$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein $u \in V \setminus \{0\}$ mit $\mathfrak{u}u \subset \mathbb{C}u$. Zu jedem $\xi \in \mathfrak{u}$ hat man also ein $\lambda(\xi) \in \mathbb{C}$ mit $\xi(u) = \lambda(\xi) \cdot u$, wobei $\lambda \colon \mathfrak{u} \to \mathbb{C}$ linear ist.

Sei W der von den $\alpha^j(u); j \in \mathbb{N}$ erzeugte Untervektorraum von V, es gilt: $\alpha W \subset W$ und $0 \neq u \in W$. Gemäß Lemma 2.5 ist $\xi\big|_W = \lambda(\xi) \cdot \mathrm{id}_W$. Wegen $\alpha W \subset W$ gibt es ein $v \in W \setminus \{0\}$ mit $\alpha(v) \in \mathbb{C}v$. Dann ist $\mathfrak{a}v = (\mathfrak{u} + \mathbb{C}\alpha)v \subset \mathbb{C}v$. $\blacksquare$

Bemerkung: Man kann den Satz von Lie auch so formulieren: $\mathfrak{a}$ stabilisiert eine Fahne in V bzw. bezüglich einer geeigneten Basis sind die Matrizen von $\mathfrak{a}$ obere Dreiecksmatrizen.

Definition: *Sei $\mathfrak{a}$ eine Lie-Algebra. Ein Ideal $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{a}$ (insbesondere $\mathfrak{a}$ selbst) heißt* ***nilpotent****, falls die absteigende zentrale Sequenz $\mathfrak{i} =: \mathfrak{i}^0 \supset \mathfrak{i}^1 \supset \mathfrak{i}^2 \supset \ldots$ mit $\mathfrak{i}^{j+1} := [\mathfrak{i}, \mathfrak{i}^j]$ bei einem $\mathfrak{i}^k = \{0\}$ abbricht.*

Ist ein Ideal $\mathfrak{i}$ nilpotent, so ist es bereits auflösbar, es gilt nämlich die Beziehung: $\mathfrak{i}^{(j)} \subset \mathfrak{i}^j$ für alle $j \in \mathbb{N}$; dabei sind $\mathfrak{i}^{(0)} = \mathfrak{i} = \mathfrak{i}^0$ und $\mathfrak{i}^{(1)} = [\mathfrak{i}, \mathfrak{i}] = \mathfrak{i}^1$ trivial, und per Induktion schließt man: $\mathfrak{i}^{(j+1)} = [\mathfrak{i}^{(j)}, \mathfrak{i}^{(j)}] \subset [\mathfrak{i}^j, \mathfrak{i}^j] \subset [\mathfrak{i}, \mathfrak{i}^j] = \mathfrak{i}^{j+1}$.

Ist $\mathfrak{a}$ eine nilpotente Lie-Algebra, so sind auch alle Unteralgebren $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ nilpotent, denn man hat für alle $j \in \mathbb{N}$: $\mathfrak{b}^j \subset \mathfrak{a}^j$.

Lemma 2.7: *Sei $\mathfrak{a}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$, bestehend aus nilpotenten Endomorphismen φ (d. h. $\varphi^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$). Ist $V \neq 0$, so gibt es ein $v \in V$, $v \neq 0$, mit $a(v) = 0$ für alle $a \in \mathfrak{a}$.*

Beweis: Für $\dim \mathfrak{a} = 0$ ist die Aussage trivial. Für $\dim \mathfrak{a} = 1$ ist $\mathfrak{a} = \mathbb{K}a$ mit nilpotentem a, man hat also: $a^{k+1} = 0$ und $a^k \neq 0$. Jedes $v \in a^k V \supsetneqq \{0\}$ erfüllt dann $a(v) = 0$. Für $\dim \mathfrak{a} = n > 1$ kann man per Induktion schließen:

Sei $\mathfrak{u} \subsetneqq \mathfrak{a}$ eine echte Unteralgebra maximaler Dimension. Wegen $(\operatorname{ad} \mathfrak{u})\mathfrak{u} \subset \mathfrak{u}$ gibt es eine Darstellung ϱ von $\mathfrak{u}$ auf $\mathfrak{a}/\mathfrak{u}$ per $\varrho(u)(a + \mathfrak{u}) = [u, a] + \mathfrak{u}$ für $u \in \mathfrak{u}$, $a \in \mathfrak{a}$. Jedes $\varrho(u)$ ist nilpotent. Außerdem gilt: $\dim \varrho(\mathfrak{u}) \leq \dim \mathfrak{u} < n$; nach Induktionsvoraussetzung gibt es also ein $u_0 + \mathfrak{u} \neq \mathfrak{u}$ in $\mathfrak{a}/\mathfrak{u}$ mit $\varrho(\mathfrak{u})(u_0 + \mathfrak{u}) = \mathfrak{u}$. Das heißt, daß $u_0 \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{u}$ ist mit $[\mathfrak{u}, u_0] \subset \mathfrak{u}$. Daher ist $\mathbb{K}u_0 \oplus \mathfrak{u}$ eine Unteralgebra von $\mathfrak{a}$, die $\mathfrak{u}$ echt enthält. Wegen der maximalen Dimension von $\mathfrak{u}$ muß $\mathfrak{a} = \mathbb{K}u_0 \oplus \mathfrak{u}$ sein und gleichzeitig $\mathfrak{u}$ ein Ideal in $\mathfrak{a}$.

Sei $W := \{v \in V \mid \forall u \in \mathfrak{u} \colon u(v) = 0\}$, nach Induktionsvoraussetzung gilt hier $W \neq \{0\}$. Weil $\mathfrak{u}$ ein Ideal ist, ist W ein $\mathfrak{a}$-invarianter Untervektorraum von V: Seien $a \in \mathfrak{a}$ und $w \in W$; für beliebige $u \in \mathfrak{u}$ ist dann $[a, u] \in \mathfrak{u}$ und $u(w) = 0$, deswegen folgt: $u(a(w)) = a(u(w)) - [a, u](w) = 0$, also $a(w) \in W$. Wir wählen nun $v \in W \setminus \{0\}$ mit $u_0(v) = 0$, dann gilt wie verlangt: $a(v) = 0$ für alle $a = k \cdot u_0 + u \in \mathfrak{a}$. ■

Satz 2.8 (Engel)**:** *Sei $\mathfrak{a}$ eine Lie-Algebra. Ist $\operatorname{ad} x$ nilpotent für alle $x \in \mathfrak{a}$, so ist $\mathfrak{a}$ eine nilpotente Lie-Algebra.*

Beweis: Für $\mathfrak{a} = \{0\}$ ist nichts zu zeigen, sei also $\mathfrak{a} \neq \{0\}$. Die Lie-Algebra $\operatorname{ad} \mathfrak{a} = \{\operatorname{ad} a \mid a \in \mathfrak{a}\} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{a})$ erfüllt die Voraussetzungen des vorigen Lemmas. Es gibt also ein $x \in \mathfrak{a}$, $x \neq 0$ mit $[b, x] = (\operatorname{ad} b)(x) = 0$ für alle $b \in \mathfrak{a}$, insbesondere ist $x \in Z(\mathfrak{a})$.

Folglich ist $\dim\big(\mathfrak{a}/Z(\mathfrak{a})\big) < \dim \mathfrak{a}$. Weil $\operatorname{ad} y$ auch für alle $y \in \mathfrak{a}/Z(\mathfrak{a})$ nilpotent ist, kann man mit Induktion nach der Dimension schließen, daß $\mathfrak{a}/Z(\mathfrak{a})$ nilpotent ist. Dann muß auch $\mathfrak{a}$ nilpotent sein. ■

2.1.2. Killing-Form und Cartansches Kriterium

Definition: *Sei $\mathfrak{a}$ eine Lie-Algebra über $\mathbb{K}$. Unter einer **symmetrischen Bilinearform** auf $\mathfrak{a}$ verstehen wir eine Abbildung $\phi\colon \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} \to \mathbb{K}$ mit den Eigenschaften $(a, b, c \in \mathfrak{a}; t \in \mathbb{K})$:*

$$\phi(a, b) = \phi(b, a); \qquad \phi(a + t \cdot b, c) = \phi(a, c) + t \cdot \phi(b, c).$$

*Man nennt ϕ **invariant**, wenn für alle $a, b, c \in \mathfrak{a}$ gilt: $\phi([a, b], c) = \phi(a, [b, c])$. Das **orthogonale Komplement** einer Unteralgebra $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{a}$ ist gegeben durch:*

$$\mathfrak{u}^\perp := \{a \in \mathfrak{a} \mid \forall u \in \mathfrak{u} \colon \phi(a, u) = 0\}.$$

*Falls $\mathfrak{a}^\perp = \{0\}$ ist, heißt ϕ **nichtentartet**.*

Bemerkung: Für eine invariante, symmetrische Bilinearform ϕ gilt: $\phi([a,b],c) = \phi(c,[a,b]) = \phi([c,a],b) = \phi(b,[c,a]) = -\phi(b,[a,c])$ für alle $a,b,c \in \mathfrak{a}$.

Ist dann $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{a}$ ein Ideal, so ist $\mathfrak{i}^\perp$ (und daher auch $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^\perp$ und $\mathfrak{i} + \mathfrak{i}^\perp$) ein Ideal in $\mathfrak{a}$. Es gilt nämlich für alle $a \in \mathfrak{a}$ und alle $j \in \mathfrak{i}^\perp$:

$$\forall i \in \mathfrak{i}\colon \phi([a,j],i) = -\phi(j,[a,i]) = 0, \text{ da } [a,i] \in [\mathfrak{a},\mathfrak{i}] \subset \mathfrak{i};$$

also ist $[\mathfrak{a},\mathfrak{i}^\perp] \subset \mathfrak{i}^\perp$.

Definition: *Die* ***Killing-Form*** B_{ad} *einer Lie-Algebra* $\mathfrak{a}$ *ist gegeben durch:*

$$B_{\mathrm{ad}}(x,y) := \operatorname{spur}\bigl(\operatorname{ad}(x) \circ \operatorname{ad}(y)\bigr),$$

wobei $\operatorname{ad}\colon \mathfrak{a} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{a})$ *die adjungierte Darstellung ist.*

Die Killing-Form ist offensichtlich eine symmetrische Bilinearform. Sie ist invariant, es gilt nämlich unter Ausnutzung von $\operatorname{spur} AB = \operatorname{spur} BA$:

$$\begin{aligned}
B_{\mathrm{ad}}([x,y],z) &= \operatorname{spur}\bigl(\operatorname{ad}([x,y])\operatorname{ad}(z)\bigr) \quad \text{(nach Definition)}\\
&= \operatorname{spur}\bigl([\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} y]\operatorname{ad} z\bigr) \quad \text{(ad ist Darstellung)}\\
&= \operatorname{spur}\bigl(\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y)\operatorname{ad}(z)\bigr) - \operatorname{spur}\bigl(\operatorname{ad}(y)\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(z)\bigr)\\
&= \operatorname{spur}\bigl(\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(y)\operatorname{ad}(z)\bigr) - \operatorname{spur}\bigl(\operatorname{ad}(x)\operatorname{ad}(z)\operatorname{ad}(y)\bigr)\\
&= B_{\mathrm{ad}}(x,[y,z]).
\end{aligned}$$

Lemma 2.9: *Sei* $\mathfrak{i}$ *ein Ideal einer Lie-Algebra* $\mathfrak{a}$. *Die Killing-Form* $\widetilde{B}$ *von* $\mathfrak{i}$ *stimmt dann mit der Einschränkung der Killing-Form* B_{ad} *von* $\mathfrak{a}$ *auf* $\mathfrak{i}$ *überein:* $\widetilde{B} = B_{\mathrm{ad}}\big|_{\mathfrak{i}\times\mathfrak{i}}$.

Beweis: Sei $\{a_1,\dots,a_m\}$ eine Basis von $\mathfrak{i}$, die zu einer Basis $\{a_1,\dots,a_m,\dots,a_n\}$ von $\mathfrak{a}$ ergänzt werde. Für jedes $x \in \mathfrak{a}$ können wir dann den Endomorphismus $\operatorname{ad} x \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{a})$ durch eine Matrix $M_x = (m^x_{ij})$ beschreiben: $(\operatorname{ad} x)(a_j) = \sum_{i=1}^n m^x_{ij} a_i$. Speziell für $x \in \mathfrak{i}$ haben wir $a^x_{ij} = 0$ für alle $i > m$, weil $\mathfrak{i}$ ein Ideal ist. Daher folgt für $x,y \in \mathfrak{i}$:

$$B_{\mathrm{ad}}(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a^x_{ij} a^y_{ji} = \sum_{i,j=1}^{m} a^x_{ij} a^y_{ji} = \widetilde{B}(x,y). \qquad \blacksquare$$

Des weiteren ist die Killing-Form B_{ad} von $\mathfrak{a}$ nicht entartet, wenn $\mathfrak{a}$ halbeinfach ist: Die Killing-Form des Ideals $\mathfrak{a}^\perp$ ist nach Lemma 2.9 die Einschränkung von B_{ad} auf $\mathfrak{a}^\perp$. Nun hat man: $\forall x,y \in \mathfrak{a}^\perp\colon B_{\mathrm{ad}}(x,y) = 0$, daraus folgt mit dem Cartanschen Kriterium (Satz 2.11 unten), daß $\mathfrak{a}^\perp$ auflösbar und somit im Radikal von $\mathfrak{a}$ enthalten ist; wenn $\mathfrak{a}$ halbeinfach ist, gilt folglich: $\mathfrak{a}^\perp = \{0\}$.

Für das Cartansche Kriterium benötigen wir das

Lemma 2.10: *Seien* $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{gl}(V)$, $M := \bigl\{x \in \mathfrak{gl}(V) \bigm| [x,\mathfrak{a}] \subset [\mathfrak{a},\mathfrak{a}]\bigr\}$. *Jedes* $x \in M$, *das* $\operatorname{spur}(xy) = 0$ *für alle* $y \in M$ *erfüllt, ist nilpotent.*

Beweis: Sei $x \in M$ mit $\operatorname{spur}(xy) = 0$ für alle $y \in M$. Sei $x = s + n$ die Jordanzerlegung von x, wobei n den nilpotenten Anteil bezeichne, und sei $\{e_1,\dots,e_m\}$ eine Basis von V, in der s diagonal wird: $se_j = \lambda_j e_j$ ($\lambda_j \in \mathbb{C}$). Sei weiter

$W \subset \mathbb{C}$ der von den Eigenwerten λ_j aufgespannte $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Zu zeigen ist, daß $W = \{0\}$ ist. Weil der Dualraum W^* isomorph zu W ist, kann man stattdessen auch $W^* = \{0\}$ zeigen.

Sei also $f\colon W \to \mathbb{Q}$ eine Linearform. Sei $g \in \mathfrak{gl}(V)$ so, daß $ge_j = f(\lambda_j)e_j$. Bezüglich der kanonischen Basis $\{E_{ij}\}$ von $\mathfrak{gl}(V)$ mit $E_{ij}e_k = \delta_{jk}e_i$ hat man:

$$(\operatorname{ad} s)E_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}; \qquad (\operatorname{ad} g)E_{ij} = \big(f(\lambda_i) - f(\lambda_j)\big)E_{ij}.$$

Zu den endlich vielen Differenzen $f(\lambda_i)-f(\lambda_j) = f(\lambda_i-\lambda_j)$ gibt es ein (Lagrange-) Polynom $p \in \mathbb{C}[x]$ ohne konstanten Term, so daß: $p(\lambda_i - \lambda_j) = f(\lambda_i) - f(\lambda_j)$ ist.

Dann ist $\operatorname{ad} g = p(\operatorname{ad} s)$, und $\operatorname{ad} s$ kann als Polynom in $\operatorname{ad} x$ ohne konstanten Term geschrieben werden. Folglich ist auch $\operatorname{ad} g$ ein Polynom in $\operatorname{ad} x$ ohne konstanten Term. Weil $x \in M$ angenommen wurde, gilt: $(\operatorname{ad} x)\mathfrak{a} \subset [\mathfrak{a},\mathfrak{a}]$ und daher auch: $(\operatorname{ad} g)\mathfrak{a} \subset [\mathfrak{a},\mathfrak{a}]$. Nach Voraussetzung ist $0 = \operatorname{spur}(xg) = \sum \lambda_j f(\lambda_j)$, durch Anwenden von f folgt: $0 = \sum f(\lambda_j)^2$. Weil alle $f(\lambda_j) \in \mathbb{Q}$ sind, müssen sie zwangsläufig verschwinden. Damit ist auch $f \equiv 0$ und somit $W^* = \{0\}$. ■

Satz 2.11 (Cartansches Kriterium)**:** *Sei $\mathfrak{a}$ eine Lie-Algebra über $\mathbb{C}$ mit der Killing-Form $B(x,y) = \operatorname{spur}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y)$. Ist $B \equiv 0$ auf $\mathfrak{a}^{(1)} = [\mathfrak{a},\mathfrak{a}]$, so ist $\mathfrak{a}$ auflösbar.*

Beweis: Weil $\operatorname{Ker}\operatorname{ad} = Z(\mathfrak{a})$ stets auflösbar ist und allgemein $\operatorname{ad}\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{a}/\operatorname{Ker}\operatorname{ad}$ gilt, folgt die Auflösbarkeit von $\mathfrak{a}$ gemäß Satz 2.4 aus der Auflösbarkeit von $\operatorname{ad}\mathfrak{a}$. Man kann also o. B. d. A. $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{gl}(V)$ und $\operatorname{spur}(xy) = 0$ für alle $x, y \in [\mathfrak{a},\mathfrak{a}]$ voraussetzen.

Jede nilpotente Lie-Algebra ist auflösbar (vgl. oben). Es genügt daher nachzuweisen, daß $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}]$ nilpotent ist, und hierfür nach dem Satz 2.8 von Engel, daß $\operatorname{ad} x$ nilpotent ist für alle $x \in [\mathfrak{a},\mathfrak{a}]$.

Für $[x,y] \in [\mathfrak{a},\mathfrak{a}]$ und $z \in M$ wie im Lemma 2.10 können wir umformen: $\operatorname{spur}([x,y]z) = \operatorname{spur}(x[y,z]) = \operatorname{spur}([y,z]x)$. Nach Definition von M haben wir $[y,z] \in [\mathfrak{a},\mathfrak{a}]$ und daher nach Voraussetzung: $\operatorname{spur}([x,y]z) = 0$. Weil x, y, z beliebig gewählt waren, gilt somit $\operatorname{spur}(ab) = 0$ für alle $a \in [\mathfrak{a},\mathfrak{a}]$ und alle $b \in M$.

Das Lemma 2.10 liefert nun die Nilpotenz von $\operatorname{ad} x$ und damit von $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}]$. ■

2.1.3. Zerlegungssätze

Satz 2.12 (E. Artin)**:** *Jede halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ hat eine bis auf die Reihenfolge eindeutige Zerlegung in einfache Ideale: $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_m$.*

Beweis: Sei $\mathfrak{i}$ ein einfaches Ideal in $\mathfrak{a}$. (Dazu genügt es, ein Ideal $\mathfrak{i} \neq \{0\}$ minimaler Dimension zu wählen.) Dann gilt natürlich: $[\mathfrak{i},\mathfrak{i}] = \mathfrak{i}$. Sei weiter $\mathfrak{i}^\perp$ das orthogonale Komplement von $\mathfrak{i}$ bezüglich der Killing-Form B_{ad}. Dann muß wegen der Minimalität von $\mathfrak{i}$ entweder $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^\perp = \{0\}$ oder $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^\perp = \mathfrak{i}$ (d. h. $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{i}^\perp$) gelten. Der letztere Fall kann nicht eintreten, denn dann wäre gemäß Definition von $\mathfrak{i}^\perp$: $B_{\text{ad}}\big|_{\mathfrak{i}\times\mathfrak{i}} \equiv 0$ (zur Einschränkung auf das Ideal $\mathfrak{i}$ siehe Lemma 2.9), und wegen $[\mathfrak{i},\mathfrak{i}] = \mathfrak{i}$ folgte für $a \in \mathfrak{a}$, $0 \neq i = [i_1, i_2] \in \mathfrak{i}$ mit $i_1, i_2 \in \mathfrak{i}$:

$$B_{\text{ad}}(i,a) = B_{\text{ad}}([i_1,i_2],a) = B_{\text{ad}}(i_1, \underbrace{[i_2,a]}_{\in\mathfrak{i}}) = 0.$$

Weil B_{ad} nicht entartet ist, erhielte man den Widerspruch: $0 \neq i \in \mathfrak{a}^\perp = \{0\}$ $\lightning$.

Daher gilt: $\mathfrak{a} = \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{i}^\perp$ mit einem einfachen Ideal $\mathfrak{i}$. Wegen $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^\perp = \{0\}$ ist $B_{\mathrm{ad}}\big|_{\mathfrak{i}^\perp \times \mathfrak{i}^\perp}$ auf $\mathfrak{i}^\perp$ nicht entartet. Als Ideal in $\mathfrak{a}$ ist $\mathfrak{i}^\perp$ eine halbeinfache Lie-Algebra, und die Killing-Form von $\mathfrak{i}^\perp$ stimmt mit $B_{\mathrm{ad}}\big|_{\mathfrak{i}^\perp \times \mathfrak{i}^\perp}$ überein (siehe Lemma 2.9). Außerdem ist $\dim \mathfrak{i}^\perp < \dim \mathfrak{a}$. Durch Induktion nach der Dimension folgt daher die behauptete Existenz der Zerlegung.

Seien nun $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_m = \mathfrak{b}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{b}_n$ zwei Zerlegungen in (minimale) Ideale. Dann ist $[\mathfrak{b}_j, \mathfrak{a}] = [\mathfrak{b}_j, \mathfrak{b}_j] \neq \{0\}$, es muß also ein $\mathfrak{a}_k$ geben mit $[\mathfrak{b}_j, \mathfrak{a}_k] \neq \{0\}$. Weil $\mathfrak{b}_j$ und $\mathfrak{a}_k$ minimale Ideale sind, ist $\mathfrak{b}_j = \mathfrak{a}_k$, die beiden Zerlegungen gehen daher durch Umsortieren auseinander hervor. ∎

Folgerung: Alle Ideale von $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_m$ erhält man durch Summation geeigneter $\mathfrak{a}_j$. Sei nämlich $\mathfrak{i}$ ein Ideal von $\mathfrak{a}$. Ist $\mathfrak{i} = \mathfrak{a}$, sind wir fertig. Anderenfalls gibt es ein $\mathfrak{a}_j \not\subset \mathfrak{i}$, und dann gilt: $[\mathfrak{i}, \mathfrak{a}_j] \subset \mathfrak{i} \cap \mathfrak{a}_j = \{0\}$. Daher liegt $\mathfrak{i}$ im Zentrum von $\mathfrak{a}_j$: $\mathfrak{i} \subset Z(\mathfrak{a}_j) = \bigoplus_{i \neq j} \mathfrak{a}_i$, und zwar sogar als Ideal. Folglich (z. B. per Induktion nach der Anzahl der direkten Summanden) ist $\mathfrak{i}$ die direkte Summe gewisser $\mathfrak{a}_i$.

Lemma 2.13: *Seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ Lie-Algebren und $f\colon \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ ein surjektiver Homomorphismus. Ist $\mathfrak{a}$ halbeinfach, so auch $\mathfrak{b}$.*

Beweis: Die Aussage ist klar für $\mathfrak{a} = \{0\}$. Für $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ kann man $\mathfrak{a}$ nach Satz 2.12 eindeutig in einfache Ideale zerlegen: $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$. Sei nun $\mathfrak{r}$ das Radikal von $\mathfrak{b}$. Dann ist $f^{-1}(\mathfrak{r})$ ein Ideal in $\mathfrak{a}$, also nach der Folgerung zu Satz 2.12 die Summe gewisser einfacher Ideale, etwa $f^{-1}(\mathfrak{r}) = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_k$. Wir haben somit: $\mathfrak{r} = f(\mathfrak{a}_1) \oplus \cdots \oplus f(\mathfrak{a}_k)$ und: $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] = f([\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_1]) \oplus \cdots \oplus f([\mathfrak{a}_k, \mathfrak{a}_k]) = \mathfrak{r}$. Da $\mathfrak{r}$ auflösbar ist, folgt: $\mathfrak{r} = \{0\}$. ∎

Satz 2.14: *Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Lie-Algebren und $\mathfrak{r}$ das Radikal von $\mathfrak{a}$. Sei $f\colon \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ ein surjektiver Homomorphismus. Es gilt:*

I: *$\mathfrak{a}/\mathfrak{r}$ ist halbeinfach;*

II: *$f(\mathfrak{r})$ ist das Radikal von $\mathfrak{b}$;*

III: *$\mathfrak{a}$ kann zerlegt werden in $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] + \mathfrak{r}$, insbesondere gilt für halbeinfache Lie-Algebren ($\mathfrak{r} = \{0\}$) stets $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$.*

Beweis: *ad* I: Mit q sei der Quotientenhomomorphismus $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}/\mathfrak{r}$ bezeichnet. Sei R das Radikal von $\mathfrak{a}/\mathfrak{r}$ und $S := q^{-1}(R)$. Sei $k \in \mathbb{N}$ so, daß $R^{(k)} = \{0\}$. Dann ist nach Satz 2.3: $\{0\} = q(S)^{(k)} = q(S^{(k)})$, das heißt: $S^{(k)} \subset \mathfrak{r}$, also S auflösbar. Somit gilt sogar: $S \subset \mathfrak{r}$ und damit: $R = q(S) = \{0\}$.

ad II: Zunächst ist $\mathfrak{a}/\mathfrak{r}$ nach I halbeinfach. Weil

$$\widetilde{f}\colon {}^{\mathfrak{a}}\!/_{\mathfrak{r}} \to {}^{\mathfrak{b}}\!/_{f(\mathfrak{r})}$$
$$a + \mathfrak{r} \mapsto f(a) + f(\mathfrak{r})$$

[wohldefiniert wegen $a + \mathfrak{r} = b + \mathfrak{r} \implies a - b \in \mathfrak{r} \implies f(a-b) \in f(\mathfrak{r}) \implies f(a) + f(\mathfrak{r}) = f(b) + f(\mathfrak{r})$] ein surjektiver Lie-Algebrenhomomorphismus ist, muß nach Lemma 2.13 auch $\mathfrak{b}/f(\mathfrak{r})$ halbeinfach sein. Hier liegt ein kommutatives Diagramm vor:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{a} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q_{\mathfrak{a}}"'] & \mathfrak{b} \arrow[d, "q_{\mathfrak{b}}"] \\ \mathfrak{a}/\mathfrak{r} \arrow[r, "\widetilde{f}"] & \mathfrak{b}/f(\mathfrak{r}). \end{tikzcd}$$

Weil nach Satz 2.3 alle $q_{\mathfrak{b}}$-Bilder von auflösbaren Idealen in $\mathfrak{b}$ auch auflösbar in $\mathfrak{b}/f(\mathfrak{r})$ sind und das Nullideal das einzige auflösbare Ideal in $\mathfrak{b}/f(\mathfrak{r})$ darstellt, folgt, daß für alle auflösbaren Ideale $\mathfrak{i} \subset \mathfrak{b}$ gilt: $\mathfrak{i} \subset \operatorname{Ker} q_{\mathfrak{b}} = f(\mathfrak{r})$. Das Radikal $\mathfrak{r}$ ist auflösbar, nach Satz 2.3 ist dann auch $f(\mathfrak{r})$ auflösbar, also stellt $f(\mathfrak{r})$ das Radikal von $\mathfrak{b}$ dar.

ad III: Auf jeden Fall gilt: $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}] + \mathfrak{r} \subset \mathfrak{a}$. Ist $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}] + \mathfrak{r}$ ein echtes Ideal in $\mathfrak{a}$, so gibt es ein $x \in \mathfrak{a} \setminus ([\mathfrak{a},\mathfrak{a}] + \mathfrak{r})$. Mit q sei der Quotientenhomomorphismus $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}/[\mathfrak{a},\mathfrak{a}]$ bezeichnet. Dann ist $x + [\mathfrak{a},\mathfrak{a}] \in q(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}/[\mathfrak{a},\mathfrak{a}]$, aber $x + [\mathfrak{a},\mathfrak{a}] \notin q(\mathfrak{r})$, das heißt: $q(\mathfrak{r}) \subsetneqq \mathfrak{a}/[\mathfrak{a},\mathfrak{a}]$.

Weil $\mathfrak{r}$ das Radikal von $\mathfrak{a}$ ist, ist nach II $q(\mathfrak{r})$ das Radikal von $\mathfrak{a}/[\mathfrak{a},\mathfrak{a}]$. Nun ist $\mathfrak{a}/[\mathfrak{a},\mathfrak{a}]$ jedoch abelsch und stimmt daher mit seinem Radikal überein – Widerspruch! Daher ist die Annahme $\exists x \in \mathfrak{a} \setminus ([\mathfrak{a},\mathfrak{a}] + \mathfrak{r})$ nicht gerechtfertigt, und es muß $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a},\mathfrak{a}] + \mathfrak{r}$ sein. ■

2.2. Komplexifizierung und kompakte reelle Formen

Definition: *Unter der **formalen Komplexifizierung** einer reellen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ verstehen wir das formale Tensorprodukt $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$. Das heißt, $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ haben eine gemeinsame Basis, die einmal über $\mathbb{R}$ und einmal über $\mathbb{C}$ betrachtet wird, es gilt: $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.*

*Man bezeichnet $\mathfrak{g}$ als **reelle Form** von $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, allgemein heißt jede reelle Lie-Unteralgebra einer komplexen Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ eine reelle Form, falls ihre formale Komplexifizierung wieder $\mathfrak{h}$ liefert.*

*Eine **reelle Struktur** von $\mathfrak{h}$ ist ein Automorphismus $\tau\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$, der involutorisch ($\tau \circ \tau = \mathrm{id}$) und antilinear ($\tau(\lambda x + y) = \overline{\lambda}\tau(x) + \tau(y)$) ist.*

Im allgemeinen gibt es nicht nur eine reelle Form einer komplexen Lie-Algebra.

Eine komplexe Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ kann immer als reelle Lie-Algebra $\mathfrak{h}^{\mathbb{R}}$ der doppelten Dimension $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}^{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$ aufgefaßt werden. Man beachte, daß man auf diese Weise *keine* reelle Form erhält und weder $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}$ noch $(\mathfrak{h}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}$ gelten!

Jede reelle Form $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ liefert eine reelle Struktur auf $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus i\mathfrak{a}$, nämlich die komplexe Konjugation σ bezüglich $\mathfrak{a}$: $\sigma(r + is) = r - is$. Umgekehrt ist $\mathfrak{g}^{\tau} := \{a \in \mathfrak{g} \mid \tau(a) = a\}$ eine reelle Form von $\mathfrak{g}$, die zu der reellen Struktur τ gehört.

Satz 2.15: *Seien σ eine reelle Struktur auf einer komplexen Lie-Algebra $\mathfrak{a}$ und $\varphi \in \operatorname{Aut}\mathfrak{a}$. Dann ist auch $\varphi\sigma\varphi^{-1}$ eine reelle Struktur auf $\mathfrak{a}$, wobei gilt: $\mathfrak{a}^{\varphi\sigma\varphi^{-1}} = \varphi(\mathfrak{a}^{\sigma})$. Zwei reelle Formen $\mathfrak{a}^{\sigma}$ und $\mathfrak{a}^{\tau}$ sind isomorph, falls die reellen Strukturen $\tau = \varphi\sigma\varphi^{-1}$ erfüllen.*

Beweis: Es ist klar, daß zum einen $(\varphi\sigma\varphi^{-1}) \circ (\varphi\sigma\varphi^{-1}) = \mathrm{id}$ und zum anderen $(\varphi\sigma\varphi^{-1})(\lambda x + y) = \varphi\sigma\big(\lambda\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y)\big) = \overline{\lambda} \cdot (\varphi\sigma\varphi^{-1})(x) + (\varphi\sigma\varphi^{-1})(y)$ gelten, somit ist $\varphi\sigma\varphi^{-1}$ tatsächlich eine reelle Struktur. Des weiteren rechnet man $\mathfrak{a}^{\varphi\sigma\varphi^{-1}} = \varphi(\mathfrak{a}^{\sigma})$ leicht nach. Die letzte Aussage des Satzes ist nur eine Umformulierung. ■

Von der *formalen Komplexifizierung* einer reellen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ zu unterscheiden sind bereits auf $\mathfrak{g}$ vorhandene *komplexe Strukturen*, das heißt, lineare Abbildungen $I\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ mit $I^2 = -\mathrm{id}$ und $I[x,y] = [x, Iy]$. Man erhält dann zu $\mathfrak{g}$ eine komplexe Lie-Algebra $\tilde{\mathfrak{g}}$, indem man für $x \in \mathfrak{g}$ setzt: $(a+ib)x := ax + bIx$; es gilt: $\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}$ und: $\dim_{\mathbb{C}} \tilde{\mathfrak{g}} = \frac{1}{2}\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$.

Man kann beide Fälle kombinieren, wenn man festlegt, daß die Komplexifizierung einer beliebigen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ die kleinste komplexe Lie-Algebra sein soll, die $\mathfrak{g}$ enthält. Gibt es auf $\mathfrak{g}$ eine komplexe Struktur, so reproduziert man gerade $\tilde{\mathfrak{g}}$, und das andere Extrem ist die formale Komplexifizierung $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

Satz 2.16: *Sei $G \subset \mathrm{U}_n$ eine Lie-Untergruppe mit zugehöriger Lie-Algebra $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{u}_n$. Dann gibt es auf $\mathfrak{g}$ keine komplexe Struktur, man hat: $\mathfrak{g} \cap i\mathfrak{g} = \{0\}$. Komplexifizierung und formale Komplexifizierung stimmen also überein, es gilt:*

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g} \qquad \Longrightarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \dim_{\mathbb{R}} G.$$

Speziell hat man:

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_n^{\mathbb{C}} &= \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}E_n, & \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}_n &= \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = n^2; \\ \mathfrak{su}_n^{\mathbb{C}} &= \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \text{ halbeinfach}, & \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{su}_n &= \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = n^2 - 1; \\ \mathfrak{sp}_n^{\mathbb{C}} &= \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) \text{ halbeinfach}, & \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{sp}_n &= \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) = 2n^2 + n; \\ \big(\mathfrak{sp}_n \oplus \mathbb{R}\big)^{\mathbb{C}} &= \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}E_n. \end{aligned}$$

Beweis: Sei $A \in \mathfrak{u}_n \cap i\mathfrak{u}_n$, das heißt: $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $A^* = -A$ und $A^* = A$; es folgt: $A = -A$, wegen $\mathrm{char}(\mathfrak{u}_n) = 0$ also: $A = 0$. Wir haben somit: $\mathfrak{u}_n \cap i\mathfrak{u}_n = \{0\}$ und folglich für alle Lie-Unteralgebren $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{u}_n$: $\mathfrak{g} \cap i\mathfrak{g} = \{0\}$.

Sei nun $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n\times n}$. Wir setzen $B := \frac{1}{2}(A - A^*)$ und $C := \frac{1}{2i}(A + A^*)$, dann ist $B + iC = \frac{1}{2}(A - A^* + A + A^*) = A$ mit $B^* = -B$ und $C^* = -C$. Das bedeutet: $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \subset \mathfrak{u}_n + i\mathfrak{u}_n$, also ist tatsächlich: $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{u}_n \oplus i\mathfrak{u}_n$.

Damit erhält man auch die restlichen Formeln:

$$\begin{aligned} \mathfrak{su}_n^{\mathbb{C}} &= \big(\mathfrak{u}_n \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})\big) \oplus i\big(\mathfrak{u}_n \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})\big) = (\mathfrak{u}_n \oplus i\mathfrak{u}_n) \cap \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}); \\ \mathfrak{sp}_n^{\mathbb{C}} &= \big(\mathfrak{u}_{2n} \cap \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})\big) \oplus i\big(\mathfrak{u}_{2n} \cap \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})\big) = (\mathfrak{u}_{2n} \oplus i\mathfrak{u}_{2n}) \cap \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}). \end{aligned}$$ ■

Definition: *Eine Lie-Algebra $\mathfrak{a}$ heißt* ***kompakt****, falls es eine positiv definite, invariante, symmetrische Bilinearform auf $\mathfrak{a}$ gibt.*

Bemerkung: Jede Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ zu einer kompakten Lie-Gruppe G ist kompakt: Mit der adjungierten Darstellung Ad (siehe Seite 18) und dem Haarschen Integral (Vorgriff auf Seite 36) kann man definieren:

$$\begin{aligned} \phi\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\to \mathbb{R} \\ (a,b) &\mapsto \textstyle\int_G \langle (\mathrm{Ad}\, g)(a) | (\mathrm{Ad}\, g)(b) \rangle \, \mathrm{d}g \end{aligned}$$

und erhält so eine positiv definite, $\mathfrak{g}$-invariante, symmetrische Bilinearform.

Weiter kann man zeigen (vgl. z. B. Onischchik u. Vinberg, 1990, Kap. 5, § 1, 3°):

Satz 2.17: *Jede halbeinfache komplexe Lie-Algebra hat eine kompakte reelle Form.* ■

Beispielsweise haben die im obigen Satz 2.16 betrachteten Lie-Algebren $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ und $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C})$ die kompakten reellen Formen $\mathfrak{su}_n$ bzw. $\mathfrak{sp}_n$. Weiter ist $\mathfrak{u}_n$ kompakte reelle Form von $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ und $\mathfrak{sp}_n \oplus \mathbb{R}$ von $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}E_n$.

Definition: *Seien σ und τ zwei reelle Strukturen auf einer komplexen Lie-Algebra $\mathfrak{a}$. Die reellen Formen $\mathfrak{a}^\sigma$ und $\mathfrak{a}^\tau$ heißen* ***kompatibel****, falls $\sigma\tau = \tau\sigma$ gilt.*

Satz 2.18: *Äquivalent sind ($\theta := \sigma\tau \in \operatorname{Aut}\mathfrak{a}$):*
I: *$\mathfrak{a}^\sigma$ und $\mathfrak{a}^\tau$ sind kompatibel,*
II: *$\theta = \sigma\tau$ ist involutorisch,*
III: *$\sigma(\mathfrak{a}^\tau) = \mathfrak{a}^\tau$,*
IV: *$\tau(\mathfrak{a}^\sigma) = \mathfrak{a}^\sigma$.*
Insbesondere gilt: $\theta(\mathfrak{a}^\sigma) = \mathfrak{a}^\sigma$ und $\theta(\mathfrak{a}^\tau) = \mathfrak{a}^\tau$, und wir haben eine Zerlegung von $\mathfrak{a}^\sigma$ bzw. $\mathfrak{a}^\tau$ in Eigenräume von θ zu den Eigenwerten 1 bzw. -1:
$\mathfrak{a}^\sigma = \big(\mathfrak{a}^\sigma \cap \mathfrak{a}^\tau\big) \oplus \big(\mathfrak{a}^\sigma \cap (i\mathfrak{a}^\tau)\big)$ und $\mathfrak{a}^\tau = \big(\mathfrak{a}^\tau \cap \mathfrak{a}^\sigma\big) \oplus \big(\mathfrak{a}^\tau \cap (i\mathfrak{a}^\sigma)\big)$.

Beweis: I $\Leftrightarrow$ II ist offensichtlich. Für I $\Leftrightarrow$ III verwenden wir den Satz 2.15, danach ist $\theta(\mathfrak{a}^\tau) = \mathfrak{a}^\tau$ äquivalent zu $\theta\tau\theta^{-1} = \tau$. Mit $\theta\tau\theta^{-1} = \sigma\tau\tau\tau^{-1}\sigma^{-1} = \sigma\tau\sigma^{-1}$ und $\theta(\mathfrak{a}^\tau) = \sigma(\mathfrak{a}^\tau)$ folgt nun die Behauptung. Analog zeigt man I $\Leftrightarrow$ IV.

Es genügt, von den verbleibenden Aussagen die $\mathfrak{a}^\sigma$ betreffende zu zeigen. Weil τ eine reelle Struktur ist, gilt: $\mathfrak{a}^\sigma = \mathfrak{a}^\sigma \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{a}^\sigma \cap (\mathfrak{a}^\tau \oplus i\mathfrak{a}^\tau) = \big(\mathfrak{a}^\sigma \cap \mathfrak{a}^\tau\big) \oplus \big(\mathfrak{a}^\sigma \cap (i\mathfrak{a}^\tau)\big)$.

Für $x \in \mathfrak{a}^\sigma \cap \mathfrak{a}^\tau$ hat man: $\theta(x) = \sigma\tau(x) \overset{x\in\mathfrak{a}^\tau}{=} \sigma(x) \overset{x\in\mathfrak{a}^\sigma}{=} x$. Sei nun $x \in \mathfrak{a}^\sigma \cap (i\mathfrak{a}^\tau)$, das heißt: $x \in \mathfrak{a}^\sigma$ und $x = iy$ mit $y \in \mathfrak{a}^\tau$. Es folgt, falls I gilt:

$$\theta(x) \overset{\mathrm{I}}{=} \tau\sigma(x) \overset{x\in\mathfrak{a}^\sigma}{=} \tau(x) = \tau(iy) = -i\tau(y) \overset{y\in\mathfrak{a}^\tau}{=} -iy = -x. \qquad \blacksquare$$

Satz 2.19: *Sei $\mathfrak{a}$ eine halbeinfache komplexe Lie-Algebra. Jede reelle Form von $\mathfrak{a}$ ist kompatibel mit einer kompakten Form. Je zwei kompakte reelle Formen von $\mathfrak{a}$ sind zueinander konjugiert.*

Beweis: Sei $\mathfrak{u}$ eine kompakte reelle Form von $\mathfrak{a}$ mit reeller Struktur τ (also $\mathfrak{a}^\tau = \mathfrak{u}$). Sei σ eine weitere reelle Struktur auf $\mathfrak{a}$. Sei B die Killing-Form von $\mathfrak{a}$. Dann erhält man per $h_\tau(x,y) := -B(x,\tau(y))$ eine hermitesche Form auf $\mathfrak{a}$, die Linearität in der ersten Komponente ist nämlich klar, und es gilt:

$$\begin{aligned} h_\tau(y,x) &= -B\big(y,\tau(x)\big) = -B\big(\tau(x),y\big) \\ &= -B\big(\tau(x),\tau\circ\tau(y)\big) = -\overline{B\big(x,\tau(y)\big)} = \overline{h_\tau(x,y)}. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun $\sigma\circ\tau$ bzw. (kürzer geschrieben) $\sigma\tau$. Es gilt genau wie eben:

$$\begin{aligned} h_\tau(\sigma\tau(x),y) &= -B(\sigma\tau(x),\tau(y)) = -\overline{B(\tau(x),\sigma\tau(y))} \\ &= -B(x,\tau\sigma\tau(y)) = h_\tau(x,\sigma\tau(y)). \end{aligned}$$

Das heißt, daß $\sigma\tau$ selbstadjungiert bezüglich h_τ ist und somit $p := \sigma\tau\sigma\tau$ positiv definit. Weil die Exponentialabbildung den Raum aller selbstadjungierten Operatoren bijektiv auf die positiv definiten selbstadjungierten Operatoren abbildet, ist $p^t := \exp(t\log p)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert. Wir erhalten so eine Einparametergruppe positiv definiter selbstadjungierter Operatoren in $\operatorname{Aut}\mathfrak{a}$ mit $p^1 = p$.

Dabei gilt: $\sigma p^t\sigma = \tau p^t\tau = p^{-t}$, denn man hat zunächst $\sigma p\sigma = \tau p\tau = p^{-1}$ gemäß $\sigma p\sigma = \sigma\sigma\tau\sigma\tau\sigma = \tau\sigma\tau\sigma = p^{-1}$ und $\tau p\tau = \tau\sigma\tau\sigma\tau\tau = p^{-1}$; der allgemeine Fall ergibt sich aus $\sigma p^t\sigma = \sigma\exp(t\log p)\sigma = \exp(t\log(\sigma p\sigma))$ (ebenso mit τ).

Nun setzen wir: $\varphi := p^{1/4}$; dieser Automorphismus erfüllt

$$\sigma(\varphi\tau\varphi^{-1}) = (\varphi\tau\varphi^{-1})\sigma,$$

nämlich: $\sigma(\varphi\tau\varphi^{-1}) = \sigma p^{1/4}\tau p^{-1/4} = \sigma p^{1/4}\tau\tau p^{1/4}\tau = \sigma p^{1/2}\tau = \pm\sigma\sigma\tau\tau = \pm\,\mathrm{id} = \tau p^{-1/2}\sigma = p^{1/4}\tau p^{-1/4}\sigma = (\varphi\tau\varphi^{-1})\sigma$. Das bedeutet, daß $\mathfrak{a}^\sigma$ mit der komplexen reellen Form $\varphi(\mathfrak{u})$ kompatibel ist – das ist die erste Aussage des Satzes.

Insbesondere ist jede kompakte reelle Form kompatibel mit einer anderen, die zu $\mathfrak{u}$ konjugiert ist. Aus der Kompatibilität folgt bereits die Gleichheit und damit die zweite Aussage des Satzes: Seien nämlich σ, τ die reellen Strukturen der beiden kompatiblen kompakten reellen Formen und $\theta := \sigma\tau$. Weil die Killing-Form einer halbeinfachen, kompakten, reellen Lie-Algebra negativ definit ist (siehe unten), ist h_τ positiv definit, also: $B(\theta x, x) = B(x, \theta x) = B(x, \tau x) = -h_\tau(x,x) < 0$ für alle $x \in \mathfrak{a}^\sigma, x \neq 0$.

Für alle $x \in \mathfrak{a}^\sigma \cap i\mathfrak{a}^\tau$ gilt nach dem Satz 2.18: $\theta(x) = -x$, also haben wir, falls $x \neq 0$: $0 > B(\theta x, x) = B(-x, x) = -B(x,x) > 0$ ↯ im Widerspruch zur negativen Definitheit der Killing-Form B. Folglich ist $\mathfrak{a}^\sigma \cap i\mathfrak{a}^\tau = \{0\}$ und somit: $\theta(x) = x$ für alle $x \in \mathfrak{a}^\sigma$ sowie $\mathfrak{a}^\sigma = \mathfrak{a}^\sigma \cap \mathfrak{a}^\tau \subset \mathfrak{a}^\tau$. Durch Vertauschung der Rollen von σ und τ erhält man: $\theta(x) = x$ für alle $x \in \mathfrak{a}^\tau$ sowie $\mathfrak{a}^\tau \subset \mathfrak{a}^\sigma$; insgesamt gilt daher: $\theta = \mathrm{id}$ und $\mathfrak{a}^\sigma = \mathfrak{a}^\tau$.

Es bleibt noch die negative Definitheit der Killing-Form zu zeigen. Sei also $\mathfrak{a}$ eine kompakte, halbeinfache, reelle Lie-Algebra. Dann gibt es auf $\mathfrak{a}$ eine positiv definite, invariante, symmetrische Bilinearform ϕ. Bezüglich ϕ kann man eine Orthonormalbasis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ von $\mathfrak{a}$ finden. Die Invarianz von ϕ (nämlich $\phi([a,b],c) = -\phi(b,[a,c])$) bedeutet, daß $\mathrm{ad}\,a$ $(a \in \mathfrak{a})$ bezüglich ϕ durch eine schiefsymmetrische Matrix $A = -{}^tA$ beschrieben wird. Dann gilt für die Killing-Form: $B_{\mathrm{ad}}(a,a) = \mathrm{spur}\big(\mathrm{ad}(a) \circ \mathrm{ad}(a)\big) = \mathrm{spur}\,{}^tAA = -\,\mathrm{spur}\,A^2 \leq 0$, und aus $B_{\mathrm{ad}}(a,a) = 0$ folgt $A = 0$, daher $\mathrm{ad}\,a = 0$ und $a = 0$. ■

2.3. Reduzibilität und das Haarsche Integral

2.3.1. Reduzibilität

Definition: *Eine Darstellung (V, ϱ) einer Gruppe G (d. h.: $\varrho\colon G \mapsto \mathrm{GL}(V)$ Gruppenhomomorphismus) heißt* ***irreduzibel****, falls $\{0\}$ und V die einzigen $\varrho(G)$-invarianten Untervektorräume von V sind, und sonst* ***reduzibel****. Die Darstellung heißt* ***vollständig reduzibel****, falls es zu jedem $\varrho(G)$-invarianten Untervektorraum $W \subset V$ einen $\varrho(G)$-invarianten Untervektorraum $\widetilde{W}$ gibt mit $V = W \oplus \widetilde{W}$.*

Ist speziell $G \subset \mathrm{GL}(V)$, so liegt mit der Identität auf G eine natürliche Darstellung von G auf V vor. In diesem Fall wollen wir G selbst als irreduzibel, reduzibel bzw. vollständig reduzibel bezeichnen, wenn die besagte Darstellung die entsprechende Eigenschaft hat.

Eine Teilmenge $M \subset \mathfrak{gl}(V)$ heißt ***irreduzibel****, falls $\{0\}$ und V die einzigen M-invarianten Untervektorräume von V sind, und sonst* ***reduzibel****. M ist* ***vollständig reduzibel****, falls es zu jedem M-invarianten Untervektorraum $W \subset V$ einen M-invarianten Untervektorraum $\widetilde{W}$ gibt mit $V = W \oplus \widetilde{W}$.*

Eine Darstellung (V, ϱ) einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt ***irreduzibel****,* ***reduzibel*** *bzw.* ***vollständig reduzibel****, falls $\varrho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(V)$ die entsprechende Eigenschaft hat.*

Sei (V, ϱ) eine Darstellung einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Die Darstellung kann man als Aktion von $\mathfrak{g}$ auf V auffassen:

$$\mathfrak{g} \times V \to V; (g, v) \mapsto \varrho(g)(v)$$

mit den offensichtlichen Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \varrho(\alpha g + \beta h)(v) &= \alpha\varrho(g)(v) + \beta\varrho(h)(v), \\ \varrho(g)(\alpha v + \beta w) &= \alpha\varrho(g)(v) + \beta\varrho(g)(w), \\ \varrho([g, h])(v) &= \varrho(g) \circ \varrho(h)(v) - \varrho(h) \circ \varrho(g)(v). \end{aligned}$$

Einen Vektorraum V mit einer derartigen Aktion bezeichnet man als $\mathfrak{g}$-*Modul*. Ein $\mathfrak{g}$-Untermodul von V ist dann ein Untervektorraum, der die Struktur eines $\mathfrak{g}$-Moduls hat.

In Übertragung der obigen Definition nennt man einen $\mathfrak{g}$-Modul V *irreduzibel*, falls $\{0\}$ und V die einzigen $\mathfrak{g}$-Untermoduln von V sind, und sonst *reduzibel*. V heißt *vollständig reduzibel*, falls es zu jedem $\mathfrak{g}$-Untermodul W von V ein Komplement $\widetilde{W}$ gibt, also einen $\mathfrak{g}$-Untermodul $\widetilde{W}$, so daß: $V = W \oplus \widetilde{W}$ ist.

Lemma 2.20 (Schur)**:** I: *Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Sei $\Sigma \subset \mathfrak{gl}(V)$ irreduzibel. Falls $A \in \mathfrak{gl}(V)$ mit allen $B \in \Sigma$ vertauscht ($AB = BA$), gibt es ein $a \in \mathbb{C}$ mit $A = a\,\mathrm{id}_V$.*

II: *Seien $N \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ und $M \subset \mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$ irreduzible Mengen. Sei $S \in \mathbb{C}^{n\times m}$ so gewählt, daß $NS = SM$. Dann gilt: $S = 0$ oder $n = m$ und $\det S \neq 0$.*

Beweis: ad I: Sei a ein Eigenwert von A, dann gilt: $\det(A - a\,\mathrm{id}_V) = 0$ und somit: $U := (A - a)V \subsetneq V$. Andererseits hat man nach Voraussetzung für $B \in \Sigma$:

$$BU = B(A - a)V = (A - a)BV \subset (A - a)V = U,$$

U ist also ein Σ-invarianter Unterraum von V. Da Σ irreduzibel ist, muß daher $U = \{0\}$ sein, das heißt, $A = a \cdot \mathrm{id}_V$.

ad II: Es gilt: $N(S\mathbb{C}^m) = SM\mathbb{C}^m \subset S\mathbb{C}^m$. Da N irreduzibel ist, hat man entweder $S\mathbb{C}^m = \{0\}$, also $S = 0$, oder $S\mathbb{C}^m = \mathbb{C}^n$, also insbesondere S surjektiv und $m \geq n$. In diesem Fall gilt weiter: Sei $V = \mathrm{Ker}(S) = \{v \in \mathbb{C}^m \mid Sv = 0\}$, dann ist $SMV = NSV = \{0\}$, also $MV \subset V$, aber $V \neq \mathbb{C}^m$ wegen $S \neq 0$. Weil M irreduzibel ist, muß dann $V = \{0\}$ sein, das bedeutet, daß S injektiv ist und damit $m \leq n$ und $\det S \neq 0$ gelten. ∎

Ist (V, ϱ) eine treue Darstellung einer halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so gibt es zu ϱ ein $C \in \mathfrak{gl}(V)$ – bezeichnet als Casimir-Element –, das mit allen $\varrho(g)$, $g \in \mathfrak{g}$, kommutiert und $\mathrm{spur}\, C \neq 0$ hat. Nämlich:

Weil die Darstellung treu ist, ist die invariante, symmetrische Bilinearform $B(x, y) := \mathrm{spur}(\varrho(x), \varrho(y))$ nicht entartet (Beweis analog zum Beweis der Nichtentartung der Killing-Form mit dem Cartanschen Kriterium 2.11, die Killing-Form ist ein spezieller Fall mit $\varrho = \mathrm{ad}$). Ist $\{x_1, \ldots, x_n\}$ eine Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, so gibt es bezüglich B eine eindeutig bestimmte duale Basis $\{y_1, \ldots, y_n\}$, so daß

$B(x_i, y_j) = \delta_{ij}$ erfüllt ist. Man kann dann mit geeigneten $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbb{K}$ schreiben: $[x, x_i] = \sum_j \alpha_{ij} x_j$ und $[x, y_i] = \sum_j \beta_{ij} y_j$, wobei wegen der Invarianz von B gilt:

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} = \sum_k a_{ik} B(x_k, y_j) &= B([x, x_i], y_j) \\ &= -B(x_i, [x, y_j]) = -\sum_k \beta_{jk} B(x_i, y_k) = -\beta_{ji}.\end{aligned}$$

Das Casimir-Element zu ϱ ist nun gegeben durch: $C := \sum_j \varrho(x_j)\varrho(y_j) \in \mathfrak{gl}(V)$. Für alle $g \in \mathfrak{g}$ gilt wegen $\alpha_{ij} = -\beta_{ji}$:

$$\begin{aligned}[\varrho(g), C] &= \sum_i [\varrho(g), \varrho(x_i)]\varrho(y_i) + \sum_i \varrho(x_i)[\varrho(g), \varrho(y_i)] \\ &= \sum_{ij} \alpha_{ij} \varrho(x_j)\varrho(y_i) + \sum_j \beta_{ij} \varrho(x_i)\varrho(y_j) = 0,\end{aligned}$$

und man hat: $\operatorname{spur} C = \sum_j \operatorname{spur}(\varrho(x_j), \varrho(y_j)) = \sum_j B(x_j, y_j) = n = \dim \mathfrak{g} \neq 0$.

Damit können wir nun folgendes Lemma zeigen:

Lemma 2.21: *Seien $\mathfrak{g}$ eine halbeinfache Lie-Algebra, (V, ϱ) eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ mit $\dim V = n$ und $W \subset V$ ein Untervektorraum mit $\dim W = n-1$ und $\varrho(g)(V) \subset W$ für alle $g \in \mathfrak{g}$. Dann gibt es ein eindimensionales Komplement von W in V, das $\varrho(\mathfrak{g})$-stabil ist (genauer: $\varrho(\mathfrak{g})$ operiert darauf trivial).*

Beweis: Der Kern von $\varrho \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ ist wegen der Folgerung zum Satz 2.12 eine Summe gewisser einfacher Ideale von $\mathfrak{g}$. Sei $\mathfrak{h}$ die Summe der verbleibenden einfachen Ideale. Falls $\mathfrak{h} = \{0\}$ ist, ist die Aussage des Satzes trivial. Sei also $\mathfrak{h} \neq \{0\}$, dann ist $\mathfrak{h}$ halbeinfach und $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \operatorname{Ker} \varrho$ mit $\varrho(\mathfrak{g}) = \varrho(\mathfrak{h})$, so daß die Einschränkung von ϱ auf $\mathfrak{h}$ eine treue Darstellung ist. Es gibt daher nach der Vorüberlegung das Casimir-Element $C \in \mathfrak{gl}(V)$, das mit allen $\varrho(h); h \in \mathfrak{h}$ kommutiert.

Natürlich gilt auch $\varrho(h)(V) \subset W$ für alle $h \in \mathfrak{h}$, insbesondere $\varrho(h)(W) \subset W$. Wir nehmen nun zunächst an, daß diese Einschränkung $\varrho(\mathfrak{h})\big|_W$ auf eine Teilmenge von $\mathfrak{gl}(W)$ irreduzibel ist. Nach dem Schurschen Lemma 2.20.I operiert dann C als Skalar auf W: $C\big|_W = c \cdot \mathrm{id}_W$ mit $c \in \mathbb{C}$; hierbei muß $c \neq 0$ sein, denn sonst wäre $\operatorname{spur} C = 0$ auf V.

Weil C mit allen $\varrho(h); h \in \mathfrak{h}$ kommutiert, ist C ein $\mathfrak{h}$-Modul-Homomorphismus und insbesondere $\operatorname{Ker} C$ ein $\mathfrak{h}$-Untermodul von V. Es gilt: $C(V) \subset W$. Weil C als Skalar auf W operiert, muß $\operatorname{Ker} C \cap W = \{0\}$ gelten, also haben wir: $V = W \oplus \operatorname{Ker} C$ mit $\mathfrak{g}$-invarianten Untervektorräumen W und $\operatorname{Ker} C$.

Im allgemeinen Fall gehen wir per Induktion nach der Dimension von V vor. Weil V/W eindimensional ist, operiert $\mathfrak{h}$ trivial auf $V/W \simeq \mathbb{K}$, so daß wir die exakte Sequenz: $0 \to W \to V \to \mathbb{K} \to 0$ haben. Sei $W' \neq \{0\}$ ein minimaler $\mathfrak{h}$-Untermodul von W, insbesondere invariant unter $\varrho(\mathfrak{g})$. Für $W = W'$ ist W irreduzibel, und wir sind mit obiger Vorüberlegung fertig.

Ist $W' \subsetneqq W$, so erhalten wir eine weitere exakte Sequenz mit kleineren Dimensionen $\dim V/W' < \dim V = n$ und $\dim W/W' = \dim V/W' - 1$:

$$0 \to W/_{W'} \to V/_{W'} \to \mathbb{K} \to 0.$$

Nach der Induktionsannahme gibt es daher einen eindimensionalen $\mathfrak{h}$-Untermodul $\widetilde{W}/W' \subset V/W'$ mit $V/W' = W/W' \oplus \widetilde{W}/W'$. Damit ist $0 \to W' \to \widetilde{W} \to \mathbb{K} \to 0$ ebenfalls exakt. Weil auch hier $\dim W' = \dim \widetilde{W} - 1$ gilt mit $\dim \widetilde{W} < \dim V = n$, gibt es nach Induktionsannahme einen eindimensionalen $\mathfrak{h}$-Untermodul $X \subset \widetilde{W}$ mit $\widetilde{W} = W' \oplus X$. Wir können schreiben: $V/W' = W/W' \oplus X/W'$, folglich ist $W \cap X = \{0\}$. Aus Dimensionsgründen muß dann $V = W \oplus X$ sein. ■

Satz 2.22 (H. Weyl)**:** *Jede Darstellung einer halbeinfachen Lie-Algebra ist vollständig reduzibel.*

Beweis: Sei (V, ϱ) eine Darstellung der halbeinfachen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, wobei wir statt $\varrho(g)(v)$ hier kurz $g \cdot v$ schreiben wollen. Sei W ein $\varrho(\mathfrak{g})$-Untermodul von V, dann ist die Sequenz $0 \to W \to V \to V/W \to 0$ exakt.

Der Raum $\operatorname{Hom}(V, W)$ aller linearen Abbildungen $V \to W$ wird ein $\mathfrak{g}$-Modul, wenn man setzt: $gf(v) := g \cdot f(v) - f(g \cdot v)$, dann ist nämlich:

$$\begin{aligned}
g_1 g_2 f(v) - g_2 g_1 f(v) &= g_1 \cdot g_2 f(v) - g_2 f(g_1 \cdot v) - g_2 \cdot g_1 f(v) + g_1 f(g_2 \cdot v) \\
&= g_1 \cdot \big(g_2 \cdot f(v) - f(g_2 \cdot v)\big) - g_2 \cdot f(g_1 \cdot v) + f(g_2 \cdot g_1 \cdot v) \\
&\quad - g_2 \cdot \big(g_1 \cdot f(v) - f(g_1 \cdot v)\big) + g_1 \cdot f(g_2 \cdot v) - f(g_1 \cdot g_2 \cdot v) \\
&= g_1 \cdot g_2 \cdot f(v) + f(g_2 \cdot g_1 \cdot v) - g_2 \cdot g_1 \cdot f(v) - f(g_1 \cdot g_2 \cdot v) \\
&= [g_1, g_2] \cdot f(v) - f([g_1, g_2] \cdot v) = ([g_1, g_2] f)(v).
\end{aligned}$$

Die Unterräume

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &:= \big\{ f \in \operatorname{Hom}(V, W) \;\big|\; f\big|_W = a \cdot \mathrm{id}_W ; a \in \mathbb{K} \big\} \\
\mathcal{W} &:= \big\{ f \in \mathcal{V} \;\big|\; f\big|_W = 0 \big\}
\end{aligned}$$

sind dann $\mathfrak{g}$-Untermoduln mit $g \cdot \mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ für alle $g \in \mathfrak{g}$, wie man leicht nachprüft. Außerdem ist $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ eindimensional, damit hat man die exakte Sequenz:

$$0 \to \mathcal{W} \to \mathcal{V} \to \mathbb{K} \to 0.$$

Das obige Lemma liefert nun: $\mathcal{W}$ hat ein eindimensionales ($\mathfrak{g}$-stabiles) Komplement in $\mathcal{V}$. Dieses werde durch $f\colon V \to W$ erzeugt, durch Multiplizieren mit einem geeigneten Faktor können wir o. B. d. A. annehmen, daß $f\big|_W = \mathrm{id}_W$ ist. Das bedeutet, daß für alle $w \in W$ und alle $g \in \mathfrak{g}$ gilt:

$$gf(W) = g \cdot f(w) - f(g \cdot w) = g \cdot w - g \cdot w = 0;$$

mit anderen Worten ist $gf \in \mathcal{W}$ für alle $g \in \mathfrak{g}$. Gleichzeitig liegt gf im Komplement von $\mathcal{W}$, weil dieses $\mathfrak{g}$-stabil ist, und daher hat man $gf = 0$. Das bedeutet nun, daß für alle $v \in V$ gilt: $0 = gf(v) = g \cdot f(v) - f(g \cdot v)$, oder anders gesagt: f ist ein $\mathfrak{g}$-Modul-Homomorphismus. Folglich ist der Kern $\operatorname{Ker} f$ ein $\mathfrak{g}$-Untermodul von V. Weil f ganz V in W hinein abbildet und auf W die Identität ist, muß daher $V = W \oplus \operatorname{Ker} f$ sein. Das heißt, die Darstellung (V, ϱ) von $\mathfrak{g}$ ist vollständig reduzibel. ■

Bemerkung: Die Aussage des Satzes von Weyl läßt sich ein wenig allgemeiner formulieren: Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra, die eine Zerlegung in ihr Zentrum und ein halbeinfaches Ideal $\mathfrak{h}$ aufweist: $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus Z(\mathfrak{g})$. (Dann ist $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{h}$, und $Z(\mathfrak{g})$ stimmt mit dem Radikal von $\mathfrak{g}$ überein.) Jede Darstellung von $\mathfrak{g}$, bei der die Elemente des Zentrums durch diagonalisierbare Endomorphismen dargestellt werden, ist vollständig reduzibel. (ohne Beweis)

In Umkehrung davon gilt:

Satz 2.23: *Sei $\mathfrak{a}$ eine komplexe Lie-Algebra mit vollständig reduzibler, treuer Darstellung (V, ϱ). Dann kann $\mathfrak{a}$ als direkte Summe $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \oplus \mathfrak{r}$ geschrieben werden, wobei $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ halbeinfach ist und das Radikal $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{a}$ mit dem Zentrum übereinstimmt: $\mathfrak{r} = Z(\mathfrak{a})$.*

Beweis: Nach Voraussetzung hat man: $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ mit minimalen $\varrho(\mathfrak{a})$-Moduln V_j. (Das heißt, daß die V_j nichtleere, $\varrho(\mathfrak{a})$-invariante, komplexe Untervektorräume minimaler Dimension sind und daß die Einschränkung ϱ_j von ϱ auf V_j eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{a}$ ist.)

Sei $\mathfrak{r}$ das Radikal von $\mathfrak{a}$, dann ist gemäß Satz 2.14.II $\varrho_j(\mathfrak{r})$ das Radikal von $\varrho_j(\mathfrak{a}) \subset V_j$. Es gilt $\varrho_j(\mathfrak{r}) \subset \mathbb{C}\,\mathrm{id}_V$, weil $\varrho_j(\mathfrak{a})$ irreduzibel auf V_j operiert – für eindimensionales V_j ist das klar, und bei $\dim_{\mathbb{C}} V_j \geq 2$ können wir so argumentieren: Nach dem Satz 2.6 von Lie gibt es einen Eigenvektor $v \in V_j \setminus \{0\}$ mit $\varrho_j(\mathfrak{r})v \subset \mathbb{C}v$; der Untervektorraum $\left\{a_1 a_2 \cdots a_k v \mid a_j \in \varrho_j(\mathfrak{a}); k \in \mathbb{N}\right\}$ ist invariant unter $\varrho_j(\mathfrak{a})$ und muß wegen der Irreduzibilität von $\varrho_j(\mathfrak{a})$ bereits ganz V_j sein; Lemma 2.5 liefert nun $\varrho_j(\mathfrak{r}) \subset \mathbb{C}\,\mathrm{id}_{V_j}$.

Wegen Satz 2.3 ist $\varrho_j([\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]) = [\varrho_j(\mathfrak{a}), \varrho_j(\mathfrak{a})]$. Jedes $\xi \in [\varrho_j(\mathfrak{a}), \varrho_j(\mathfrak{a})]$ kann man mit geeigneten $z_i \in \mathbb{C}$, $a_i, b_i \in \varrho_j(\mathfrak{a})$ schreiben als: $\xi = \sum_i z_i [a_i, b_i]$, daher gilt: $\operatorname{spur} \xi = \sum_i z_i \operatorname{spur}(a_i b_i - b_i a_i) = 0$. Folglich hat man: $\varrho_j([\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]) \subset \mathfrak{sl}(V_j)$.

Daher hat man für alle j: $\varrho_j([\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]) \cap \varrho_j(\mathfrak{r}) \subset \mathfrak{sl}(V_j) \cap \mathbb{C}\,\mathrm{id}_{V_j} = \{0\}$, so daß folgt: $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \cap \mathfrak{r} \subset \operatorname{Ker} \varrho_j$. Es gilt: $\operatorname{Ker} \varrho_1 \cap \cdots \cap \operatorname{Ker} \varrho_k = \operatorname{Ker} \varrho$ mit $\operatorname{Ker} \varrho = \{0\}$, weil ϱ treu ist. Das bedeutet: $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \cap \mathfrak{r} = \{0\}$, und zusammen mit Satz 2.14.III erhält man: $\mathfrak{a} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \oplus \mathfrak{r}$.

Weil $\mathfrak{r}$ ein Ideal ist, gilt $[\mathfrak{a}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r}$, und wegen $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{a}$ ist $[\mathfrak{a}, \mathfrak{r}] \subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$; beides zusammen gibt $[\mathfrak{a}, \mathfrak{r}] \subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \cap \mathfrak{r} = \{0\}$ und folglich: $\mathfrak{r} \subset Z(\mathfrak{a})$, das heißt $\mathfrak{r} = Z(\mathfrak{a})$.

Jedes Ideal $\mathfrak{i} \subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ ist bereits ein Ideal in $\mathfrak{a}$, denn aus $[[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}], \mathfrak{i}] \subset \mathfrak{i}$ folgt: $[\mathfrak{a}, \mathfrak{i}] = [[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \oplus \mathfrak{r}, \mathfrak{i}] \subset [[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}], \mathfrak{i}] + [Z(\mathfrak{a}), \mathfrak{i}] \subset \mathfrak{i}$. Weiter ist $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ halbeinfach, denn ein auflösbares Ideal $\mathfrak{i} \subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ ist auch ein auflösbares Ideal in $\mathfrak{a}$ und somit erhält man: $\mathfrak{i} \subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \cap \mathfrak{r} = \{0\}$. ■

Bemerkung: Die Aussage gilt auch für nichtkomplexe Lie-Algebren (ohne Beweis).

2.3.2. Struktursatz halbeinfacher Lie-Algebren und ihrer Darstellungen

Lemma 2.24: *Seien $\mathfrak{a}_1 \neq \{0\}$ und $\mathfrak{a}_2 \neq \{0\}$ halbeinfache Lie-Algebren über $\mathbb{C}$ und $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2$ mit $[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2] = \{0\}$ ($\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ seien also Ideale in $\mathfrak{a}$). Sei (V, ϱ) eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{a}$. Dann gibt es irreduzible Darstellungen (V_1, ϱ_1) und (V_2, ϱ_2) von $\mathfrak{a}_1$ bzw. $\mathfrak{a}_2$, so daß für $x \in \mathfrak{a}_1$ und $y \in \mathfrak{a}_2$ gilt:*

$$\varrho(x + y) = \varrho_1(x) \otimes \mathrm{id}_{V_2} + \mathrm{id}_{V_1} \otimes \varrho_2(y) \,.$$

Beweis: Die Einschränkung der Darstellung (V, ϱ) mit $\varrho\colon \mathfrak{a} \to \mathfrak{gl}(V)$ auf die Darstellung $(V, \varrho\big|_{\mathfrak{a}_1})$ ist vollständig reduzibel, weil $\mathfrak{a}_1$ eine halbeinfache Lie-Algebra ist (siehe Satz 2.22 von Weyl). Man kann daher annehmen, daß für $a \in \mathfrak{a}_1$ gilt ($n = \dim_{\mathbb{C}} V$):

$$\varrho(a) = \begin{pmatrix} R_1(a) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2(a) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_k(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n} \simeq \mathfrak{gl}(V)$$

mit irreduziblen Darstellungen $R_i\colon \mathfrak{a}_1 \to \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$, so daß $n = n_1 + \dots + n_k$ ist. Weiter seien die Darstellungen R_i o. B. d. A. so gewählt, daß für ein maximales $p \in \{1, \dots, k\}$ gilt: $R_1 = \ldots = R_p$.

Sei nun $b \in \mathfrak{a}_2$. Dann gilt jedenfalls: $[a, b] \in [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2] = \{0\}$ für alle $a \in \mathfrak{a}_1$ und folglich auch: $0 = \varrho([a, b]) = [\varrho(a), \varrho(b)]$ bzw. $\varrho(a)\varrho(b) = \varrho(b)\varrho(a)$. Schreibt man die Matrix

$$\varrho(b) = \begin{pmatrix} S_{11} & \dots & S_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{k1} & \dots & S_{kk} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n} \simeq \mathfrak{gl}(V)$$

mit Untermatrizen $S_{ij} \in \mathbb{C}^{n_i \times n_j}$, so wird aus der Vertauschungsrelation:

$$S_{ij} R_j(a) = R_i(a) S_{ij} \quad \text{für alle } i, j \in \{1, \dots, k\} \text{ und alle } a \in \mathfrak{a}_1.$$

Alle $R_i(\mathfrak{a}_1) \subset \mathfrak{gl}_{n_i}(\mathbb{C})$ sind irreduzibel, durch Anwenden des Schurschen Lemmas 2.20 folgt dann:

$$S_{ij} = \begin{cases} s_{ij} E_{n_1} & \text{mit } s_{ij} \in \mathbb{C} \text{ für } i \le p, j \le p \quad \text{(nach 2.20.I);} \\ 0 & \text{für } i \le p < j \text{ oder } j \le p < i \quad \text{(nach 2.20.II);} \\ * & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit anderen Worten hat die Matrix $\varrho(b)$ für alle $b \in \mathfrak{a}_2$ folgende Blockstruktur:

$$\varrho(b) = \begin{pmatrix} M_{pp} & 0 \\ 0 & M_{k-p;k-p} \end{pmatrix} \text{ mit } M_{pp} \in \mathbb{C}^{p \times p} \text{ und } M_{k-p;k-p} \in \mathbb{C}^{(k-p) \times (k-p)}.$$

Für $p \neq k$ wäre also ϱ reduzibel, folglich muß $p = k$ gelten.

Jetzt setzen wir: $\varrho_1(a) := R_1(a)$ und $\varrho_2(b) := (s_{ij}) \in \mathbb{C}^{p \times p}$ und erhalten:

$$\varrho(a) = \varrho_1(a) \otimes \mathrm{id}_{V_2} \qquad\qquad \varrho(b) = \mathrm{id}_{V_1} \otimes \varrho_2(b)$$

mit irreduziblen ϱ_1 und ϱ_2. ϱ_2 ist tatsächlich irreduzibel, wäre nämlich $W \subset \mathbb{C}^p$ mit $\varrho_2(b) W \subset W$ ein nichttrivialer Untervektorraum, dann wäre für jedes $b \in \mathfrak{a}_2$: $\varrho(b)(\mathbb{C}^{n_1} \otimes W) = (\mathrm{id}_{V_1} \otimes \varrho_2(b))(\mathbb{C}^{n_1} \otimes W) \subset \mathbb{C}^{n_1} \otimes W$. Allgemein hätte man somit sogar $\varrho(a + b)(\mathbb{C}^{n_1} \otimes W) \subset \mathbb{C}^{n_1} \otimes W$ für alle $a + b \in \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}$ im Widerspruch zur Irreduzibilität von ϱ. ■

Damit haben wir nun den

Satz 2.25: *Sei $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ eine halbeinfache Lie-Algebra über $\mathbb{C}$. Dann kann $\mathfrak{a}$ bis auf die Reihenfolge eindeutig geschrieben werden als direkte Summe einfacher Ideale:*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_m .$$

Sei (V, ϱ) eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{a}$. Dann gibt es irreduzible Darstellungen (V_j, ϱ_j) von $\mathfrak{a}_j$, so daß (V, ϱ) das Tensorprodukt von (V_j, ϱ_j) ist, das heißt $V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_m$ und:

$$\begin{aligned}\varrho(a_1 + \cdots + a_m) = \varrho_1(a_1) &\otimes \mathrm{id}_{V_2} \otimes \mathrm{id}_{V_3} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_{V_m} \\ &+ \mathrm{id}_{V_1} \otimes \varrho_2(a_2) \otimes \mathrm{id}_{V_3} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_{V_m} \\ &+ \cdots + \mathrm{id}_{V_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_{V_{m-1}} \otimes \varrho_m(a_m) .\end{aligned}$$

Ist ϱ treu, so sind auch die ϱ_j treu.

Beweis: Die erste Aussage des Satzes ist lediglich eine Reproduktion des Satzes 2.12. Die zweite Aussage folgt mit Hilfe von Lemma 2.24. Sei dazu (V, ϱ) eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{a}$. Wir schreiben nun: $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{b}_1$ mit der Abkürzung $\mathfrak{b}_1 := \mathfrak{a}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_m$. Weil $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1$ halbeinfach sind, können wir das Lemma anwenden, es gibt also irreduzible Darstellungen (V_1, ϱ_1) von $\mathfrak{a}_1$ und $(\widetilde{V}_1, \tilde{\varrho}_1)$ von $\mathfrak{b}_1$, so daß $\varrho(a_1 + b_1) = \varrho_1(a_1) \otimes \mathrm{id}_{\widetilde{V}_1} + \mathrm{id}_{V_1} \otimes \tilde{\varrho}_1(b_1)$ ist. Jetzt schreiben wir $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{b}_2$ mit $\mathfrak{b}_2 := \mathfrak{a}_3 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_m$ und wenden erneut das Lemma an, etc. Nach insgesamt m Schritten dieser Art haben wir dann die Darstellung ϱ wie im Satz angegeben in ein Tensorprodukt zerlegt.

Gezeigt werden muß nur noch, daß die Darstellungen (V_j, ϱ_j) der $\mathfrak{a}_j$ treu sind, das heißt: $\operatorname{Ker} \varrho_j = \{0\}$. Angenommen, das wäre für ein $j \in \{1, \ldots, m\}$ nicht der Fall. Dann hätte man: $\operatorname{Ker} \varrho_j = \mathfrak{a}_j$, weil $\mathfrak{a}_j$ einfach ist. Für alle $a_j \in \mathfrak{a}_j$ wäre anders gesagt $\varrho_j(a_j) \colon V_j \to V_j$ die Nullabbildung, und damit gälte:

$$\begin{aligned}\varrho(a_j) &= \varrho(0 + \cdots + 0 + a_j + 0 + \cdots + 0) \\ &= 0 \otimes \mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id} + \cdots + \mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id} \otimes 0 = 0 .\end{aligned}$$

Das bedeutet: $\{0\} \subsetneq \mathfrak{a}_j = \operatorname{Ker} \varrho_j \subset \operatorname{Ker} \varrho$ im Widerspruch zur vorausgesetzten Treue von ϱ ($\operatorname{Ker} \varrho = \{0\}$)! ■

Bemerkung: Es gilt: $\dim_{\mathbb{C}} V = \dim_{\mathbb{C}} V_1 \cdot \ldots \cdot \dim_{\mathbb{C}} V_m$. Weil die $\mathfrak{a}_j$ einfach sind, ist: $\mathfrak{a}_j \neq \{0\}$ und $1 < \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{a}_j$, sonst wäre nämlich $[\mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}_j] = \{0\}$ ↯. Weil die ϱ_j treu sind, ist $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{a}_j = \dim_{\mathbb{C}} \varrho_j(\mathfrak{a}_j)$. Insgesamt erhält man:

$$1 < \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{a}_j = \dim_{\mathbb{C}} \varrho_j(\mathfrak{a}_j) \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{gl}(V_j) = (\dim_{\mathbb{C}} V_j)^2,$$

also $\dim_{\mathbb{C}} V_j \geq 2$.

2.3.3. Haarsches Integral und kompakte $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

Sei $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine kompakte Gruppe. Sei $C := \{f \colon G \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ der Vektorraum aller stetigen, reellwertigen Funktionen auf G; für die nichtnegativen Funktionen verwenden wir die Bezeichnung $C^+ := \{f \in C \mid \forall g \in G \colon f(g) \geq 0\}$. G operiert auf C per

$$\begin{aligned}&G \times C \to C \\ &(g, f) \mapsto gf \colon h \mapsto f(g^{-1}h).\end{aligned}$$

Definition: *Eine lineare Abbildung* $I\colon C \to \mathbb{R}$ *heißt* ***Haarsches Integral****, falls* I *nicht die Nullabbildung ist, auf* C^+ *nichtnegativ ist:* $\forall f \in C^+\colon I(f) \geq 0$ *und* G*-invariant ist:* $\forall f \in C\ \forall g \in G\colon I(gf) = I(f)$*. Gilt überdies:* $I(\mathbb{1}) = 1$ *für die konstante Abbildung* $\mathbb{1}\colon G \to \mathbb{R}; g \mapsto 1$*, so bezeichnet man* I *als* ***normiert****.*

Satz 2.26: *Auf der kompakten Gruppe* G *gibt es ein eindeutig bestimmtes normiertes Haarsches Integral* I*. Man schreibt:* $I(f) = \int_G f(g)\,\mathrm{d}g$*.*

Beweis: siehe z. B. Lang (1983, Kap. 16); Hochschild (1965, Kap. I.3) ■

Bemerkung: Für stetige komplexe Funktionen $f\colon G \to \mathbb{C}$ kann man das normierte Haarsche Integral wie folgt fortsetzen:

$$\int_G f(g)\,\mathrm{d}g := \int_G \operatorname{Re} f(g)\,\mathrm{d}g + i \cdot \int_G \operatorname{Im} f(g)\,\mathrm{d}g.$$

Ebenso kann man die Definition auf vektorwertige Funktionen $f\colon G \to \mathbb{C}^n$ ausdehnen durch komponentenweise Definition.

Satz 2.27: *Jede kompakte Lie-Gruppe* $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *ist vollständig reduzibel.*

Beweis: Mit dem Standardskalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ auf $\mathbb{C}^n$ und dem Haarschen Integral $\int_G$ erhält man eine positiv definite hermitesche Form ϕ über:

$$\phi(v, w) := \int_G \langle gv|gw\rangle\,\mathrm{d}g.$$

Es gilt: $\phi(hv, hw) = \phi(v, w)$ für alle $h \in G$, das heißt, ϕ ist G-invariant.

Sei nun $V \subset \mathbb{C}^n$ ein G-invarianter Untervektorraum. Weil ϕ G-invariant ist, ist auch $V^\perp = \left\{w \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, \forall v \in V\colon \phi(v, w) = 0\right\}$ ein G-invarianter Untervektorraum, es gilt: $\mathbb{C}^n = V \oplus V^\perp$. Das bedeutet, daß $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ vollständig reduzibel ist. ■

Als nächstes wollen wir die Struktur von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und kompakten Untergruppen ein wenig näher betrachten.

Die hermiteschen Matrizen $H_n := \left\{h \in \mathbb{C}^{n\times n} \,\middle|\, h = h^*\right\}$ stellen eine additive Untergruppe von $\mathbb{C}^{n\times n}$ dar. Versieht man die Menge $H_n \times \mathrm{U}_n$ mit einer Gruppenstruktur per $(h_1, u_1) \cdot (h_2, u_2) := (h_1 + f_{u_1}(h_2), u_1u_2)$, wobei $f_u(h) = u \cdot h \cdot u^*$ ist (Konjugation), erhält man das semidirekte Produkt $H_n \rtimes \mathrm{U}_n$ von H_n und U_n. Es gibt die Inklusionen: $H_n \hookrightarrow H_n \rtimes \mathrm{U}_n; h \mapsto (h, E_n)$ und $\mathrm{U}_n \hookrightarrow H_n \rtimes \mathrm{U}_n; u \mapsto (0, u)$.

Satz 2.28: *Jede Matrix* $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *schreibt sich eindeutig als Produkt einer unitären und einer positiv definiten hermiteschen Matrix:*

$$g = h_g \cdot u_g \quad \textit{mit} \quad h_g \in H_n \textit{ positiv definit und } u_g \in \mathrm{U}_n.$$

Beweis: Sei $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Dann ist g^*g hermitesch und positiv definit und kann diagonalisiert werden mit einer geeigneten Matrix $v \in \mathrm{U}_n$: $vg^*gv^{-1} = d$. Die Diagonalmatrix d ist ebenfalls positiv definit, es gibt also eine positiv definite Diagonalmatrix $\tilde{d}$, so daß $\tilde{d}\tilde{d} = d$. Dann ist $h := v^{-1}\tilde{d}v = v^*\tilde{d}v$ positiv definit, hermitesch und invertierbar, und $u := gh^{-1}$ ist unitär:

$$u^*u = (gh^{-1})^*gh^{-1} = h^{-1}g^*gh^{-1} = v^{-1}\tilde{d}^{-1}d\tilde{d}^{-1}v = E_n.$$

Das heißt, g schreibt sich als ein Produkt aus einer unitären und einer positiv definiten hermiteschen Matrix: $g = uh = \tilde{h}u$ mit $\tilde{h} := uhu^{-1}$.

ad Eindeutigkeit: Sei $g = h_1u_1 = h_2u_2$. Die Matrixexponentialabbildung $\exp\colon \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ bildet hermitesche Matrizen bijektiv auf positiv definite hermitesche Matrizen ab. Weil h_1 und h_2 positiv definite hermitesche Matrizen sind, gibt es daher hermitesche Matrizen η_1 und η_2 mit $\exp \eta_j = h_j$.

Weiter ist $h_1^2 = h_1h_1^* = h_2u_2u_1^*\, u_1u_2^*h_2 = h_2^2$. Man hat also:

$$\exp(2\eta_1) = h_1^2 = h_2^2 = \exp(2\eta_2)$$

und folglich $\eta_1 = \eta_2$ sowie $h_1 = h_2$. ■

Folgerung: Man kann mit Hilfe der obigen Inklusionen jedes $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ identifizieren mit einem Element von $H_n \rtimes \mathrm{U}_n$:

$$g = h_g \cdot u_g = (h_g, E_n) \cdot (0, u_g) = (h_g, u_g),$$

es liegt eine Einbettung vor: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \hookrightarrow H_n \rtimes \mathrm{U}_n$. Für das Produkt zweier invertierbarer Matrizen $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ hat man dann:

$$g_1 \cdot g_2 = (h_{g_1}, u_{g_1}) \cdot (h_{g_2}, u_{g_2}) = \big(h_{g_1} + f_{u_{g_1}}(h_{g_2}), u_{g_1}u_{g_2}\big),$$

das heißt, $h_{g_1g_2} = h_{g_1} + f_{u_{g_1}}(h_{g_2})$ und $u_{g_1g_2} = u_{g_1}u_{g_2}$.

Satz 2.29: *Jede kompakte Untergruppe $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist zu einer Untergruppe von U_n konjugiert. Das heißt, daß U_n maximal kompakte Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist. Insbesondere gilt:* $\dim_{\mathbb{R}} G \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{U}_n = n^2$.

Beweis: Sei $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ kompakt und $g \in G$. Die Projektion

$$h\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to H_n; x \mapsto h_x$$

ist wegen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \hookrightarrow H_n \rtimes \mathrm{U}_n$ wohldefiniert, weiter kann man das Linkstranslat $gh\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to H_n$ definieren über $(gh)(x) := h(gx) = h_{gx} = h_g + f_{u_g}(h_x)$. Als Abbildung geschrieben hat man: $gh = h_g + f_{u_g}(h)$.

Nun gibt es auf der kompakten Gruppe G ein H_n-wertiges Haarsches Integral $I_G\colon (\varphi\colon G \to H_n) \mapsto I_G(\varphi) \in H_n$. Speziell ist wegen G-Invarianz und Linearität:

$$I_G(h) = I_G(gh) = h_g + f_{u_g}(I_G(h)).$$

Sei $\xi := (-I_G(h), E_n) = (I_G(h), E_n)^{-1}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} h_g = (h_g, E_n) &= \big(I_G(h) - f_{u_g}(I_G(h)), E_n\big) = \xi^{-1} \cdot \big(-f_{u_g}(I_G(h)), E_n\big) \\ &= \xi^{-1} \cdot (0, u_g) \cdot \big(-I_G(h), u_g^{-1}\big) \\ &= \xi^{-1} \cdot u_g \cdot \xi \cdot u_g^{-1}. \end{aligned}$$

Damit hat man: $g = h_g \cdot u_g = \xi^{-1} \cdot u_g \cdot \xi$ mit g-unabhängigem, invertierbarem $\xi \in H_n$. Folglich ist: $\xi G \xi^{-1} \subset \mathrm{U}_n$. ■

3. Automorphismengruppen und Vektorfelder

Die wesentlichen Quellen für dieses Kapitel sind die beiden Veröffentlichungen: Kaup (1967); Kaup, Matsushima und Ochiai (1970). Für den ersten Abschnitt sind außerdem *Analytic Functions of Several Complex Variables* von Gunning u. Rossi (1965) und *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$ von Rudin (1980) verwendet worden.

3.1. Isotropiegruppe und Eindeutigkeitssätze

Satz 3.1 (Identitätssatz)**:** *Sei $\varOmega \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, und seien f und g holomorphe Abbildungen auf $\varOmega$. Stimmen f und g auf einem Teilbereich $U \subset \varOmega$ überein, dann gilt $f(z) = g(z)$ für alle $z \in \varOmega$.*

Beweis: Sei $E := \{z \in \varOmega \mid f(z) = g(z)\}$, es gilt: $U \subset \mathring{E} \subset \varOmega$. Wir zeigen, daß $\mathring{E}$ abgeschlossen in $\varOmega$ ist (d. h.: $z \in \bar{\mathring{E}} \cap \varOmega \Rightarrow z \in \mathring{E}$); weil $\varOmega$ zusammenhängend ist, muß dann $\mathring{E} = \varOmega$ gelten.

Sei also $z \in \bar{\mathring{E}} \cap \varOmega$. Sei $r > 0$ so klein gewählt, daß der Polyzylinder

$$\varDelta(z; r) := \{\zeta \in \mathbb{C}^n \mid \forall j\colon |z_j - \zeta_j| < r\}$$

ganz in $\varOmega$ liegt.

Weil z im Abschluß $\bar{\mathring{E}}$ liegt, gibt es ein $\zeta \in \mathring{E}$, so daß $|z_j - \zeta_j| < \frac{r}{2}$ ist. Man hat $z \in \varDelta(\zeta; \frac{r}{2}) \subset \varDelta(z; r) \subset \varOmega$, und $f - g$ ist auf diesem Polyzylinder holomorph. Es gibt also eine Potenzreihenentwicklung um ζ, die auf dem ganzen Polyzylinder konvergiert.

Wegen $\zeta \in \mathring{E}$ verschwindet $f - g$ in einer offenen Umgebung von ζ, weswegen alle Koeffizienten der Entwicklung gleich Null sind. Daher verschwindet $f - g$ auf ganz $\varDelta(\zeta; \frac{r}{2})$, und insbesondere folgt: $z \in \mathring{E}$. ■

Satz 3.2 (Cartanscher Eindeutigkeitssatz)**:** *Seien $\varOmega \in \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Gebiet und $f\colon \varOmega \to \varOmega$ eine holomorphe Abbildung. Sei $z_0 \in \varOmega$ mit $f(z_0) = z_0$ und $T_{z_0} f = \mathrm{id}$. Dann gilt $f(z) = z$ für alle $z \in \varOmega$.*

Beweis: O. B. d. A. sei $z_0 = 0$. Es gibt $0 < r_1 < r_2 < \infty$, so daß $r_1 B^n \subset \varOmega \subset r_2 B^n$. In der offenen Kugel $r_1 B^n$ hat f eine Taylorentwicklung

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(z) = z + \sum_{\nu=2}^{\infty} f_\nu(z),$$

wobei die Komponenten von f_ν homogene Polynome vom Grad v sind. (Dabei wurde verwendet, daß erstens f_0 wegen $f(0) = 0$ konstant gleich Null ist und zweitens $f_1(z) = T_0 f(z) = \mathrm{id}(z) = z$ ist.)

Wir zeigen nun per Induktion nach $m \in \mathbb{N}$, daß für alle $2 \leq \nu < m$ gilt: $f_\nu \equiv 0$ (in $r_1 B^n$). Für $m \leq 2$ ist dabei nichts zu zeigen. Ist die Behauptung richtig für ein $m \in \mathbb{N}$, so kann man für alle $z \in r_1 B^n$ schreiben:

$$\begin{aligned} f(z) &= z + \sum_{\nu=m}^{\infty} f_\nu(z) \text{ und (per Induktion nach } k \in \mathbb{N}\text{):} \\ f^k(z) &= f\big(f^{k-1}(z)\big) \\ &= f\big(z + (k-1) \cdot f_m(z) + \tilde{f}_{k-1}(z)\big) \\ &= z + k \cdot f_m(z) + \tilde{f}_k(z). \end{aligned}$$

In $\tilde{f}_k(z)$ sind dabei jeweils alle Beiträge zusammengefaßt, die homogene Polynome vom Grad größer als m enthalten. Es gilt für jedes $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^k(e^{i\vartheta}z)e^{-im\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(z \cdot e^{-i(m-1)\vartheta} + k \cdot f_m(z) + \tilde{f}_k(e^{i\vartheta}z)e^{-im\vartheta}\right)\mathrm{d}\vartheta$$

mit explizit bestimmbaren Integralen: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k \cdot f_m(z)\ \mathrm{d}\vartheta = k \cdot f_m(z)$; wegen $m > 1$ ist $\frac{z}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(m-1)\vartheta}\ \mathrm{d}\vartheta = 0$; ebenso geben alle in $\tilde{f}_k$ zusammengefaßten Beiträge der Entwicklung (neben vor das Integral zu ziehenden z-abhängigen Anteilen) Integranden der Art $e^{-i(m-\mu)\vartheta}$ mit diversen $\mu > m$, so daß auch das Integral hierüber verschwindet. Insgesamt bleibt nur übrig:

$$k \cdot f_m(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^k(e^{i\vartheta}z)e^{-im\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta, \text{ also:}$$

$$|k \cdot f_m(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f^k(e^{i\vartheta}z)|\,\mathrm{d}\vartheta < \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r_2\,\mathrm{d}\vartheta = r_2.$$

Es folgt, daß $|f_m(z)| < \frac{r_2}{k}$ ist für alle $k = 1, 2, 3, \ldots$ und $z \in r_1B^n$, daher hat man $f_m(z) = 0$ für alle $z \in r_1B^n$.

Das bedeutet, daß $f = \mathrm{id}$ auf r_1B^n ist, und mit dem Identitätssatz 3.1 folgt dann auch global (auf ganz Ω) $f = \mathrm{id}$. ■

Ist M eine komplexe Mannigfaltigkeit mit einer eigentlichen Transformationsgruppe G, so ist die Isotropiegruppe $G_p = \{g \in G \mid g(p) = p\}$ von $p \in M$ in G kompakt (siehe Lemma 1.10). In diesem Fall oder generell für beliebige kompakte effektive Transformationsgruppen gilt in Verallgemeinerung des Satzes von Cartan der folgende

Satz 3.3: *Seien M eine komplexe Mannigfaltigkeit und $G \subset \operatorname{Aut} M$ eine kompakte Untergruppe, die einen Punkt $p \in M$ festläßt. Dann gibt es eine G-invariante Umgebung U von p, einen komplexen Unterraum V eines Gebietes Ω im Tangentialraum T_pM und eine biholomorphe Abbildung $\tau\colon U \to V$ mit $T_pg \circ \tau\big|_U = \tau \circ g\big|_U$ für alle $g \in G$.*

Mit anderen Worten können in einer Umgebung von p lokale Koordinaten eingeführt werden, so daß jedes $g \in G$ linear ist.

Beweis: Wir erinnern an die Exponentialabbildung einer Lie-Algebra auf die zugehörige Lie-Gruppe (siehe Seite 17). Die Charakterisierung als $\exp\colon \xi \mapsto \gamma(1)$ zur Einparametergruppe $(\gamma(t))_{t\in\mathbb{R}}$ mit $\gamma(0) = e$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)\big|_{t=0} = \xi$ läßt sich analog auf (differenzierbare bzw. komplexe) Mannigfaltigkeiten M übertragen, wenn man eine Geodätische statt der Einparametergruppe zugrunde legt. Zu $p \in M$ und Tangentialvektoren X_p aus einer Umgebung V von $0 \in T_pM$ setzen wir hier: $\exp\colon X_p \mapsto \gamma(1)$, wobei γ eine Geodätische mit $\gamma(0) = p$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)\big|_{t=0} = X_p$ sei. Die Umgebung V kann so klein gewählt werden, daß $\exp(V)$ eine Umgebung von

$p \in M$ ist, auf die V diffeomorph bzw. biholomorph abgebildet wird (vgl. z. B. Helgason, 1978, Kap. I, § 6, Thm. 6.1).

Ist die komplexe Mannigfaltigkeit M hyperbolisch, so sind alle biholomorphen Abbildungen $f \in \operatorname{Aut} M$ Isometrien (vgl. Lemma 1.6) bezüglich der stetigen (Kobayashi-)Metrik d_M: $d_M(x, y) = d_M\big(f(x), f(y)\big)$. Das bedeutet, daß die offenen Mengen $\big\{x \in M \bigm| d_M(x, p) < \frac{1}{m}\big\}$ eine G-invariante Umgebungsbasis von p darstellen.

Sei U eine derartige G-invariante Umgebung von p, die so klein ist, daß es eine offene Umgebung V von $0 \in T_pM$ gibt, die von der Exponentialabbildung $\exp\colon TM \to M$ biholomorph auf U abgebildet wird. Vermöge exp kann man dann U mit V identifizieren.

Zu den beiden Umgebungen U und V definieren wir $f\colon G \to \operatorname{Hol}(U, V)$ per $f(g) := T_pg^{-1} \circ \exp^{-1} \circ g$ und benutzen das Haarsche Integral: $\tau := \int_G f(g)\, \mathrm{d}g$. Dann ist τ eine biholomorphe Abbildung $U \to V$, und für $u \in U$ gilt:

$\tau(u) = \int_G f(g)(u)\, \mathrm{d}g = \int_G f(gh)(u)\, \mathrm{d}g = \int_G \big(T_ph^{-1} \circ f(g) \circ h\big)(u)\, \mathrm{d}g$, also: $T_ph\big(\tau(u)\big) = \int_G f(g)(hu)\, \mathrm{d}g = \tau(hu)$ bzw.: $T_ph \circ \tau = \tau \circ h$.

Es ist eine Verallgemeinerung auf den nichthyperbolischen Fall möglich: Weil jeder komplexe Raum mit abzählbarer Topologie stetig metrisierbar ist, können wir annehmen, daß wir bereits eine stetige Metrik $\delta\colon M \times M \to \mathbb{R}$ haben. Dann definieren wir über das Haarsche Integral: $\tilde{\delta}(x, y) := \int_G \delta(gx, gy)\, \mathrm{d}g$ und erhalten eine neue stetige Metrik $\tilde{\delta}$ auf M, die G-invariant ist (vgl. Kaup, 1967, S. 53f; Huckleberry u. Oeljeklaus, 1984, S. 11). ∎

Der eben bewiesene Satz kann nun dazu verwendet werden, eine besondere Darstellung der Isotropiegruppe $G_p = \big\{g \in G \bigm| g(p) = p\big\}$ zu erklären:

Sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit mit eigentlicher Transformationsgruppe G, sei T_pM der Tangentialraum an $p \in M$. Zu $G \ni g\colon M \to M$ gehört die Tangentialabbildung $T_pg\colon T_pM \to T_{g(p)}M$. Speziell für g aus der nach Lemma 1.10 kompakten Isotropiegruppe G_p gilt: $T_pg\colon T_pM \to T_pM$, man kann also T_p als Darstellung der Isotropiegruppe auffassen:

$$\begin{aligned} T_p\colon G_p &\to \operatorname{GL}(T_pM) \simeq \operatorname{GL}_n(\mathbb{C}) \\ g &\mapsto T_pg. \end{aligned}$$

Das ist tatsächlich eine Darstellung, denn für Tangentialabbildungen gilt stets: $T_p\,\mathrm{id} = \mathrm{id}$, $T_p(g \circ f) = (T_{f(p)}g) \circ (T_pf)$, hier wegen $f(p) = p$ also insbesondere: $T_p(g \circ f) = (T_pg) \circ (T_pf)$.

Diese sogenannte *Isotropiedarstellung* ist treu, denn nach Satz 3.3 hat man: Seien $f, g \in G_p$ mit $T_pf = T_pg$, dann folgt: $\mathrm{id} = (T_pg)^{-1} \circ T_pf = T_p(g^{-1} \circ f)$, also gilt auf der Umgebung U von p: $g^{-1} \circ f = \tau^{-1} \circ T_p(g^{-1} \circ f) \circ \tau = \tau^{-1} \circ \mathrm{id} \circ \tau = \mathrm{id}$. Ist speziell M ein Siegel-Gebiet im $\mathbb{C}^n$, folgt mit dem Identitätssatz 3.1, daß überhaupt $g^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ gilt.

Wir haben damit den ersten Teil des folgenden Satzes gezeigt:

Satz 3.4: *Die Gruppe $G \subset \operatorname{Aut} M$ operiere eigentlich auf der komplexen Mannigfaltigkeit M. Dann ist die Isotropiegruppe $G_p := \big\{g \in G \bigm| g(p) = p\big\}$ von $p \in M$ in G kompakt und die Isotropiedarstellung treu. Außerdem ist jede Bahn $G(p) := \big\{g(p) \bigm| g \in G\big\} \subset M$ abgeschlossen und topologisch äquivalent zu G/G_p, insbesondere hat man:* $\dim_{\mathbb{R}} G = \dim_{\mathbb{R}} G_p + \dim_{\mathbb{R}} G(p)$.

Beweis: Es ist nur noch der zweite Teil des Satzes zu zeigen. Nach Voraussetzung ist die Abbildung $\Psi\colon G \times M \to M \times M; (g, m) \mapsto (g(m), m)$ eigentlich. Sei $p \in M$. Die Bahn $G(p)$ ist abgeschlossen, falls die Grenzwerte aller konvergenter Folgen aus $G(p)$ selbst wieder in $G(p)$ liegen. Sei also $q \in M$ der Grenzwert einer konvergenten Folge $(q_j)_{\mathbb{N}}$ aus $G(p)$. Zu zeigen ist, daß es ein $g \in G$ gibt mit $g(p) = q$.

Die Menge $Q := \{q_j \mid j \in \mathbb{N}\} \cup \{q\} \subset M$ ist kompakt. Weil Ψ eigentlich ist, ist das Urbild $\Psi^{-1}(Q, p) \subset G \times M$ kompakt. Zur Folge $(q_j)_{\mathbb{N}}$ gibt es eine Folge $(g_j)_{\mathbb{N}}$ aus G mit $g_j(p) = q_j$, es gilt: $\{g_j\} \times \{p\} \subset \Psi^{-1}(Q, p)$. Wegen der Kompaktheit des Urbildes muß die Folge $(g_j)_{\mathbb{N}}$ konvergieren: $\tilde{g} := \lim g_j \in G$. Weil G stetig auf M operiert, folgt dann: $\lim g_j(p) = \tilde{g}(p) \in G(p)$. Aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes ergibt sich: $q = \tilde{g}(p) \in G(p)$.

Für die topologische Äquivalenz von $G(p)$ und G/G_p müssen wir einen Homöomorphismus von G/G_p nach $G(p)$ finden. Die kanonische Quotientenabbildung $q\colon G \to G/G_p$ ist stetig und offen. Es genügt daher zu zeigen, daß die nach Voraussetzung stetige Abbildung $\varphi\colon G \to G(p); g \mapsto g(p)$ offen ist. Mit beliebiger Umkehrabbildung $\tilde{q}$ von q (d. h. $q \circ \tilde{q} = \mathrm{id}$) ist dann nämlich $\varphi \circ \tilde{q}\colon gG_p \mapsto g(p)$ ein wohldefinierter Homöomorphismus von G/G_p nach $G(p)$.

Sei also $U \subset G$ eine offene Umgebung eines Elementes $g \in G$. Weil G lokalkompakt ist, gibt es eine kompakte Umgebung K von $e \in G$, so daß $K = K^{-1}$ und $gK^2 \subset U$ gelten. Es gibt eine Folge $(g_j)_{\mathbb{N}}$ in G, so daß $G = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} g_j K$ ist. Dann gilt auch: $G(p) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (g_j K)(p)$. Jedes $(g_j K)(p)$ ist kompakt und insbesondere abgeschlossen in $G(p)$. Nach dem Baireschen Kategoriensatz (vgl. z. B. Herrlich, 1986, Satz 7.3.20, S. 226) gibt es ein $(g_{j_0} K)(p)$, das einen inneren Punkt enthält. Dann enthält auch $K(p)$ einen inneren Punkt $h(p)$, somit ist p ein innerer Punkt von $(h^{-1}K)(p) \subset K^2(p)$ und $g(p)$ ein innerer Punkt von $U(p)$. Also ist φ offen. ∎

Satz 3.5: *Sei M eine zusammenhängende hyperbolische Mannigfaltigkeit mit $\dim_{\mathbb{C}} M = n$. Dann ist die Aktion der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}\, M$ auf M eigentlich, und die reelle Lie-Gruppe $\mathrm{Aut}\, M$ hat eine endliche Dimension: $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Aut}\, M \leq n^2 + 2n$.*

Beweis: Die Abbildung $\Psi\colon \mathrm{Aut}\, M \times M \to M \times M; (g, x) \mapsto (g(x), x)$ ist nach Satz 1.11 eigentlich. Wir können somit den vorigen Satz 3.4 anwenden, danach ist die Isotropiegruppe G_p von $G = \mathrm{Aut}\, M$ kompakt und die Isotropiedarstellung treu. Daher ist $T_p(G_p)$ eine kompakte Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit gleicher Dimension wie G_p, und nach Satz 2.29 haben wir: $\dim_{\mathbb{R}} G_p \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{U}_n = n^2$.

Da die Bahnen der Aktion von G auf M Teilmengen von M darstellen, ist ihre (reelle) Dimension höchstens so groß wie die doppelte komplexe Dimension von M, also höchstens $2n$.

Insgesamt erhält man: $\dim_{\mathbb{R}} G = \dim_{\mathbb{R}} G_p + \dim_{\mathbb{R}} G(p) \leq n^2 + 2n$. ∎

Satz 3.6 (Kaup)**:** *Sei M eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension n und G eine effektive eigentliche Transformationsgruppe auf M. Operiert G nicht transitiv auf M, so gilt:* $\dim_{\mathbb{R}} G \leq n^2$.

Folgerung: Gibt es eine effektive eigentliche Transformationsgruppe auf M mit $\dim_{\mathbb{R}} G > n^2$, so operiert G transitiv auf M, das heißt, die Mannigfaltigkeit M ist *homogen*.

Beweis: Sei $p \in M$ und T_pM der Tangentialraum an p. Die Isotropiedarstellung $T_p\colon G_p \to \mathrm{GL}(T_pM) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ der kompakten Isotropiegruppe G_p ist treu, daher ist die *lineare Isotropiegruppe* $K := T_p(G_p) \subset \mathrm{GL}(T_pM)$ isomorph zu G_p. Da G_p kompakt ist, ist auch K kompakt und nach Satz 2.29 isomorph zu einer Untergruppe von U_n. Insbesondere gilt: $\dim_{\mathbb{R}} K \le n^2$.

Weil die Bahn $G(p)$ in M liegt, gilt natürlich für die zugehörigen Tangentialräume: $T_pG(p) \subset T_pM$. Weil G nicht transitiv operiert, hat man $G(p) \subsetneqq M$ und daher: $T_pG(p) \subsetneqq T_pM$. Die Bahn $G(p)$ ist G-invariant, der Tangentialraum $T_pG(p)$ ist also K-invariant (vgl. Satz 2.2), ebenso $T_pG(p) + iT_pG(p)$ und $T_pG(p) \cap iT_pG(p)$.

Fallunterscheidung ($n = \dim_{\mathbb{C}} M = \dim_{\mathbb{C}} T_pM$):

①: $k := \dim_{\mathbb{C}}\big(T_pG(p) + iT_pG(p)\big) < n$. Weil $T_pG(p) + iT_pG(p)$ ein K-invarianter echter Unterraum von T_pM ist, muß sich jeder Endomorphismus aus $K \subset \mathrm{U}_n$ als eine Blockmatrix mit einer $k{\times}k$- und einer $(n{-}k){\times}(n{-}k)$-Untermatrix schreiben lassen (kurz: $(k, n{-}k)$-Blockstruktur), es gilt daher:

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{R}} G &= \dim_{\mathbb{R}} G_p + \dim_{\mathbb{R}} G(p)\\ &\le \dim_{\mathbb{R}} K + \dim_{\mathbb{R}}\big(T_pG(p) + iT_pG(p)\big)\\ &\le \big(k^2 + (n-k)^2\big) + 2k = n^2 + 2k^2 - 2k(n-1) \le n^2.\end{aligned}$$

②: $\ell := \dim_{\mathbb{C}}(T_pG(p) \cap iT_pG(p)) > 0$. Wegen ① kann man hier annehmen, daß $T_pG(p) + iT_pG(p) = T_pM$ ist. Wegen $T_pG(p) \subsetneqq T_pM$ gilt: $\ell < n$ und: $T_pG(p) \cap iT_pG(p) \subsetneqq T_pG(p) \subsetneqq T_pM$. Daher müssen sich auch hier die Endomorphismen aus $K \subset \mathrm{U}_n$ als Blockmatrix schreiben lassen, und zwar mit einer $(\ell, n{-}\ell)$-Blockstruktur. Weil $T_pG(p) \cap iT_pG(p)$ und $T_pG(p)$ beide K-invariant sind, hat man sogar: $\dim_{\mathbb{R}} K < \ell^2 + (n-\ell)^2$. Folglich gilt:

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{R}} G &= \dim_{\mathbb{R}} K + \dim_{\mathbb{R}} G(p)\\ &\le \big(\ell^2 + (n-\ell)^2 - 1\big) + (2n-1) = n^2 + 2\ell^2 - 2n(\ell - 1) - 2\\ &\le n^2 + 2\ell^2 - 2(\ell^2 - 1) - 2 = n^2.\end{aligned}$$

③: $T_pM = T_pG(p) \oplus iT_pG(p)$. Hier ist $\dim_{\mathbb{R}} T_pG(p) = \dim_{\mathbb{C}} T_pM = n$. Außerdem ist jede Matrix in K dann bereits durch Werte auf $T_pG(p)$ vollständig bestimmt, so daß K sogar isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ist. Man hat also: $\dim_R K \le \dim \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$, und das bedeutet:

$$\dim_{\mathbb{R}} G \le \tfrac{n(n-1)}{2} + n = \tfrac{n^2}{2} + \tfrac{n}{2} \le \tfrac{n^2}{2} + \tfrac{n^2}{2} = n^2. \qquad \blacksquare$$

3.2. Vektorfelder auf Siegel-Gebieten

Ein Siegel-Gebiet ist nach Abschnitt 1.4 gegeben durch:

$$U = U(K, F) = \big\{(z, w) \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k} \;\big|\; \operatorname{Im} z - F(w, w) \in K\big\} \subset \mathbb{C}^n,$$

wobei K einen spitzen Kegel und F eine K-hermitesche Form bezeichnet. In diesem Abschnitt sei mit U stets ein Siegel-Gebiet gemeint, und die im folgenden auftretenden Bezeichnungen K, F, k, n seien stets auf das Siegel-Gebiet U bezogen.

Zu dem Siegel-Gebiet U als komplexer Mannigfaltigkeit gehört ein holomorphes Tangentialbündel $TU = \bigcup_{p\in U} T_pU$. Dieses ist trivial, das heißt, man hat eine biholomorphe Abbildung $f\colon U \times \mathbb{C}^n \to TU$ mit $f(p,z) \in T_pU$. Jeder Tangentialraum T_pU ist isomorph zu $\mathbb{C}^n$.

Weil das Tangentialbündel TU trivial ist, gibt es ein System von n Vektorfeldern $\{\partial_1,\dots,\partial_n\}$, so daß $\{\partial_1(p),\dots,\partial_n(p)\}$ für jedes $p \in U$ eine Basis des Tangentialraumes T_pU ist.

Holomorphe Vektorfelder sind genau die Vektorfelder X, die sich mit holomorphen Abbildungen $f\colon U \to \mathbb{C}^n$ als Linearkombination schreiben lassen: $X(p) = \sum_{j=1}^n f_j(p)\partial_j(p)$ (f_j: Komponenten von f). Man kann also holomorphe Vektorfelder $X\colon U \to TU$ mit holomorphen Abbildungen $f\colon U \to \mathbb{C}^n$ identifizieren.

Identifiziert man das holomorphe Vektorfeld X mit der zugehörigen holomorphen Abbildung f, so erhält man den maximalen Fluß als eindeutige Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\Phi(0,z) = z; \qquad\qquad \tfrac{\partial}{\partial t}\Phi(t,z) = f(\Phi(t,z)).$$

Definition: *Ein Vektorfeld $X\colon U \to TU$ heißt **vollständig**, falls der maximale Fluß $\Phi_X(t,p)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist.*

Die reelle Lie-Algebra aus allen vollständigen, holomorphen Vektorfeldern auf U werde mit $\mathfrak{g}(U)$ bezeichnet.

Satz 3.7: *Man kann identifizieren: $\mathfrak{g}(U) \simeq \mathfrak{aut}(U) = T_{\mathrm{id}} \operatorname{Aut} U$, und es gilt: $\mathfrak{g}(U) \cap i\mathfrak{g}(U) = \{0\}$. Außerdem ist $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} U \le n^2 + 2n$ und damit auch $\mathfrak{g}(U)$ endlichdimensional.*

Beweis: Sei $\xi \in \mathfrak{aut}(U)$; die Exponentialabbildung von Seite 17 (siehe auch Einparametergruppe auf Seite 3) gibt $\exp(t\xi) \in \operatorname{Aut} U$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Zu $p \in U$ erhält man dann per $t \mapsto \exp(t\xi)\cdot p$ eine Kurve $\mathbb{R} \to U$ mit $0 \mapsto p$. Die Exponentialabbildung induziert nun ein (reelles) Vektorfeld $Y\colon U \to TU$ (f: bei $p \in U$ definierte holomorphe Abbildung):

$$Y_pf = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(\exp(t\xi)\cdot p\big)\big|_{t=0},$$

und dazu gehört ein holomorphes Vektorfeld $X := Y - iIY$. (Hier ist mit I die komplexe Struktur von U bezeichnet.) Die Kurve $\mathbb{R} \to U; t \mapsto \exp(t\xi)\cdot p$ stellt die maximale Integralkurve von X durch p dar. Daher ist das induzierte Vektorfeld X sogar vollständig, also $X \in \mathfrak{g}(U)$.

Wir haben somit per $\xi \mapsto X$ eine Abbildung $\mathfrak{aut}(U) \to \mathfrak{g}(U)$. Diese ist sogar ein Lie-Algebrenhomomorphismus (vgl. z. B. Kobayashi u. Nomizu, 1963, S. 42).

Weil U nach Satz 1.15 eine hyperbolische Mannigfaltigkeit ist, hat man gemäß Satz 3.5: $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} U \le n^2 + 2n$, die letzte Aussage des vorliegenden Satzes folgt damit direkt aus der ersten.

Sei nun $X \in \mathfrak{g}(U) \cap i\mathfrak{g}(U)$, es sei also sowohl X als auch iX ein vollständiges, holomorphes Vektorfeld. Dann erzeugen sie zusammen eine *komplexe* Einparametergruppe, die auf U operiert. Für hyperbolisches U ist das aber nicht möglich (siehe Bemerkung zu Satz 1.5). Somit ist tatsächlich: $\mathfrak{g}(U) \cap i\mathfrak{g}(U) = \{0\}$; vgl. hierzu auch Cartan (1984). ∎

Sei $X \in \mathfrak{g}(U)$, das heißt, sei $X\colon U \to TU$ ein vollständiges, holomorphes Vektorfeld. Sei weiter $f\colon U \to \mathbb{C}^n$ die zugehörige holomorphe Abbildung, mit der $X(z) = \sum_{j=1}^n f_j(z)\partial_j(z)$ für alle $z \in U$ gilt.

Zu dem vollständigen Vektorfeld gehört der maximale Fluß $\Phi\colon \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega$. Genau dann liegt ein Fixpunkt $\Phi(t, z_0) = z_0$ des Flusses vor, wenn das Vektorfeld $f(z_0) = 0$ erfüllt. Es gilt sogar noch mehr: Hat man einen Fixpunkt $\Phi(t, z_0) = z_0$ mit $T_{z_0}\Phi = \mathrm{id}$ (d. h. $\frac{\partial}{\partial z_j}\Phi_i(t,z)\big|_{z=z_0} = \delta_{ij}$), so liefert der Cartansche Eindeutigkeitssatz 3.2: $\Phi(t, z) = z$ (d. h. $f(z) = 0$) für alle z aus einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset U$, das z_0 enthält und $\Phi(t, \Omega) \subset \Omega$ erfüllt.

Sei $u \in U$ ein fester Punkt. Jedes holomorphe $f\colon U \to \mathbb{C}^n$ läßt sich um u in eine Taylorreihe $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu(z-u)$ mit homogenen Polynomen p_ν vom Grad ν entwickeln: $p_0(z) = p_0 \in \mathbb{C}^n$; $p_1(z) = \sum_{j=1}^n a_j z_j$ mit $a_j \in \mathbb{C}^n$; $p_2(z) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} z_i z_j$ mit $b_{ij} \in \mathbb{C}^n$; etc.

Für das Vektorfeld f gilt auf jeden Fall: $f(u) = p_0$. Hat f einen verschwindenden affinen Teil $p_0 = 0 = a_j$, so gilt $f(u) = 0$ und: $\frac{\partial}{\partial z_j} f(u) = 0$. Das bedeutet für den zugehörigen Fluß:

$$\forall t \in \mathbb{R}\colon \Phi(t, u) = u; \qquad \frac{\partial}{\partial z_j}\Phi_i(t, u_1, \dots, u_n) = \delta_{ij} + t \cdot \frac{\partial}{\partial z_j} f_i(u) + 0 = \delta_{ij}.$$

Sei $G := (\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}} \subset \operatorname{Aut} U$ die Einparametergruppe der Integralkurve Φ. Diese stimmt mit der Isotropiegruppe G_u überein. Weil U eine hyperbolische Mannigfaltigkeit ist, gibt es nach Satz 3.3 zu der kompakten Isotropiegruppe $G_u = G$ eine G_u-invariante Umgebung Ω von u. Auf diesem beschränkten Gebiet ist $\Phi(t, \Omega) \subset \Omega$ und damit der oben beschriebene Schluß mit dem Cartanschen Eindeutigkeitssatz möglich.

Also ist $f(z) = 0$ auf der beschränkten Umgebung Ω von u. Der Identitätssatz 3.1 liefert dann $f(z) = 0$ auf dem ganzen Gebiet U. Damit haben wir gezeigt:

Satz 3.8: *Die Vektorfelder aus $\mathfrak{g}(U)$ sind durch ihren affinen Teil bereits eindeutig bestimmt.*

Im weiteren wollen wir die Vektorfelder in $\mathfrak{g}(U)$ etwas genauer bestimmen.

Satz 3.9: I: *Ein Siegel-Gebiet $U = U(K, F)$ ist invariant unter den Transformationen:*

$$(z, w) \mapsto (z + a, w) \text{ für alle } a \in \mathbb{R}^k;$$
$$(z, w) \mapsto (z, \exp(it) \cdot w) \text{ für alle } t \in \mathbb{R};$$
$$(z, w) \mapsto (\exp(t) \cdot z, \exp(t/2) \cdot w) \text{ für alle } t \in \mathbb{R};$$
$$(z, w) \mapsto \big(z + 2iF(w, c) + iF(c, c), w + c\big) \text{ für alle } c \in \mathbb{C}^{n-k}.$$

II: *Daher enthält $\mathfrak{g}(U)$ folgende Vektorfelder ($c = (c_j) \in \mathbb{C}^{n-k}$):*

$$\partial_j\colon (z, w) \mapsto \partial_j\big|_{(z,w)} \qquad (\text{für } j \in \{1, \dots, k\}) \qquad \widehat{=}\ e_j;$$

$$\partial'\colon (z, w) \mapsto i \sum_{j=1}^{n-k} w_j \partial_{k+j}\big|_{(z,w)} \qquad \widehat{=}\ (0, iw);$$

$$\partial\colon (z, w) \mapsto \sum_{j=1}^{k} z_j \partial_j\big|_{(z,w)} + \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-k} w_j \partial_{k+j}\big|_{(z,w)} \qquad \widehat{=}\ (z, \tfrac{1}{2}w);$$

$$\partial_c\colon (z, w) \mapsto 2i \sum_{j=1}^{k} F_j(w, c)\partial_j\big|_{(z,w)} + \sum_{j=1}^{n-k} c_j \partial_{k+j}\big|_{(z,w)} \ \widehat{=}\ \big(2iF(w, c), c\big).$$

Die rechts stehenden $\mathbb{C}^n$-Vektoren ergeben sich bei der Identifizierung eines Vektorfeldes mit der zugehörigen holomorphen Abbildung (vgl. oben).

Beweis: ad I: Sei $(z, w) \in U(K, F)$, das heißt, $\operatorname{Im} z - F(w, w) \in K$.

Wegen $\operatorname{Im}(z + a) = \operatorname{Im} z$ ist die erste Aussage klar und wegen

$$F\big(\exp(it) \cdot w, \exp(it) \cdot w\big) = \exp(-it) \cdot \exp(it) \cdot F\big(w, w\big) = F(w, w)$$

auch die zweite.

Die dritte ergibt sich aus $\operatorname{Im}(\exp(t) \cdot z) = \exp(t) \cdot \operatorname{Im} z$ und

$$F(\exp(t/2) \cdot w, \exp(t/2) \cdot w) = \exp(t/2) \cdot \exp(t/2) \cdot F(w, w) = \exp(t) \cdot F(w, w)$$

sowie aus der Tatsache, daß K ein Kegel ist.

Ebenso erhält man die vierte Aussage aus:

$$F(w + c, w + c) = F(w, w) + 2 \operatorname{Re} F(w, c) + F(c, c) \text{ und}$$
$$\operatorname{Im}\big(z + 2iF(w, c) + iF(c, c)\big) = \operatorname{Im} z + 2 \operatorname{Re} F(w, c) + F(c, c).$$

ad II: Zu zeigen ist die Vollständigkeit der angegebenen Vektorfelder. Dazu bestimmt man zu jedem Vektorfeld X den zugehörigen maximalen Fluß als Lösung von $\frac{\partial}{\partial t}\Phi_X(t, u) = X(\Phi_X(t, u)); \Phi(0, u) = u$.

In den einzelnen Fällen hat man als maximale Flüsse:

$$\begin{aligned}
\Phi_{\partial_j}(t, (z, w)) &= (z, w) + t \cdot e_j, \\
\Phi_{\partial'}(t, (z, w)) &= \big(z, \exp(it)w\big), \\
\Phi_{\partial}(t, (z, w)) &= \big(\exp(t) \cdot z, \exp(\tfrac{t}{2}) \cdot w\big), \\
\Phi_{\partial_c}(t, (z, w)) &= \big(z + 2iF(w, c) \cdot t + iF(c, c) \cdot t^2, w + t \cdot c\big).
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist nach I jeweils $\Phi(t, u) \in U$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $u \in U$, das heißt, die Vektorfelder sind vollständig. ■

Im weiteren Text wollen wir die Vektorfelder ∂' und ∂ aus Satz 3.9.II sowie nach ähnlichem Muster gebildete wie folgt kürzer schreiben:

$$\partial' = i \sum_{j=1}^{n-k} w_j \partial_{k+j}, \qquad \partial = \sum_{j=1}^{k} z_j \partial_j + \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-k} w_j \partial_{k+j}.$$

Lemma 3.10: *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet mit $0 \in \Omega$. Sei $\mathfrak{d}$ eine endlichdimensionale, komplexe Lie-Unteralgebra der Lie-Algebra aller holomorphen Vektorfelder auf Ω. Enthält $\mathfrak{d}$ das Vektorfeld $d := \sum_{j=1}^n z_j \partial_j$, dann sind die Komponenten jedes Vektorfeldes in $\mathfrak{d}$ Polynome in $z_1, \dots, z_n$.*

Beweis: Sei $X \in \mathfrak{d}$. Dann kann man mit holomorphen Funktionen $p_j \colon \Omega \to \mathbb{C}$ schreiben: $X = \sum_{j=1}^n p_j \partial_j$, das heißt: $X(z) = \sum_{j=1}^n p_j(z) \partial_j\big|_z$. Jede Funktion p_j hat auf einer Umgebung von 0 eine Taylorentwicklung $p_j(z) = \sum_{\nu=0}^\infty p_{j,\nu}(z)$ mit homogenen Polynomen $p_{j,\nu}(z) = \sum_{i=1}^n a_{ij\nu} z_1^{\nu_{ij1}} \cdot \ldots \cdot z_n^{\nu_{ijn}}$ vom Grad $\nu = \nu_{ij1} + \dots + \nu_{ijn}$. Man kann das Vektorfeld X daher lokal schreiben als: $X = \sum_\nu X_\nu$ mit $X_\nu := \sum_{j=1}^n p_{j,\nu} \partial_j$.

Die Vektorfelder X_ν sind linear unabhängig, sei nämlich eine verschwindende Linearkombination gegeben:

$$0 = \sum_\nu a_\nu X_\nu = \sum_\nu a_\nu \sum_{j=1}^n p_{j,\nu}\partial_j \qquad \Longrightarrow \sum_\nu a_\nu p_{j,\nu} = 0.$$

Weil die Polynome $p_{j,\nu}$ homogen vom Grad ν sind, müssen alle Koeffizienten a_ν verschwinden.

In der Lie-Algebra $\mathcal{X}(\Omega)$ aller holomorphen Vektorfelder kann man den Kommutator berechnen:

$$\begin{aligned}[d, X_\nu] &= [\textstyle\sum_i z_i\partial_i, \sum_j p_{j,\nu}\partial_j] = \displaystyle\sum_{i,j}(z_i\partial_i p_{j,\nu}\partial_j - p_{j,\nu}\partial_j z_i\partial_i) \\ &= \sum_j(\nu p_{j,\nu}\partial_j - p_{j,\nu}\partial_j) = (\nu-1)X_\nu.\end{aligned}$$

Die adjungierte Darstellung ad bildet das Vektorfeld d auf $\operatorname{ad} d \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{d})$ ab, es gilt:

$$(\operatorname{ad} d)(X) = \sum_\nu [d, X_\nu] = \sum_\nu (\nu-1)X_\nu.$$

Für $\operatorname{ad} d = 0$ folgt direkt: $X_\nu = 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}; \nu \geq 2$, und insbesondere ist X polynomial. Ist $\operatorname{ad} d \neq 0$, so ist auch das Minimalpolynom $M(x)$ von $\operatorname{ad} d$ nicht das Nullpolynom, und man hat: $0 = M(\operatorname{ad} d)X = \sum_\nu M(\nu-1)X_\nu$. Wegen der linearen Unabhängigkeit der X_ν folgt: $M(\nu-1)X_\nu = 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$. Weil ein Polynom nur endlich viele Nullstellen aufweist, muß $X_\nu = 0$ für fast alle ν gelten.

Das Vektorfeld X ist somit zumindest lokal polynomial. Nach dem Identitätssatz 3.1 liegt auch global ein polynomiales Vektorfeld vor. ■

Satz 3.11: *Jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{g}(U)$ ist polynomial.*

Beweis: Sei $(\zeta, 0) \in U$. Durch Koordinatenwechsel $(\tilde z, \tilde w) = (z-\zeta, w)$ in $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$ erhält man ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ mit $0 \in \Omega$. Es gilt: $\tilde z_j = z_j - \zeta_j$ und $\tilde w_j = w_j$, also bleiben die Vektorfelder

$$\partial_j = \tilde\partial_j \qquad\qquad \partial' = i\sum_{j=1}^{n-k} w_j\partial_{k+j} = i\sum_{j=1}^{n-k}\tilde w_j\tilde\partial_{k+j} = \tilde\partial'$$

bei dieser Transformation unverändert. Das Vektorfeld ∂ schreibt sich in den neuen Koordinaten:

$$\partial = \sum_{j=1}^k z_j\partial_j + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-k} w_j\partial_{k+j} = \sum_{j=1}^k \tilde z_j\partial_j + \sum_{j=1}^k \zeta_j\partial_j + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-k}\tilde w_j\partial_{k+j}.$$

Von $\mathfrak{g}(U)$ bzw. $\mathfrak{g}(\Omega)$ wird eine komplexe Lie-Algebra $\mathfrak{d}$ aufgespannt. Diese ist endlichdimensional und enthält das Vektorfeld

$$d := \partial - \sum_{j=1}^k \zeta_j\partial_j - \tfrac{i}{2}\partial' = \sum_{j=1}^k \tilde z_j\partial_j + \sum_{j=1}^{n-k}\tilde w_j\partial_{k+j}.$$

Damit kann das vorherige Lemma angewendet werden, es folgt, daß jedes Vektorfeld in $\mathfrak{d}$ polynomial in den $\tilde z_1, \ldots, \tilde z_k, \tilde w_1, \ldots, \tilde w_{n-k}$ ist und somit jedes Vektorfeld in $\mathfrak{g}(U)$ polynomial in $z_1, \ldots, z_k, w_1, \ldots, w_{n-k}$ ist. ■

Man kann also schreiben: $X = \sum_{j=1}^n p_j\partial_j$ mit $p_j = \sum_{\nu,\mu=0}^\infty p_{j,\nu,\mu}$ und homogenen Polynomen $p_{j,\nu,\mu}$ vom Grad ν in den z_j und vom Grad μ in den w_j. Genauer gilt: $p_j = \sum_{\nu=0}^\infty p_{j,\nu,0} + p_{j,\nu,1}$ für $j \leq k$ und $p_j = \sum_{\nu=0}^\infty p_{j,\nu,0} + p_{j,\nu,1} + p_{j,\nu,2}$ für $j > k$. Man hat nämlich:

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{ad}\partial')X &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} i\mu p_{j,\nu,\mu}\partial_j + \sum_{j=1}^{n-k}\sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} i(\mu-1)p_{k+j,\nu,\mu}\partial_{k+j}\\
\Rightarrow \phi(\operatorname{ad}\partial')X &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \phi(i\mu)p_{j,\nu,\mu}\partial_j + \sum_{j=1}^{n-k}\sum_{\nu,\mu=0}^{\infty} \phi(i(\mu-1))p_{k+j,\nu,\mu}\partial_{k+j}.
\end{aligned}
$$

für jedes Polynom $\phi \in \mathbb{R}[x]$. Betrachtet man speziell $\phi(x) = x(x^2+1)$, so hat man wegen $\phi(0) = \phi(i) = \phi(-i) = 0$, daß alle Summanden mit $\mu \leq 1$ verschwinden. Das bedeutet, daß $(\phi(\operatorname{ad}\partial')X)(z,0) = 0$ ist für alle Punkte $(z,0) \in U$ (d. h. $\operatorname{Im} z \in K$). Der Satz 3.8 liefert nun $\phi(\operatorname{ad}\partial')X = 0$ auf ganz U. Also müssen alle Koeffizienten in $\phi(\operatorname{ad}\partial')X$ bereits verschwinden:

$$
\phi(i\mu)p_{j,\nu,\mu} = 0; \qquad\qquad \phi(i(\mu-1))p_{k+j,\nu,\mu} = 0.
$$

Wegen $\phi(i\mu) \neq 0$ für $\mu > 1$ folgt die Behauptung.

Eingesetzt führt das zu:

$$
\begin{aligned}
X &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=0}^{\infty}(p_{j,\nu,0}+p_{j,\nu,1})\partial_j + \sum_{j=1}^{n-k}\sum_{\nu=0}^{\infty}(p_{j,\nu,0}+p_{j,\nu,1}+p_{j,\nu,2})\partial_{k+j}\\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{k}(p_{j,\nu,0}+p_{j,\nu,1})\partial_j + \sum_{j=1}^{n-k}(p_{k+j,\nu,0}+p_{k+j,\nu,1}+p_{k+j,\nu,2})\partial_{k+j}\Big).
\end{aligned}
$$

Man kann nun für die einzelnen Beiträge ausrechnen:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ad}\partial(p_{j,\nu,0}\partial_j) &= \sum_{i=1}^{k}[z_i\partial_i, p_{j,\nu,0}\partial_j] + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-k}[w_i\partial_{k+i}, p_{j,\nu,0}\partial_j]\\
&= (\nu-1)\cdot p_{j,\nu,0}\partial_j;\\
\operatorname{ad}\partial(p_{j,\nu,1}\partial_j) &= (\nu-\tfrac{1}{2})\cdot p_{j,\nu,1}\partial_j;\\
\operatorname{ad}\partial(p_{k+j,\nu,0}\partial_{k+j}) &= (\nu-\tfrac{1}{2})\cdot p_{k+j,\nu,0}\partial_{k+j};\\
\operatorname{ad}\partial(p_{k+j,\nu,1}\partial_{k+j}) &= \nu\cdot p_{k+j,\nu,1}\partial_{k+j};\\
\operatorname{ad}\partial(p_{k+j,\nu,2}\partial_{k+j}) &= (\nu+\tfrac{1}{2})\cdot p_{k+j,\nu,2}\partial_{k+j}.
\end{aligned}
$$

Es ist daher sinnvoll, die Beiträge wie folgt zusammenzufassen ($\nu \in \mathbb{N}$):

$$
\begin{aligned}
X_\nu &:= \sum_{j=1}^{k} p_{j,\nu+1,0}\partial_j + \sum_{j=1}^{n-k} p_{k+j,\nu,1}\partial_{k+j} \quad \text{und} \quad X_{-1} := \sum_{j=1}^{k} p_{j,0,0}\partial_j;\\
X_{\nu+1/2} &:= \sum_{j=1}^{k} p_{j,\nu+1,1}\partial_j + \sum_{j=1}^{n-k}(p_{k+j,\nu+1,0}+p_{k+j,\nu,2})\partial_{k+j} \quad \text{und}\\
X_{-1/2} &:= \sum_{j=1}^{k} p_{j,0,1}\partial_j + \sum_{j=1}^{n-k} p_{k+j,0,0}\partial_{k+j}.
\end{aligned}
$$

Dann sind nämlich alle Vektorfelder in $\mathfrak{g}(U)$ von der Form: $X = \sum_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, und es gilt: $\operatorname{ad} \partial(X_\lambda) = [\partial, X_\lambda] = \lambda X_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$. Hier wie im ganzen restlichen Text bezeichne

$$\Lambda := \{\lambda \geq -1 \mid 2\lambda \in \mathbb{Z}\} = \{-1, -\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 1, \ldots\}$$

die Menge aller halb- und ganzzahligen reellen Zahlen größer oder gleich -1.

Das führt zu folgendem

Satz 3.12: *Bezeichnet man mit $\mathfrak{g}_\lambda$ (zu $\lambda \in \Lambda$) den Unterraum von $\mathfrak{g}(U)$, der von den Vektorfeldern X_λ gebildet wird, so gilt:*

$$\mathfrak{g}(U) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{g}_\lambda; \qquad [\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_\sigma] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\sigma}. \tag{$*$}$$

$\mathfrak{g}_\lambda$ ist der Eigenraum von $\operatorname{ad} \partial$ zum Eigenwert λ.

Jede Lie-Algebra, die die Eigenschaften ($*$) dieses Satzes erfüllt, nennt man eine *graduierte* Lie-Algebra. Insbesondere ist also $\mathfrak{g}(U)$ graduiert.

Beispiel: Die Vektorfelder aus Satz 3.9 liegen in folgenden Eigenräumen:

- $\partial_j \in \mathfrak{g}_{-1}$ für alle $j \in \{1, \ldots, k\}$;
- $\partial' \in \mathfrak{g}_0$ mit $p_{j,1,0}(z,w) = 0$ und $p_{k+j,0,1}(z,w) = iw_j$;
- $\partial \in \mathfrak{g}_0$ mit $p_{j,1,0}(z,w) = z_j$ und $p_{k+j,0,1}(z,w) = \frac{1}{2} w_j$.
- $\partial_c \in \mathfrak{g}_{-1/2}$ mit $p_{j,0,1}(z,w) = 2iF_j(w,c) = \sum_{\nu=1}^{n-k} 2iF_j(e_\nu, c) w_\nu$ und $p_{k+j,0,0} = c_j$.

Satz 3.13: *Man kann die Vektorfelder aus $\mathfrak{g}_{-1}$, $\mathfrak{g}_{-1/2}$ und $\mathfrak{g}_0$ explizit angeben:*

I: *$\mathfrak{g}_{-1}$ besteht genau aus den Vektorfeldern der Form*

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \partial_j \quad \textit{mit } a = (a_j) \in \mathbb{R}^k, \textit{ also } \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{-1} = k,$$

II: *$\mathfrak{g}_{-1/2}$ besteht genau aus den Vektorfeldern der Form*

$$\partial_c = 2i \sum_{j=1}^{k} F_j(w,c) \partial_j + \sum_{j=1}^{n-k} c_j \partial_{k+j} \quad \textit{mit } c = (c_j) \in \mathbb{C}^{n-k},$$

also $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{-1/2} = 2(n-k)$, und

III: *$\mathfrak{g}_0$ besteht aus allen Vektorfeldern der Form*

$$\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij} z_i \partial_j + \sum_{i,j=1}^{n-k} b_{ij} w_i \partial_{k+j}$$

mit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ und $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{(n-k)\times(n-k)}$, so daß:

- *$A \cdot F(x,y) = F(Bx, y) + F(x, By)$ für alle $x, y \in \mathbb{C}^{n-k}$ und*
- *$(\exp tA)K = K$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also $A \in \mathfrak{g}(K)$, wobei $\mathfrak{g}(K)$ die zur linearen Automorphismengruppe* [*] *$G(K)$ des Kegels K gehörende reelle Lie-Algebra ist.*

Es gilt: $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0 \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}(K) + (n-k)^2$.

[*] Es gilt: $G(K) = \{g \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{R}) \mid gK = K\}$, siehe Abschnitt 1.4.

Beweis: Für den Beweis wird verwendet: $\mathfrak{g}(U) \cap i\mathfrak{g}(U) = \{0\}$ (vgl. Satz 3.7).

ad I: Für alle $j \in \{1, \dots, k\}$ ist $\partial_j \in \mathfrak{g}_{-1}$. Daher muß auch jede reelle Linearkombination $\sum_{j=1}^k a_j \partial_j$ ($a_j \in \mathbb{R}$) in $\mathfrak{g}_{-1}$ sein, und zu zeigen ist, daß das bereits alle Vektorfelder in $\mathfrak{g}_{-1}$ sind.

Sei also $X \in \mathfrak{g}_{-1}$, das heißt: $X = \sum_{j=1}^k a_j \partial_j$ mit $a_j \in \mathbb{C}$. Auf jeden Fall sind $Y := \operatorname{Im} X = \sum_{j=1}^k \operatorname{Im}(a_j)\partial_j$ und $\operatorname{Re} X = \sum_{j=1}^k \operatorname{Re}(a_j)\partial_j$ in $\mathfrak{g}_{-1}$. Daher ist auch $iY = X - \operatorname{Re} X \in \mathfrak{g}_{-1}$, es folgt $Y = 0$ und somit $a_j \in \mathbb{R}$.

ad II: Nach Satz 3.9.II sind Vektorfelder der Form

$$\partial_c = 2i \sum_{j=1}^{k} F_j(w,c)\partial_j + \sum_{j=1}^{n-k} c_j \partial_{k+j} \quad \text{mit } c = (c_j) \in \mathbb{C}^{n-k}$$

vollständig, diese liegen in $\mathfrak{g}_{-1/2}$, und das sind aus Dimensionsgründen ($c \in \mathbb{C}^{n-k}$) alle. Sei nämlich

$$X = \sum_{j=1}^{k} p_{j,0,1}\partial_j + \sum_{j=1}^{n-k} b_j \partial_{k+j} \in \mathfrak{g}_{-1/2}$$

mit $b_j \in \mathbb{C}$ und $p_{j,0,1} = \sum_{\nu=1}^{n-k} a_{j\nu} w_\nu$ ($a_{j\nu} \in \mathbb{C}$). Wegen $\partial' \in \mathfrak{g}_0$ folgt:

$$(\operatorname{ad}\partial')X = i\sum_{j=1}^{k} p_{j,0,1}\partial_j - i\sum_{j=1}^{n-k} b_j \partial_{k+j} \in \mathfrak{g}_{-1/2}.$$

Die per $X \mapsto b = (b_j)$ gegebene lineare Abbildung $\mathfrak{g}_{-1/2} \to \mathbb{C}^{n-k}$ ist injektiv, denn für $X \in \mathfrak{g}_{-1/2}$ so, daß $b = 0 \in \mathbb{C}^{n-k}$ ist, hat man $iX = (\operatorname{ad}\partial')X \in \mathfrak{g}_{-1/2}$ und daher $X = 0$. Also ist jedenfalls $\dim_\mathbb{R} \mathfrak{g}_{-1/2} \le \dim_\mathbb{R} \mathbb{C}^{n-k} = 2(n-k)$.

ad III: Sei $X \in \mathfrak{g}_0$, das heißt: $\sum_{j=1}^k p_{j,1,0}\partial_j + \sum_{j=1}^{n-k} p_{k+j,0,1}\partial_{k+j}$ mit Polynomen $p_{j,1,0} = \sum_{\nu=1}^k a_{\nu j} z_\nu$ und $p_{k+j,0,1} = \sum_{\nu=1}^{n-k} b_{\nu j} w_\nu$ ($a_{\nu j}, b_{\nu j} \in \mathbb{C}$). Der zu X gehörige Fluß ist: $(\exp tX)(z,w) = \big((\exp tA)z, (\exp tB)w\big)$.

Sei $(\zeta, 0) \in U$, das heißt, $\operatorname{Im}\zeta \in K$. Dann ist wegen der vorausgesetzten Vollständigkeit: $(\exp tA)\operatorname{Im}\zeta \in K$. Für jedes $y \in K$ hat man $(\exp tA)y \in K$, also ist A reell und $(\exp tA)K = K$, das heißt: $\exp tA \in G(K)$.

Seien nun $x, y \in \mathbb{C}^{n-k}$ und $Y = 2i\sum_{j=1}^k F_j(x,y)\partial_j + \sum_{j=1}^{n-k} y_j \partial_{k+j}$. Gemäß II ist $Y \in \mathfrak{g}_{-1/2}$ und somit $[X,Y] \in [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_{-1/2}] \subset \mathfrak{g}_{-1/2}$, es gilt:

$$[X,Y] = 2i\sum_{j=1}^{k}\Big(F_j(Bx,y) - \sum_{i=1}^{k} a_{ji}F_i(x,y)\Big)\partial_j - \sum_{j=1}^{n-k}(By)_j\partial_{k+j}.$$

Daher hat man nach II: $F_j(Bx,y) - \sum_{i=1}^k a_{ji}F_i(x,y) = F_j(x,-By)$ bzw. in Matrixschreibweise: $A \cdot F(x,y) = F(Bx,y) + F(x,By)$.

Wir wählen jetzt $x = y =: w$; weil F eine K-hermitesche Form ist, haben wir $F(w,w) \in \bar{K}$ und $F(w,Bw) = \overline{F(Bw,w)}$. Wir können daher auch schreiben: $A \cdot F(w,w) = 2\operatorname{Re} F(Bw,w)$. Weiter gibt es eine positiv definite reelle Linearkombination ϕ der Komponenten von F: $\phi = \alpha_1 F_1 + \cdots + \alpha_k F_k$ mit geeigneten $\alpha_j \in \mathbb{R}$, so daß $\phi(w,w) > 0$ für alle $w \in \mathbb{C}^{n-k} \setminus \{0\}$ ist.

Sei nun $A \in \mathfrak{g}(K) \subset \mathbb{R}^{k\times k}$ vorgegeben, und seien $B_1, B_2 \in \mathbb{C}^{n-k}$ zwei Matrizen mit der Eigenschaft:

$$\forall w \in \mathbb{C}^{n-k}\colon A \cdot F(w,w) = 2\operatorname{Re} F(B_1 w, w) = 2\operatorname{Re} F(B_2 w, w).$$

Dann folgt mit $C := B_2 - B_1$: $\operatorname{Re} F(Cw,w) = 0$, das bedeutet für die einzelnen Komponenten ($j \in \{1,\dots,k\}$): $F_j(Cw,w) = -\overline{F_j(Cw,w)}$ und somit auch für ihre reelle Linearkombination: $\phi(Cw,w) = -\overline{\phi(Cw,w)}$, so daß C schiefhermitesch bezüglich ϕ ist.

Folglich ist für ein vorgegebenes A die Matrix B bereits festgelegt bis auf eine Matrix, die schiefhermitesch bezüglich ϕ ist. Daher folgt:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0 \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}_{n-k} + \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}(K) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}(K) + (n-k)^2. \qquad \blacksquare$$

Satz 3.14: *Für das Radikal $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{g}(U)$ gilt:*

$$\mathfrak{r} = \bigoplus_{\substack{2\lambda\in\mathbb{Z}\\ \lambda\geq -1}} \mathfrak{r}_\lambda \quad \textit{mit} \quad \mathfrak{r}_\lambda = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}_\lambda$$

Man hat: $\mathfrak{r}_\lambda = \mathfrak{g}_\lambda$ *für* $\lambda > 1$ *sowie:* $\mathfrak{r}_\lambda = \{0\}$ *für* $\lambda > 0$.

Beweis: ① Sei $X = \sum_\lambda X_\lambda \in \mathfrak{r}$ mit $X_\lambda \in \mathfrak{g}_\lambda$. Weil $\operatorname{ad}\partial$ ein Homomorphismus ist, hat man nach Satz 2.3: $(\operatorname{ad}\partial)(X) \in \mathfrak{r}$. Es gilt: $\operatorname{ad}\partial(X_\lambda) = \lambda X_\lambda$ (vgl. oben), also hat man für jedes $f \in \mathbb{R}[x]$: $f(\operatorname{ad}\partial)X_\lambda = f(\lambda)X_\lambda$ und folglich

$$\sum_\lambda f(\lambda)X_\lambda = f(\operatorname{ad}\partial)X \in \mathfrak{r}.$$

Nun sind nach Satz 3.11 nur endlich viele $X_\lambda \neq 0$, sei also λ_0 der größte Index, für den $X_{\lambda_0} \neq 0$ ist und $L := \left\{\lambda \in \tfrac{1}{2}\mathbb{Z} \,\middle|\, -1 \leq \lambda \leq \lambda_0\right\} \subset \Lambda$. Dann kann man (Lagrange-)Polynome $f_\mu \in \mathbb{R}[x]$ finden ($\mu \in L$), die $f_\mu(\mu) = 1$ erfüllen und Nullstellen bei allen $\lambda \in L$ außer μ aufweisen. Damit ist:

$$X_\lambda = \begin{cases} \sum_\mu f_\lambda(\mu)X_\mu \in \mathfrak{r} & \text{für } \lambda \in L; \\ 0 \in \mathfrak{r} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit hat man: $X_\lambda \in \mathfrak{r}_\lambda = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$.

② Für den zweiten Teil seien $\lambda > 1$ und $\mu \in \Lambda$, $X \in \mathfrak{g}_\lambda$ und $Y \in \mathfrak{g}_\mu$. Dann gilt: $(\operatorname{ad} X)(\operatorname{ad} Y)\mathfrak{g}_\nu \subset \mathfrak{g}_{\lambda+\mu+\nu}$ mit $\lambda + \mu + \nu > \nu$. Das bedeutet, daß 0 der einzige Eigenwert von $\operatorname{ad} X \cdot \operatorname{ad} Y$ ist, also ein nilpotenter Endomorphismus von $\mathfrak{g}(U)$ vorliegt. Dann ist auch $B_{\mathrm{ad}}(X,Y) = \operatorname{spur} \operatorname{ad} X \cdot \operatorname{ad} Y = 0$, wobei B_{ad} die Killing-Form von $\mathfrak{g}(U)$ ist. Weil μ ein beliebiges Element aus Λ ist, kann mit anderen Worten $Y \in \mathfrak{g}(U)$ beliebig gewählt werden, man hat also: $X \in \mathfrak{g}(U)^\perp$. Weil für alle $A, B \in \mathfrak{g}(U)^\perp$ gilt: $B_{\mathrm{ad}}(A,B) = \operatorname{spur} \operatorname{ad} A \cdot \operatorname{ad} B = 0$, folgt nach dem Cartanschen Kriterium (Satz 2.11) die Auflösbarkeit von $\mathfrak{g}(U)^\perp$ und somit: $X \in \mathfrak{g}(U)^\perp \subset \mathfrak{r}$. Also ist $\mathfrak{r}_\lambda = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}_\lambda \subset \mathfrak{g}_\lambda \subset \mathfrak{r}_\lambda$, woraus sich die behauptete Gleichheit $\mathfrak{r}_\lambda = \mathfrak{g}_\lambda$ ergibt.

③ Hier zeigen wir: $\mathfrak{r}_{\frac{1}{2}} = \mathfrak{r}_1 = \{0\}$. Sei $(b + ia, 0) \in U$; $a, b \in \mathbb{R}^k$. Weil das Siegel-Gebiet U invariant ist unter den Transformationen aus Satz 3.9.I, ist insbesondere auch der Punkt $(ia, 0)$ in U enthalten. Mit dem speziellen Vektorfeld $A := \sum_{\nu=1}^k a_\nu \partial_\nu \in \mathfrak{g}_{-1}$ kann man zwei lineare Abbildungen definieren:

$$\begin{aligned} \psi^A_{1/2} \colon \mathfrak{g}_{1/2} &\to \mathfrak{g}_{-1/2} \\ X &\mapsto (\operatorname{ad}\partial')(\operatorname{ad} A)X \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \psi^A_1 \colon \mathfrak{g}_1 &\to \mathfrak{g}_{-1} \\ X &\mapsto \tfrac{1}{2}(\operatorname{ad} A)^2 X. \end{aligned}$$

Für $X \in \mathfrak{g}_{1/2}$ gilt:

$$X = \sum_{j=1}^{k} p_{j,1,1}\partial_j + \sum_{j=1}^{n-k} (p_{k+j,1,0} + p_{k+j,0,2})\partial_{k+j}$$

$$\psi_{1/2}^A(X) = \sum_{j=1}^{k} \Big(\sum_{\nu=1}^{k} i a_\nu \tfrac{\partial p_{j,1,1}}{\partial z_\nu} \Big) \partial_j - \sum_{j=1}^{n-k} \Big(\sum_{\nu=1}^{k} i a_\nu \tfrac{\partial p_{k+j,1,0}}{\partial z_\nu} \Big) \partial_{k+j},$$

und man sieht, daß dann ist:

$$\begin{aligned} X(ia,0) &= \sum_{j=1}^{n-k} p_{k+j,1,0}(ia,0) \partial_{k+j}\big|_{(ia,0)} \\ &= \sum_{j=1}^{n-k} \Big(\sum_{\nu=1}^{k} i a_\nu \tfrac{\partial p_{k+j,1,0}}{\partial z_\nu} \Big) \partial_{k+j}\big|_{(ia,0)} = -\psi_\lambda^A(X)(ia,0). \end{aligned}$$

Genauso rechnet man bei $X \in \mathfrak{g}_1$ und erhält insgesamt ($X \in \mathfrak{g}_\lambda$, $\lambda \in \{\frac{1}{2}, 1\}$):

$$X(ia,0) = -\psi_\lambda^A(X)(ia,0).$$

Sei $\mathfrak{g}_{(ia,0)} := \big\{ Y \in \mathfrak{g}(U) \;\big|\; Y(ia,0) = 0 \big\}$; das ist die zu der Isotropiegruppe $\operatorname{Aut}_{(ia,0)}(U) = \big\{ g \in \operatorname{Aut} U \;\big|\; g(ia,0) = (ia,0) \big\}$ gehörende Lie-Algebra. Weil die Isotropiegruppe kompakt ist (vgl. Satz 3.4), ist auch $\mathfrak{g}_{(ia,0)}$ kompakt, das heißt, es gibt auf $\mathfrak{g}_{(ia,0)}$ eine positiv definite, invariante, symmetrische Bilinearform ϕ.

Wir betrachten nun die Komplexifizierung $\mathfrak{g}(U)^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}(U) \oplus i\mathfrak{g}(U)$ (direkte Summe nach Satz 3.7); die Lie-Algebra $\mathfrak{g}(U)$ definiert per komplexer Konjugation eine reelle Struktur τ auf $\mathfrak{g}(U)^{\mathbb{C}}$. Die Bilinearform ϕ läßt sich auf $\mathfrak{g}_{(ia,0)}^{\mathbb{C}}$ zu einer positiv definiten hermiteschen Form h_τ fortsetzen:

$$h_\tau(A + iB, C + iD) := \phi(A,C) + \phi(B,D) + i\big(\phi(B,C) - \phi(A,D)\big)$$
$$\text{bzw. kurz: } h_\tau(X,Y) = \phi(X, \tau(Y)),$$

wie man leicht nachrechnet. Des weiteren gilt dann für alle $X \in \mathfrak{g}_{(ia,0)}$ und alle $Y, Z \in \mathfrak{g}_{(ia,0)}^{\mathbb{C}}$:

$$h_\tau([X,Y], Z) = -h_\tau(Y, [X,Z]),$$

das heißt, die Form h_τ ist invariant bezüglich $\operatorname{ad} \mathfrak{g}_{(ia,0)} = \big\{ \operatorname{ad} Y \;\big|\; Y \in \mathfrak{g}_{(ia,0)} \big\}$. Daher hat jedes $\operatorname{ad} Y$ mit $Y \in \mathfrak{g}_{(ia,0)}$ rein imaginäre Eigenwerte:

$$\begin{gathered} (\operatorname{ad} Y)(X) = yX \\ \Longrightarrow\; y h_\tau(X,X) = h_\tau((\operatorname{ad} Y)(X), X) = -h_\tau(X, (\operatorname{ad} Y)(X)) = -\overline{y} h_\tau(X,X) \\ \Longrightarrow\; y = -\overline{y}. \end{gathered}$$

Insbesondere hat also $\operatorname{ad}(X + \psi_\lambda^A(X))$ nur rein imaginäre Eigenwerte.

Sei nun $X \in \mathfrak{r}_\lambda = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}_\lambda$, $\lambda \in \{\frac{1}{2}, 1\}$. Dann gilt gemäß Satz 2.3: $\psi_\lambda^A(X) \in \mathfrak{r}$ (sogar $\in \mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}_{-\lambda}$) und somit auch $X + \psi_\lambda^A(X) \in \mathfrak{r}$. Mit $\mathfrak{r}$ ist auch $\mathfrak{r} \oplus i\mathfrak{r}$ auflösbar, nach dem Satz 2.6 von Lie sind dann $\operatorname{ad} X$, $\operatorname{ad} \psi_\lambda^A(X)$ und $\operatorname{ad}(X + \psi_\lambda^A(X))$ nilpotente Endomorphismen in $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g}(U)^{\mathbb{C}})$.

Es folgt, daß $\operatorname{ad}(X + \psi_\lambda^A(X)) = 0$. Also gilt: $X + \psi_\lambda^A(X) \in Z(\mathfrak{g}(U))$ und insbesondere $0 = (\operatorname{ad} \partial)(X + \psi_\lambda^A(X)) = \frac{1}{2}(X - \psi_\lambda^A(X))$, so daß man $X = \psi_\lambda^A(X)$ hat. Wegen $X \in \mathfrak{g}_\lambda$ und $\psi_\lambda^A(X) \in \mathfrak{g}_{-\lambda}$ folgt: $X = 0$. Das heißt, es gilt: $\mathfrak{r}_\lambda = \{0\}$.

④ Hier zeigen wir als noch verbleibenden Fälle: $\mathfrak{r}_\lambda = \{0\}$ für $\lambda > 1$, wobei wir ausnutzen, daß nach ② bereits $\mathfrak{r}_\lambda = \mathfrak{g}_\lambda$ gilt. Sei zunächst $X \in \mathfrak{g}_{3/2}$. Dann ist nach ① und ②: $X \in \mathfrak{r}$ und $[\partial_i, X] \in [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_{3/2}] \subset \mathfrak{g}_{1/2}$. Also haben wir gemäß ③: $[\partial_i, X] \in \mathfrak{g}_{1/2} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{1/2} = \{0\}$. Weil $X \in \mathfrak{g}_{3/2}$ ist, hat X die Form: $\sum_{j=1}^k p_{j,2,1}\partial_j + \sum_{j=1}^{n-k}(p_{k+j,2,0} + p_{k+j,1,2})\partial_{k+j}$. Dann kann man $[\partial_i, X]$ explizit angeben: $0 = [\partial_i, X] = \sum_{j=1}^k \frac{\partial p_{j,2,1}}{\partial z_i}\partial_j + \sum_{j=1}^{n-k}(\frac{\partial p_{k+j,2,0}}{\partial z_i} + \frac{\partial p_{k+j,1,2}}{\partial z_i})\partial_{k+j}$. Das bedeutet: $\frac{\partial p_{j,2,1}}{\partial z_i} = \frac{\partial p_{k+j,2,0}}{\partial z_i} = \frac{\partial p_{k+j,1,2}}{\partial z_i} = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$. Daher verschwinden alle vorkommenden Polynome, und es folgt: $X = 0$. Also ist $\mathfrak{g}_{3/2} = \{0\}$, und genauso erhält man: $\mathfrak{g}_2 = \{0\}$.

Sei nun $X \in \mathfrak{g}_\lambda$ mit $\lambda > 2$. Hier folgt die Behauptung mit Induktion nach λ. Man hat nämlich: $[\partial_j, X] \in [\mathfrak{g}_{-1}, \mathfrak{g}_\lambda] \subset \mathfrak{g}_{\lambda-1} = \{0\}$ nach Induktionsannahme. Daraus folgt analog zu oben, daß alle in X vorkommenden Polynome verschwinden und somit $X = 0$ ist. ∎

Satz 3.15: *Zusammenfassend gilt:*

$$\mathfrak{g}(U) = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_{-1/2} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_{1/2} \oplus \mathfrak{g}_1;$$
$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{-1} \oplus \mathfrak{r}_{-1/2} \oplus \mathfrak{r}_0 \quad \mathit{mit} \quad \mathfrak{r}_\lambda = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{g}_\lambda \subset \mathfrak{g}_\lambda;$$
$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{-1} = k;$$
$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{-1/2} = 2(n-k);$$
$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{1/2} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{-1/2} - \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{r}_{-1/2};$$
$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_1 = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{-1} - \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{r}_{-1} = k - \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{r}_{-1}.$$

Beweis: Zu zeigen sind nur noch die Dimensionsformeln, wobei die ersten beiden direkt aus Satz 3.13 folgen.

Für die beiden anderen betrachten wir die halbeinfache Quotientenalgebra $\mathfrak{a} := \mathfrak{g}(U)/\mathfrak{r}$. Weil $\mathfrak{g}(U)$ und das Radikal $\mathfrak{r}$ graduierte Lie-Algebren sind und wie im Satz angegeben als direkte Summe geschrieben werden können, wobei $\mathfrak{r}_\lambda \subset \mathfrak{g}_\lambda$ gilt und wir $\mathfrak{a}_\lambda = \mathfrak{g}_\lambda/\mathfrak{r}_\lambda$ setzen, hat man die Äquivalenz:

$$(a_{-1} - b_{-1} \in \mathfrak{r}_{-1}) \wedge (a_{-1/2} - b_{-1/2} \in \mathfrak{r}_{-1/2}) \wedge \ldots \wedge (a_1 - b_1 \in \mathfrak{r}_1)$$
$$\Leftrightarrow (a_{-1} + a_{-1/2} + a_0 + a_{1/2} + a_1) - (b_{-1} + b_{-1/2} + b_0 + b_{1/2} + b_1) \in \mathfrak{r}$$

und erhält somit einen Isomorphismus: $\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{a}_{-1} + \mathfrak{a}_{-1/2} + \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_{1/2} + \mathfrak{a}_1$.

Wegen $\mathfrak{r}_{1/2} = \mathfrak{r}_1 = \{0\}$ genügt es für $\lambda \in \{\frac{1}{2}, 1\}$ zu zeigen: $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_{-\lambda} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_\lambda$, denn dann ist:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_\lambda = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_\lambda + \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{r}_\lambda = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_{-\lambda} + 0 = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{-\lambda} - \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{r}_{-1/2}.$$

Die Killing-Form B von $\mathfrak{a}$ führt nun zu einer nichtsingulären Bilinearform auf $\mathfrak{a}_{-\lambda} \times \mathfrak{a}_\lambda$, denn: Seien $X \in \mathfrak{a}_{-\lambda}$ und $Y \in \mathfrak{a}_\mu$ mit $\mu \neq \lambda$. Dann ist $\operatorname{ad} X \cdot \operatorname{ad} Y$ nilpotent und somit $B(X,Y) = \operatorname{spur} \operatorname{ad} X \cdot \operatorname{ad} Y = 0$. Ist also $B(X,Y) = 0$ für alle $Y \in \mathfrak{a}_\lambda$, so gilt bereits $B(X,Y) = 0$ für alle $Y \in \mathfrak{a}$ und daher $X = 0$, weil B nicht entartet ist. Ebenso folgt aus $Y \in \mathfrak{a}_\lambda$ und $B(X,Y) = 0$ für alle $X \in \mathfrak{a}_{-\lambda}$ bereits $Y = 0$.

Das bedeutet: $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_{-\lambda} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_\lambda$. ∎

4. Charakterisierung

Dieses Kapitel deckt sich im wesentlichen mit dem Artikel von Isaev u. Krantz (2001).

4.1. Hyperbolische Mannigfaltigkeiten und Siegel-Gebiete

Satz 4.1: *Sei $U = U(K,F) \subset \mathbb{C}^n$ mit $n \geq 4$ ein Siegel-Gebiet. Falls für die Dimension $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} U \geq n^2+1$ gilt, ist U biholomorph äquivalent zu B^n oder $\mathbb{D} \times B^{n-1}$.*

Beweis: Gemäß Definition ist

$$U = U(K,F) = \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k} \;\middle|\; \operatorname{Im} z - F(w,w) \in K\right\}$$

mit spitzem Kegel $K \subset \mathbb{R}^k$ und K-hermitescher Form F.

Für die Dimension der Automorphismengruppe $\operatorname{Aut} U$ gilt nach den Sätzen 3.15 und 3.13:

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} U &= \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}(U) \\
&= \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{-1} + \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{-1/2} + \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0 + \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{1/2} + \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_1 \\
&= \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0 + 2\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{-1} - \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{r}_{-1} + 2\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{-1/2} - \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{r}_{-1/2} \\
&\leq \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}(K) + (n-k)^2 + 2k + 2\cdot 2\cdot(n-k).
\end{aligned}$$

Die Dimension der zur linearen Automorphismengruppe $G(K)$ des Kegels K gehörenden Lie-Algebra $\mathfrak{g}(K)$ stimmt mit der Dimension von $G(K)$ überein, und diese kann man wie folgt abschätzen:

Sei $p \in K$ ein fest gewählter Punkt. Die Aktion von $G(K)$ auf K führt zu der Bahn $G(K)p$ und der Isotropiegruppe $G_p = \left\{f \in G(K) \;\middle|\; f(p) = p\right\}$, es gilt: $\dim_{\mathbb{R}} G(K) = \dim_{\mathbb{R}} G_p + \dim_{\mathbb{R}} G(K)p$. Sei $g \in G_p \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, dann gilt: $g(p) = p$, $g(K) = K$ und wegen $g(-x) = -g(x)$ (Linearität) auch $g(-K) = -K$. Folglich bleibt die beschränkte offene Menge $K \cap (p-K)$ invariant unter der Isotropiegruppe, und deswegen ist die Isotropiegruppe kompakt. Somit ist G_p konjugiert zu einer Untergruppe H von $\mathrm{O}_k(\mathbb{R})$: $PG_pP^{-1} = H \subset \mathrm{O}_k(\mathbb{R})$ mit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Sei nun $q := P \cdot p \in \mathbb{R}^k$, das bedeutet, daß H eine Untergruppe der Isotropiegruppe $H_q := \left\{A \in \mathrm{O}_k(\mathbb{R}) \;\middle|\; A \cdot q = q\right\}$ ist, man hat also: $\dim_{\mathbb{R}} G_p \leq \dim_{\mathbb{R}} H_q$.

Die Gruppe $\mathrm{O}_k(\mathbb{R})$ operiert transitiv auf der durch q verlaufenden Sphäre $S_q := \left\{x \in \mathbb{R}^k \;\middle|\; \|x\| = \|q\|\right\}$, denn für alle $A \in \mathrm{O}_k(\mathbb{R})$ und alle $s \in S_q$ gilt: $\|As\| = \|s\| = \|q\|$, also $As \in S_q$, und es gibt ein $\tilde{s} \in S_q$ mit $A\tilde{s} = s$, nämlich $\tilde{s} := {}^tAs$. Insbesondere ist die Bahn von $q \in S_q$: $\mathrm{O}_k(\mathbb{R})q = S_q$, und es gilt: $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{O}_k(\mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{R}} S_q + \dim_{\mathbb{R}} H_q$.

Mit $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{O}_k(\mathbb{R}) = \frac{k^2-k}{2}$ und $\dim_{\mathbb{R}} S_q = k-1$ folgt dann:

$$\dim_{\mathbb{R}} G_p \leq \dim_{\mathbb{R}} H_q = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{O}_k(\mathbb{R}) - \dim_{\mathbb{R}} S_q = \tfrac{k^2}{2} - \tfrac{3k}{2} + 1.$$

Weil außerdem $\dim_{\mathbb{R}} G(K)p \leq \dim_{\mathbb{R}} K \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^k = k$ ist, folgt:

$$\dim_{\mathbb{R}} G(K) \leq \tfrac{k^2}{2} - \tfrac{k}{2} + 1,$$

und man erhält insgesamt:

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} U &\le 4n - 2k + (n-k)^2 + \tfrac{k^2}{2} - \tfrac{k}{2} + 1\\ &= \tfrac{3}{2}k^2 - k(2n + \tfrac{5}{2}) + n^2 + 4n + 1.\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt: $n \ge 4$ und $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} U \ge n^2 + 1$. Im Widerspruch dazu hat man für $k > 2$: $\frac{3}{2}k^2 - k(2n+\frac{5}{2}) + n^2 + 4n + 1 < n^2 + 1$, wie man per Induktion zeigt:

Bei $n = 4$ und $k \in \{3, 4\}$ ist: $\frac{3}{2}k^2 - k(2n+\frac{5}{2}) + 4n = \frac{3}{2}k^2 - \frac{21}{2}k + 16 = -2 < 0$. Gelte nun die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}, n \ge 4$ und alle $k \in \{3, \dots, n\}$; dann folgt bei $n + 1$:

$$\tfrac{3}{2}k^2 - k\big(2(n+1) + \tfrac{5}{2}\big) + 4(n+1) \begin{cases} < -2k + 4 < 0 & \text{bei } k \le n \text{ nach Ind.-vor.;}\\ = -\frac{k^2}{2} + \frac{3k}{2} < 0 & \text{bei } k = n+1.\end{cases}$$

Daher muß hier tatsächlich $k = 1$ oder $k = 2$ sein.

Bei $k = 1$ ist $U \simeq B^n$ gemäß Satz 1.14.

Bei $k = 2$ ist $U \simeq \mathbb{D} \times B^{n-1}$, wie im restlichen Teil dieses Beweises gezeigt wird (hier hat die K-hermitesche Form F genau zwei Komponenten):

Behauptung: Die zwei Komponenten F_1 und F_2 von F sind zueinander proportional.

Beweis: Angenommen, das wäre nicht der Fall. Nach Satz 3.13 besteht $\mathfrak{g}_0$ aus allen Vektorfeldern der Form

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} z_i \partial_j + \sum_{i,j=1}^{n-2} b_{ij} w_i \partial_{k+j}$$

mit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $B = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{(n-2)\times(n-2)}$. Dabei gilt insbesondere: $A \cdot F(x,x) = 2 \operatorname{Re} F(B \cdot x, x)$ für alle $x \in \mathbb{C}^{n-2}$. Das bedeutet, daß die Matrix B bei vorgegebener Matrix A nur bis auf eine Matrix C festgelegt ist, die schiefhermitesch bezüglich der beiden (hier als unabhängig angenommenen) Komponenten F_1 und F_2 ist. Wir können o. B. d. A. annehmen, daß F_1 positiv definit ist (ansonsten bilde man geeignete Linearkombinationen der beiden Komponenten), und dann kann – wie schon im Beweis zu Satz 3.13 – die Dimension von $\mathfrak{g}_0$ höchstens $(n-2)^2 + \dim \mathfrak{g}(K)$ sein. Hier haben wir aber zusätzlich, daß C schiefhermitesch bezüglich der weiteren, von F_1 unabhängigen hermiteschen Form F_2 ist. Man erhält somit: $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0 \le (n-2)^2 - 2 + \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}(K)$. Das führt dann wie oben auf: $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} U \le n^2 - 2 + \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}(K) \le n^2$ ↯. □

Als Folgerung der soeben bewiesenen Behauptung kann U nur biholomorph äquivalent zu einem der folgenden Gebiete sein (vgl. auch Satz 1.14):

$$\begin{aligned} U_1 &:= \big\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{n-2} \;\big|\; \operatorname{Im} z_1 > 0; \operatorname{Im} z_2 - \|w\|^2 > 0\big\};\\ U_2 &:= \big\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{n-2} \;\big|\; \operatorname{Im} z_1 - \|w\|^2 > 0; \operatorname{Im} z_2 - \|w\|^2 > 0\big\}.\end{aligned}$$

Im Falle von $U \simeq U_1$ folgt mit Satz 1.14 das gewünschte Ergebnis $U \simeq \mathbb{D} \times B^{n-1}$; der Fall $U \simeq U_2$ wird im folgenden ausgeschlossen.

Wir betrachten also das Siegel-Gebiet U_2; hier sind $k = 2$ und $K =]0,\infty[^2$; für die K-hermitesche Form $F\colon \mathbb{C}^{n-k} \times \mathbb{C}^{n-k} \to \mathbb{C}^k$ setzen wir: $F(w,w) = \left(\begin{smallmatrix} \|w\|^2 \\ \|w\|^2 \end{smallmatrix}\right)$, das heißt: $F_1(w,w) = F_2(w,w) = \|w\|^2$ bzw. $F_1(x,y) = F_2(x,y) = {}^t x\overline{y}$.

Für U_2 gilt mit der graduierten Lie-Algebra $\mathfrak{g}(U_2)$ nach Satz 3.15:

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} U_2 &= \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}(U_2) \\ &= \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{-1} + \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{-1/2} + \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0 + \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{1/2} + \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_1.\end{aligned}$$

Dabei sind $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{-1} = k = 2$ und $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{-1/2} = 2 \cdot (n-k) = 2n-4$. Um die Dimensionen der drei anderen Unterräume $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_{1/2}$ und $\mathfrak{g}_1$ angeben zu können, ist eine genauere Kenntnis der zur linearen Automorphismengruppe $G(K)$ des Kegels K gehörenden Lie-Algebra $\mathfrak{g}(K)$ nötig. Aus Stetigkeitsgründen gilt: $g(\bar{K} \setminus K) = \bar{K} \setminus K$ für alle $g \in G(K)$. Im vorliegenden Fall ist dabei einfach: $\bar{K} \setminus K = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, x \geq 0 \right\} \cup \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ y \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, y \geq 0 \right\}$. Das bedeutet, daß jedes $g \in G(K)$ in der Form $x \mapsto Mx$ mit $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ geschrieben werden kann, genauer gilt:

$$G(K) = \left\{ g\colon x \mapsto Mx \,\middle|\, M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{smallmatrix}\right) \vee M = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right) \text{ mit } \alpha,\beta > 0 \right\}.$$

Weil $\exp \mathfrak{g}(K)$ die zusammenhängende Komponente von $G(K)$ erzeugt, die die Einheitsmatrix $E_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ enthält, haben wir außerdem:

$$\mathfrak{g}(K) = \left\{ A = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, \alpha,\beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Abschätzung $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0 \leq \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}(K) + (n-k)^2 = 2 + (n-2)^2$ aus Satz 3.13.III läßt sich hier durch eine genaue Angabe ersetzen: Die Bedingungen $A \in \mathfrak{g}(K)$ und $B \in \mathbb{C}^{(n-2)\times(n-2)}$ mit $A \cdot F(x,y) = F(Bx,y) + F(x,By)$ für alle $x,y \in \mathbb{C}^{n-2}$ führen für die gegebene K-hermitesche Form F mit $F_1(x,y) = F_2(x,y) = {}^t x\overline{y}$ zu $A = \alpha \cdot E_2$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$; die Matrix B ist dann durch A wie im Beweis von Satz 3.13.III bis auf eine schiefhermitesche Matrix festgelegt. Es folgt daher:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_0 = 1 + \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{u}_{n-2} = n^2 - 4n + 5.$$

Die beiden anderen Unterräume $\mathfrak{g}_{1/2}$ und $\mathfrak{g}_1$ sind trivial: $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{1/2} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_1 = 0$. Hierzu stützen wir uns auf Satake (1980, S. 213ff). Gemäß Lemma 2.5 (Satake, 1980, S. 218) gilt die Implikation: $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_1 = 0 \implies \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_{1/2} = 0$, es genügt somit, sich mit $\mathfrak{g}_1$ zu beschäftigen. Bevor wir dazu kommen, sollen die Konsequenzen notiert werden; die Dimension der Automorphismengruppe von U_2 ist dann nämlich:

$$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} U_2 = 2 + (2n-4) + (n^2 - 4n + 5) = n^2 - 2n + 3 < n^2.$$

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} U \geq n^2 + 1$, der Fall $U \simeq U_2$ kann also tatsächlich nicht eintreten.

Als letzten Beweisschritt zeigen wir $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_1 = 0$ für das Siegel-Gebiet U_2. Eine dem Satz 3.13 dieser Arbeit entsprechende explizite Angabe der Vektorfelder in $\mathfrak{g}_1$ liefert der folgende (für $k = 2$ notierte)

Satz (Satake, 1980, Prop. 2.2, S. 216f)**:** $\mathfrak{g}_1$ *besteht genau aus allen Vektorfeldern der Form*

$$X = a(z,z) \cdot \partial_z + b(z,w) \cdot \partial_w = \sum_{j=1}^{2} a_j(z,z)\partial_j + \sum_{j=1}^{n-2} b_j(z,w)\partial_{2+j};$$

dabei sind a und b zwei bilineare Abbildungen:

$$a\colon \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2; (x,y) \mapsto \big({}^t\!xA_jy\big)_{j\in\{1;2\}} \text{ mit } A_j \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ symmetrisch;}$$
$$b\colon \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{n-2} \to \mathbb{C}^{n-2}; (x,y) \mapsto \big({}^t\!xB_jy\big)_{j\in\{1;\dots;n-2\}} \text{ mit } B_j \in \mathbb{C}^{(n-2)\times 2};$$

für a und b gelten folgende einschränkende Bedingungen:

$$\forall u \in \mathbb{R}^2\colon \left(\begin{smallmatrix} a_1(u,e_1) & a_1(u,e_2) \\ a_2(u,e_1) & a_2(u,e_2)\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} {}^tuA_1 \\ {}^tuA_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{g}(K); \tag{a}$$
$$\forall x,y \in \mathbb{C}^{n-2}\colon \operatorname{Im}\big(F(x,b(e_1,y)); F(x,b(e_2,y))\big) \in \mathfrak{g}(K); \tag{b}$$
$$a(u,F(x,y)) = F(\tfrac{1}{2}b(u,x),y) + F(x,\tfrac{1}{2}b(u,y)); \tag{c}$$
$$\operatorname{Im}\sum_{j=1}^{n-2} b_j(u,e_j) = 0;$$
$$F(x,b(F(y,z),z)) = F(b(F(z,x),y),z).$$

In unserem Fall sind nur die ersten drei Bedingungen (a), (b), (c) wichtig. Aus der Bedingung (a) folgt wegen $\mathfrak{g}(K) = \big\{\left(\begin{smallmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{smallmatrix}\right) \bigm| \alpha,\beta \in \mathbb{R}\big\}$ offenbar:

$$a_1(u,e_2) = a_2(u,e_1) = 0 \text{ für alle } u \in \mathbb{R}^2. \tag{$\star$}$$

Genauso folgt aus der Bedingung (b):

$$\operatorname{Im} F_1(x,b(e_2,y)) = \operatorname{Im} F_2(x,b(e_1,y)) = 0 \text{ für alle } x,y \in \mathbb{C}^{n-2}.$$

Hier kann man statt x ohne weiteres auch ix verwenden. Wegen der Linearität der K-hermiteschen Form F in der ersten Komponente dürfen wir i vorziehen und gelangen dann zu:

$$\operatorname{Re} F_1(x,b(e_2,y)) = \operatorname{Re} F_2(x,b(e_1,y)) = 0 \text{ für alle } x,y \in \mathbb{C}^{n-2}.$$

Speziell wählen wir nun $x = b(e_2,y)$ bzw. $x = b(e_1,y)$ und erhalten so unter Ausnutzung der speziellen Form von F:

$$0 = F_1(b(e_2,y),b(e_2,y)) = \|b(e_2,y)\|^2 \implies b(e_2,y) = 0;$$
$$0 = F_2(b(e_1,y),b(e_1,y)) = \|b(e_1,y)\|^2 \implies b(e_1,y) = 0.$$

Für y kann jeder Basisvektor $e_1,\dots,e_{n-2}$ gewählt werden, und deswegen folgt insgesamt:

$$b \equiv 0 \text{ auf } \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^{n-2}.$$

Unter Ausnutzung dieses Ergebnisses lautet die Bedingung (c):

$$a(u,F(x,y)) = 0 \text{ für alle } u \in \mathbb{R}^2, x,y \in \mathbb{C}^{n-2},$$

also etwa bei $x = y$ mit $\|x\| = 1$ (dann $F(x,y) = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) = e_1 + e_2$):

$$a(u,e_1+e_2) = 0 \text{ für alle } u \in \mathbb{R}^2.$$

Zusammen mit ($\star$) erhalten wir:

$$a_1(u,e_1) = a_1(u,e_2) = a_2(u,e_1) = a_2(u,e_2) = 0 \text{ für alle } u \in \mathbb{R}^2;$$

durch Wahl von $u = e_1$ bzw. $u = e_2$ ergibt sich insgesamt:

$$a \equiv 0 \text{ auf } \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2.$$

Das bedeutet, daß $\mathfrak{g}_1$ beim Siegel-Gebiet U_2 nur das Nullvektorfeld enthält; mit anderen Worten gilt: $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}_1 = 0$. ∎

Satz 4.2: *Sei M eine zusammenhängende hyperbolische Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension $n \geq 2$. Die Dimension der Automorphismengruppe ist gemäß Satz 3.5 endlich:* $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} M \leq n^2 + 2n$. *Es gilt:*

$$\begin{aligned} &\text{I:} && \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} M \geq n^2 + 3 \implies M \simeq B^n; \\ &\text{II:} && \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} M = n^2 + 2 \implies M \simeq \mathbb{D} \times B^{n-1}; \\ &\text{III:} && \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} M = n^2 + 1 \implies (M \simeq S) \wedge (n = 3). \end{aligned}$$

Beweis: In allen drei Fällen ist $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} M > n^2$. Nach dem Satz 3.6 von Kaup operiert $\operatorname{Aut} M$ transitiv auf M, das heißt, die Mannigfaltigkeit M ist homogen. Nach dem Satz 1.16 von Nakajima folgt daraus, daß M äquivalent zu einem Siegel-Gebiet ist.

Für $n = 2$ hat man gemäß Satz 1.14 eine Äquivalenz von M zu B^2 (hier $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} B^2 = 8$, also Fall I) oder $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ (hier $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} \mathbb{D}^2 = 6$, also Fall II).

Für $n = 3$ ist M gemäß Satz 1.14 äquivalent zu: B^3 ($\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} B^3 = 12$, also Fall I), $\mathbb{D} \times B^2$ ($\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} \mathbb{D} \times B^2 = 11$, also Fall II), S ($\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} S = 10$, also Fall III) oder $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ ($\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} \mathbb{D}^3 = 9$, also nicht möglich).

Für $n \geq 4$ ist der Satz 4.1 anzuwenden. ■

4.2. Verallgemeinerung

Im vorangehenden Abschnitt wurden hyperbolische Mannigfaltigkeiten charakterisiert, die eine Automorphismengruppe mit Dimension größer oder gleich $n^2 + 1$ aufweisen ($\dim_{\mathbb{C}} M = n$). In diesem Abschnitt sollen nun etwas allgemeinere Mannigfaltigkeiten betrachtet werden, auf denen eine eigentliche Transformationsgruppe G operiert. Dabei soll die Dimension von G mindestens $n^2 + 2$ betragen. Für diese Fälle stellen die Ergebnisse des vorigen Abschnitts einen Spezialfall dar (vgl. Satz 3.5), der innerhalb dieser Verallgemeinerung reproduziert wird.

Vor der Formulierung und dem Beweis der entsprechenden Sätze zunächst ein Lemma, das für den Beweis der anschließenden Sätze benötigt wird:

Lemma 4.3: *Sei $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine zusammenhängende kompakte Untergruppe mit $\dim_{\mathbb{R}} G \geq n^2 - 2n + 3; n \geq 2$. Dann ist G konjugiert zu U_n oder SU_n (zusätzlich $e^{i\mathbb{R}}\mathrm{Sp}_2$ bei $n = 4$). Für $\dim_{\mathbb{R}} G = n^2 - 2n + 2$ gibt es (bis auf Konjugation) nur die Möglichkeit $G \simeq \mathrm{U}_1 \times \mathrm{U}_{n-1}$ (und zusätzlich Sp_2 bei $n = 4$).*

Beweis: Ⓐ Da die Lie-Gruppe G kompakt ist, ist sie nach Satz 2.27 vollständig reduzibel. Man kann also schreiben: $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ mit irreduziblen, G-invarianten komplexen Unterräumen V_j. Dabei gilt natürlich: $n = n_1 + \cdots + n_k$; $n_j := \dim_{\mathbb{C}} V_j \geq 1$.

Der Stabilisator $\operatorname{Stab}(V_j) = \{g \in G \mid \forall v \in V_j \colon g(v) = v\} = \bigcap_{v \in V_j} G_v$ ist für jedes j ein Schnitt abgeschlossener Teilmengen der kompakten Menge G und deshalb kompakt. Die Gruppe $G_j := G/\operatorname{Stab}(V_j)$ operiert dann effektiv auf V_j und ist kompakt. Wir haben damit eine treue Darstellung von G_j auf $\mathbb{C}^{n_j}$ als Matrizen $M_j \in \mathbb{C}^{n_j \times n_j}$. Nach Satz 2.29 gilt also: $G_j \simeq$ Untergruppe von $U_{n_j} \subset \mathrm{GL}_{n_j}(\mathbb{C})$ und deswegen $\dim_{\mathbb{R}} G_j \leq n_j^2$. Weil die Lie-Gruppe G auf jedem Unterraum V_j

(irreduzibel) operiert, müssen die Matrizen $M \in G$ eine Blockstruktur haben:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & M_k \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} M_1 \times \cdots \times M_k.$$

Daher hat man $G \simeq G_1 \times \cdots \times G_k$ und $\dim_{\mathbb{R}} G \le n_1^2 + \cdots + n_k^2$.

Behauptung: Gilt $n^2-2n+3 \le n_1^2+\cdots+n_k^2$ mit $2 \le n = n_1+\cdots+n_k$ und $k, n_j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so folgt bereits $k = 1$.

Beweis: Für $k = 1$ ist $n^2-2n+3 \le n_1^2$ wegen $n_1 = n \ge 2$ offensichtlich erfüllt. Zu zeigen ist nun, daß $n^2-2n+3 > n_1^2+\cdots+n_k^2$ bzw. äquivalent $2\sum_{i=1}^k n_i\big(\sum_{j=i+1}^k n_j - 1\big) + 3 > 0$ für alle $k \ge 2$ ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{k} n_i\Big(\sum_{j=i+1}^{k} n_j - 1\Big) + 3 &= 2\sum_{i=1}^{k-1} n_i\Big(\sum_{j=i+1}^{k} n_j - 1\Big) - 2n_k + 3 \\ &\ge 2\sum_{i=1}^{k-1} n_i(n_k - 1) - 2n_k + 3 \\ &= 2(n_k - 1)\Big(\sum_{i=1}^{k-1} n_i - 1\Big) + 1 \ge 1 > 0. \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung: Unter der Voraussetzung $n^2-2n+2 \le n_1^2+\cdots+n_k^2$ folgt mit analogem Beweis $k \le 2$. Bei $k = 2$ ist: $n_1 = 1$, $n_2 = n - 1$.

Für $\dim_{\mathbb{R}} G \ge n^2 - 2n + 3$ hat man also $k = 1$, so daß G irreduzibel auf $\mathbb{C}^n$ operiert. Bei $\dim_{\mathbb{R}} G = n^2 - 2n + 2$ kann außerdem der Fall $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2$ mit irreduziblen, G-invarianten V_1, V_2 mit $\dim_{\mathbb{C}} V_1 = 1$ und $\dim_{\mathbb{C}} V_2 = n - 1$ eintreten.

Ⓑ Sei $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{u}_n$ die Lie-Algebra von G und $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ ihre Komplexifizierung. Da G zusammenhängend ist und irreduzibel auf $\mathbb{C}^n$ operiert, ist auch $\mathfrak{g}$ auf $\mathbb{C}^n$ irreduzibel (mit Darstellung $T_e \operatorname{id} = \operatorname{id}$), wie man mit Satz 2.2 („Ein Untervektorraum $V \subset \mathbb{C}^n$ ist genau dann G-invariant, wenn V $\mathfrak{g}$-invariant ist.") schließt. Daraus folgt direkt, daß $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ auf $\mathbb{C}^n$ irreduzibel ist: Sei nämlich $V \subset \mathbb{C}^n$ mit $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} V \subset V$ gegeben, dann ist speziell $\mathfrak{g}V \subset V$, also $V = \{0\}$ oder $V = \mathbb{C}^n$. Gemäß Satz 2.23 ist nun entweder $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}\operatorname{id}$ mit einem halbeinfachen Ideal $\mathfrak{h}$ oder $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}$ selbst ist halbeinfach.

Auf jeden Fall kann man $\mathfrak{h}$ gemäß Satz 2.25 in eine direkte Summe einfacher Ideale zerlegen: $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_m$, und die Darstellung von $\mathfrak{h}$ auf $\mathbb{C}^n$ (irreduzibel, treu als $\operatorname{id}\colon \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$) ist das Tensorprodukt gewisser irreduzibler, treuer Darstellungen (V_j, ϱ_j) der $\mathfrak{h}_j$. Es gilt: $n^2 - 2n + 1 \le \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$, sowie $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}_j \le n_j^2$ mit $n_j := \dim_{\mathbb{C}} V_j \ge 2$ und $n = n_1 \cdot \ldots \cdot n_m$.

Behauptung: Gilt $n = n_1 \cdot \ldots \cdot n_m$; $m \ge 2$; $n_j \ge 2$ für $j \in \{1, \ldots, m\}$, so folgt: $\sum_{j=1}^m n_j^2 \le n^2 - 2n$.

Beweis: Für $m = 2$ hat man:

$$n_1 + n_2 \le 2\max(n_1, n_2) \le \min(n_1, n_2)\max(n_1, n_2) = n \qquad (*)$$
$$\Rightarrow (n_1 + n_2)^2 \le n^2$$
$$\Rightarrow n_1^2 + n_2^2 \le n^2 - 2n.$$

Per Induktion schließt man für $m + 1$ $(n = n_1 \cdot \ldots \cdot n_m)$:

$$\sum_{j=1}^{m+1} n_j^2 \le n^2 - 2n + n_{m+1}^2 < n^2 + n_{m+1}^2$$
$$= (n + n_{m+1})^2 - 2n \cdot n_{m+1} \overset{(*)}{\le} (n \cdot n_{m+1})^2 - 2 \cdot n \cdot n_{m+1}. \ \Box$$

Mit der soeben gezeigten Behauptung kann man nun folgern:

$$n^2 - 2n + 1 \le \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = \sum_{j=1}^{m} \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}_j \le \sum_{j=1}^{m} n_j^2 \begin{cases} \le n^2 - 2n & \text{für } m \ge 2 \ \lightning \\ = n^2 & \text{für } m = 1. \end{cases}$$

Es muß daher $m = 1$ sein, und somit ist $\mathfrak{h}$ einfach.

Jetzt kann man ausnutzen, daß die minimalen Dimensionen irreduzibler, treuer Darstellungen $\varrho\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(V)$ komplexer, einfacher Lie-Algebren bekannt sind (siehe Tabelle auf dieser Seite, neben den eingetragenen gibt es keine weiteren komplexen einfachen Lie-Algebren, wie man per Klassifikation mit den ebenfalls aufgeführten Dynkindiagrammen zeigen kann).

Komplexe, einfache Lie-Algebren $\mathfrak{h}$ mit $\varrho\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(V)$			
Dynkindiagramm	$\mathfrak{h}$	$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$	$\dim_{\mathbb{C}} V$
1 2 3 $\cdots$ ℓ $(\ell = k-1)$	$\mathfrak{sl}_k(\mathbb{C}); k \ge 2$	$k^2 - 1$	k
1 2 3 $\cdots$ $\ell-2$ $\ell-1$ ℓ $(k = 2\ell)$ 1 2 3 $\cdots$ $\ell-1$ ℓ $(k = 2\ell+1)$	$\mathfrak{o}_k(\mathbb{C}); k \ge 7$	$\frac{k(k-1)}{2}$	k
1 2 3 $\cdots$ $\ell-1$ ℓ $(\ell = k)$	$\mathfrak{sp}_k(\mathbb{C}); k \ge 2$	$2k^2 + k$	$2k$
1 2 3 4 5 6	$\mathfrak{e}_6$	78	27
1 2 3 4 5 6 7	$\mathfrak{e}_7$	133	56
1 2 3 4 5 6 7 8	$\mathfrak{e}_8$	248	248
1 2 3 4	$\mathfrak{f}_4$	52	26
1 2	$\mathfrak{g}_2$	14	7

Hier ist $V = \mathbb{C}^n$, also $\dim_{\mathbb{C}} V = n$; mit dieser Voraussetzung sowie obigem $n^2 - 2n + 1 \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$ erhält man in den einzelnen in der Tabelle aufgeführten Fällen:

- $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}); n \geq 2$: Dieser Fall ist möglich, wenn
$$\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = (\dim_{\mathbb{C}} V)^2 - 1 = n^2 - 1.$$
- Bei $\mathfrak{h} = \mathfrak{o}_n(\mathbb{C}); n \geq 7$ ist
$$n^2 - 2n + 1 \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = \frac{n(n-1)}{2}$$
nur erfüllt für $n^2 - 2n + 1 = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$ und $n = 1$ oder $n = 2$, dieser Fall kann wegen $n \geq 7$ also nicht eintreten.
- Bei $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}_k(\mathbb{C}); k \geq 2$ ist $n = \dim_{\mathbb{C}} V = 2k \geq 4$. Nur für $n = 4$ wird
$$n^2 - 2n + 1 \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = 2k^2 + k = \tfrac{1}{2}(n^2 + n)$$
gültig. Dann muß $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = n^2 - 2n + 2 = 10$ sein.
- $\mathfrak{h} \in \{\mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8, \mathfrak{f}_4, \mathfrak{g}_2\}$: Für $n = \dim_{\mathbb{C}} V$ ist stets $n^2 - 2n > \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$, wie man leicht nachrechnet. Daher kommen diese fünf exzeptionellen Lie-Algebren hier nicht in Frage.

Ⓒ Jetzt müssen die verschiedenen Möglichkeiten für $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ in Betracht gezogen werden:

- $\dim_{\mathbb{R}} G \geq n^2 - 2n + 3$: Für einfaches $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}$ ist $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = \dim_{\mathbb{R}} G$, daher folgt gemäß Ⓑ: $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Weil $\mathfrak{g}$ als Lie-Algebra einer kompakten Lie-Gruppe kompakt ist und $\mathfrak{su}_n$ eine kompakte reelle Form von $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ ist, folgt mit Satz 2.19: $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{su}_n$, das heißt, es gibt ein $\varphi \in \operatorname{Aut} \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ mit $\mathfrak{g} = \varphi(\mathfrak{su}_n)$. Jeder Automorphismus φ führt aber $\mathfrak{su}_n$ in sich selbst über, so daß wir sogar $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}_n$ haben. Nach der Folgerung zu Satz 2.1 ist dann $\boxed{G \simeq \mathrm{SU}_n}$.

  Ist $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}\,\mathrm{id}$, so ist $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = \dim_{\mathbb{R}} G - 1$; hier gibt es nach Ⓑ die Möglichkeiten $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ oder $\mathfrak{h} \simeq \mathfrak{sp}_2(\mathbb{C})$ bei $n = 4$. Dann ist $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ oder $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{sp}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}\,\mathrm{id}$. Daraus erhält man (wieder mit Satz 2.19): $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{u}_n$ bzw. $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R} \oplus \mathfrak{sp}_2$ und daher: $\boxed{G \simeq \mathrm{U}_n}$ bzw. $\boxed{G \simeq e^{i\mathbb{R}}\mathrm{Sp}_2}$.
- $\dim_{\mathbb{R}} G = n^2 - 2n + 2$:
  a) G operiert irreduzibel auf $\mathbb{C}^n$. Wäre $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}\,\mathrm{id}$, so hätte man $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = \dim_{\mathbb{R}} G - 1 = n^2 - 2n + 1$, was keiner der in Ⓑ untersuchten Fälle erfüllt. Somit ist $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}$ zwangsläufig einfach, was bedeutet, daß $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = \dim_{\mathbb{R}} G$ ist und nach Ⓑ daher $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{sp}_2(\mathbb{C})$ mit $n = 4$ gilt. Das heißt: $\boxed{G \simeq \mathrm{Sp}_2}$.
  b) $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus V_2$ mit irreduziblen V_j, $\dim_{\mathbb{C}} V_1 = 1$, $\dim_{\mathbb{C}} V_2 = n - 1$. Hier erhält man direkt: $\boxed{G \simeq \mathrm{U}_1 \times \mathrm{U}_{n-1}}$. ■

Satz 4.4 (Greene, Krantz, Bland, Duchamp, Kalka)**:** *Sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit mit einer kompakten Gruppe $G \subset \operatorname{Aut} M$ von Automorphismen, die einen Punkt $p \in M$ festläßt und transitiv auf komplexen Richtungen bei p operiert, das heißt: $G \subset G_p$ und*

$$\forall v, w \in T_pM \simeq \mathbb{C}^n \ \exists g \in G\colon g(v) = \lambda w \text{ mit geeignetem } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Dann ist M biholomorph äquivalent zu B^n, $\mathbb{C}^n$ oder $\mathbb{P}^n$.

Beweis: siehe Greene und Krantz (1985) sowie Bland, Duchamp und Kalka (1987) ∎

Satz 4.5: *Sei M eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension $n \geq 2$, dabei operiere $G \subset \operatorname{Aut} M$ eigentlich auf M. Falls $\dim_{\mathbb{R}} G \geq n^2 + 3$ gilt, ist M biholomorph äquivalent zu B^n oder $\mathbb{C}^n$ oder $\mathbb{P}^n$.*

Beweis: Sei $p \in M$ und $G_p = \{g \in G \mid g(p) = p\}$ die Isotropiegruppe von p in G. Da die Bahnen der Aktion von G auf M Teilmengen von M darstellen, ist ihre (reelle) Dimension höchstens so groß wie die doppelte komplexe Dimension von M, also höchstens $2n$. Damit folgt für die Dimension der Isotropiegruppe:

$$\dim_{\mathbb{R}} G_p = \dim_{\mathbb{R}} G - \dim_{\mathbb{R}} G(p) \geq n^2 + 3 - 2n.$$

Nach Satz 3.4 ist die Isotropiegruppe kompakt und die Isotropiedarstellung $T_p\colon G_p \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ treu. Die Untergruppe $T_p(G_p)$ von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ist kompakt, weil T_p stetig ist, und hat eine Dimension von mindestens $n^2 + 3 - 2n$, weil T_p treu ist.

Mit dem Lemma 4.3 folgt nun, daß die zusammenhängende Untergruppe $T_p(G_p^c)$ mit G_p^c als zusammenhängender Komponente der Identität in G_p konjugiert ist zu U_n oder SU_n.

Wir zeigen nun, daß U_n und SU_n transitiv auf komplexen Richtungen in $T_pM \simeq \mathbb{C}^n$ operieren. Dann liefert der Satz 4.4, daß M biholomorph äquivalent ist zu B^n, $\mathbb{C}^n$ oder $\mathbb{P}^n$.

Seien $v, w \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0 \neq w$ und $\mathcal{S} = \{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis von $\mathbb{C}^n$. Sei i (bzw. j) der kleinste Index, für den die Komponente $v_i \neq 0$ (bzw. $w_j \neq 0$) ist. Durch Tausch des Vektors e_i aus $\mathcal{S}$ gegen v bzw. des Vektors e_j gegen w erhält man dann neue Basen $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$. Seien A und B die dazugehörigen Basiswechselmatrizen. Außerdem sei S die Basiswechselmatrix, die in $\mathcal{S}$ die Vektoren e_i und e_j vertauscht. Sei $\tilde{P} := B{\cdot}S{\cdot}A^{-1}$, dann gilt: $\tilde{P}{\cdot}v = B{\cdot}S{\cdot}A^{-1}{\cdot}v = B{\cdot}S{\cdot}e_i = B{\cdot}e_j = w$.

Nun setzen wir $\lambda := (\det \tilde{P})^{-\frac{1}{n}} \in \mathbb{C}$ (irgendeine n-te Wurzel) und $P := \lambda \cdot \tilde{P}$, dann ist: $\det P = \det(\lambda E_n) \cdot \det \tilde{P} = \lambda^n \cdot \det \tilde{P} = 1$, damit hat man: $P \cdot w = \lambda \cdot v$ mit $P \in \mathrm{SU}_n$. Folglich operiert SU_n und damit auch U_n transitiv auf komplexen Richtungen in T_pM.

Bei $n = 4$ gibt es den zusätzlichen Fall $T_p(G_p^c) \simeq e^{i\mathbb{R}}\mathrm{Sp}_2$. Hierzu zeigen wir: Die symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}_2 = \mathrm{Sp}_2(\mathbb{C}) \cap \mathrm{U}_4$ operiert transitiv auf der Sphäre $S_4 := \{z \in \mathbb{C}^4 \mid |z| = 1\}$. Dann gibt es nämlich für alle $v, w \in \mathbb{C}^4$ mit $v \neq 0 \neq w$ ein $A \in \mathrm{Sp}_2$ mit $A \cdot \frac{v}{|v|} = \frac{w}{|w|}$. Setzt man $\lambda := \frac{|v|}{|w|}$, so ist $A \cdot v = \lambda \cdot w$, und folglich operiert Sp_2 und damit auch $e^{i\mathbb{R}}\mathrm{Sp}_2$ transitiv auf komplexen Richtungen in $\mathbb{C}^4$. Mit Satz 4.4 folgt dann, daß M biholomorph äquivalent ist zu B^4, $\mathbb{C}^4$ oder $\mathbb{P}^4$.

Sei $s \in S_4$. Für alle $A \in \mathrm{Sp}_2 \subset \mathrm{U}_4$ gilt: $|A \cdot s|^2 = \langle As|As\rangle = \langle s|s\rangle = 1$, also operiert Sp_2 tatsächlich auf S_4. Um zu zeigen, daß diese Aktion transitiv ist, genügt es wegen der Gruppeneigenschaft von Sp_2 zu zeigen, daß der Nordpol e_1 mit einer Matrix aus Sp_2 auf s abgebildet werden kann.

Sei $b := (-\overline{s_3}, -\overline{s_4}, \overline{s_1}, \overline{s_2})^* \in S_4$, es gilt: $\langle b|s\rangle = b^* \cdot s = 0$, das heißt, b und s sind orthogonal. Sei mit a und $c := (-\overline{a_3}, -\overline{a_4}, \overline{a_1}, \overline{a_2})^*$ ein weiteres Zweiersystem orthogonaler Einheitsvektoren gegeben, das im $\mathbb{C}^4$ so plaziert werde, daß $\{s, a, b, c\}$ ein Orthonormalsystem ist. Dann ist die Matrix $A := (s, a, b, c) \in \mathrm{U}_4$ unitär und bildet den Nordpol auf $A \cdot e_1 = s$ ab. Weiter gilt:

$$J_2 \cdot A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot (s, a, b, c) = (-\overline{b}, -\overline{c}, \overline{s}, \overline{a}) = (\overline{s}, \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \overline{A} \cdot J_2.$$

Das bedeutet: ${}^tA \cdot J_2 \cdot A = {}^tA \cdot \overline{A} \cdot J_2 = J_2$, also $A \in \mathrm{Sp}_2(\mathbb{C})$ und insgesamt $A \in \mathrm{Sp}_2$. ∎

Im vorigen Satz gilt die Voraussetzung $\dim_{\mathbb{R}} G \geq n^2 + 3$. Das Lemma 4.3 ist so formuliert, daß es auch noch für den Fall $\dim_{\mathbb{R}} G \geq n^2 + 2$ verwendet werden kann. Dann treten weitere Möglichkeiten für die zusammenhängende Gruppe $T_p(G_p^c) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ auf. Zu den im Satz bereits behandelten Fällen U_n, SU_n und $e^{i\mathbb{R}}\mathrm{Sp}_2$ (bei $n = 4$) kommen dann Sp_2 (bei $n = 4$) und $\mathrm{U}_1 \times \mathrm{U}_{n-1}$ hinzu. Bei $T_p(G_p^c) \simeq \mathrm{Sp}_2$ kann die gleiche Argumentation wie bei $T_p(G_p^c) \simeq e^{i\mathbb{R}}\mathrm{Sp}_2$ verwendet werden (siehe Beweis des voranstehenden Satzes). Auch hier folgt also: M ist biholomorph äquivalent zu B^n oder $\mathbb{C}^n$ oder $\mathbb{P}^n$.

Es bleibt übrig: $T_p(G_p^c) \simeq \mathrm{U}_1 \times \mathrm{U}_{n-1}$. Hier ist die Situation wegen des Produktes komplizierter. Wenn allerdings auch die Mannigfaltigkeit M in ein Produkt $M_1 \times M_2$ aufspaltet, so daß U_1 auf T_pM_1 und U_{n-1} auf T_pM_2 operiert, sind wir für die einzelnen Faktoren in der gleichen Lage wie zuvor und können mit dem Satz 4.4 schließen: M_1 biholomorph äquivalent zu $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{P}$ sowie M_2 biholomorph äquivalent zu B^{n-1}, $\mathbb{C}^{n-1}$ oder $\mathbb{P}^{n-1}$.

Meine Behauptung ist nun, daß es die beschriebene Zerlegung $M = M_1 \times M_2$ tatsächlich immer gibt. Der Nachweis dieser Vermutung sprengt aber den Rahmen dieser Diplomarbeit, so daß ich mich damit begnüge, das wünschenswerte Ergebnis zusammengefaßt als Satz zu formulieren:

Satz 4.6 (Vermutung)**:** *Sei M eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension $n \geq 2$, dabei operiere $G \subset \mathrm{Aut}\, M$ eigentlich auf M. Falls $\dim_{\mathbb{R}} G \geq n^2 + 2$ gilt, ist M biholomorph äquivalent zu einem der folgenden:*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{D} \times B^{n-1}; & & \mathbb{C} \times B^{n-1}; & & \mathbb{P} \times B^{n-1}; \\ \mathbb{D} \times \mathbb{C}^{n-1}; & B^n; & \mathbb{C}^n; & \mathbb{P}^n; & \mathbb{P} \times \mathbb{C}^{n-1}; \\ \mathbb{D} \times \mathbb{P}^{n-1}; & & \mathbb{C} \times \mathbb{P}^{n-1}; & & \mathbb{P} \times \mathbb{P}^{n-1}. \end{array}$$

Neben dieser Vermutung wäre es sicher auch interessant zu untersuchen, inwiefern eine weitere Reduktion der Voraussetzung auf $\dim_{\mathbb{R}} G \geq n^2 + 1$ möglich ist, wobei man auf jeden Fall deutlich mehr mögliche Mannigfaltigkeiten erhält. Mit diesem Ausblick möchte ich diese Arbeit abschließen.

Anhang

A. Beweis von Lemma 1.9

In diesem Kapitel bezeichne M stets einen zusammenhängenden, lokal-kompakten, metrischen Raum, also beispielsweise eine zusammenhängende hyperbolische Mannigfaltigkeit.

Lemma 1.9: *Sei $(f_n)_\mathbb{N}$ eine Folge von Isometrien auf M, und für ein $p \in M$ habe $(f_n(p))_\mathbb{N}$ einen Häufungspunkt. Es gibt dann eine Teilfolge $(f_{n_k})_\mathbb{N}$, die punktweise gegen eine Isometrie $f\colon M \to M$ konvergiert.*

Der Beweis nach Kobayashi u. Nomizu (1963, S. 46ff) verläuft in mehreren Schritten und ist auf die noch folgenden Lemmata verteilt. Wir greifen hier vor und fügen die noch zu zeigenden Einzelteile bereits zum Beweis zusammen:

Beweis: Nach Lemma A.2 gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_\mathbb{N}$, so daß $(f_{n_k}(x))_\mathbb{N}$ für alle $x \in M$ konvergiert. Durch die Setzung $f(x) := \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x)$ erhält man eine Abbildung $f\colon M \to M$, und diese ist nach Lemma A.3 bereits eine Isometrie. ■

Mit $B_r(x)$ sei stets die offene Kugel $\{y \in M \mid d_M(x,y) < r\}$ vom Radius r um $x \in M$ bezeichnet. Die $B_r(x)$ bilden eine Basis der Topologie von M, und für alle Isometrien f gilt wegen der Invarianz der Metrik: $f(B_r(x)) = B_r(f(x))$.

Lemma A.1: *Sei $p \in M$ und sei $\varepsilon > 0$ so, daß $B_{4\varepsilon}(p)$ einen kompakten Abschluß hat (M ist lokal-kompakt, also hat p eine kompakte Umgebung; sei ε so klein, daß $\bar{B}_{4\varepsilon}(p)$ in dieser Umgebung liegt). Sei $(f_n)_\mathbb{N}$ eine Folge von Isometrien, so daß $(f_n(x))_\mathbb{N}$ für ein $x \in B_\varepsilon(p)$ konvergiert.*

I: *Es gibt eine kompakte Menge K und ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $f_n(B_\varepsilon(p)) \subset K$ für jedes $n > N$.*

II: *Es gibt eine Teilfolge $(f_{n_k})_\mathbb{N}$ von $(f_n)_\mathbb{N}$, so daß $(f_{n_k}(y))_\mathbb{N}$ für jedes $y \in B_\varepsilon(p)$ konvergiert.*

Beweis: ad I: Weil $(f_n(x))_\mathbb{N}$ konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n > N$ gilt: $d_M\big(f_n(x), f_N(x)\big) < \varepsilon$. Für beliebige $y \in B_\varepsilon(p)$ liefert dann die Dreiecksungleichung unter Ausnutzung, daß f_n und f_N Isometrien sind:

$$\begin{aligned} d_M\big(f_n(y), f_N(p)\big) &\le d_M\big(f_n(y), f_n(x)\big) + d_M\big(f_n(x), f_N(x)\big) + d_M\big(f_N(x), f_N(p)\big) \\ &= d_M(y,x) + d_M\big(f_n(x), f_N(x)\big) + d_M(x,p) \\ &< 2\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß $f_n(B_\varepsilon(p))$ enthalten ist in $B_{4\varepsilon}(f_N(p)) = f_N(B_{4\varepsilon}(p))$. Weil $B_{4\varepsilon}(p)$ einen kompakten Abschluß hat und f_N stetig ist, ist auch der Abschluß K von $B_{4\varepsilon}(f_N(p))$ kompakt und folglich $f_n(B_\varepsilon(p)) \subset K$ für alle $n > N$.

ad II: Weil M separabel ist, existiert eine abzählbare Menge $\{x_j \mid j \in \mathbb{N}\}$, die dicht in $B_\varepsilon(p)$ liegt. Nach I gibt es eine kompakte Menge K und ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $f_n(B_\varepsilon(p)) \subset K$ für alle $n > N$ gilt. Insbesondere ist $(f_n(x_0))_\mathbb{N}$ für $n > N$ eine Folge in K und hat damit eine in K konvergente Teilfolge $(f_{0;\ell}(x_0))_\mathbb{N}$. Ebenso hat dann $(f_{0;\ell}(x_1))_\mathbb{N}$ eine in K konvergente Teilfolge $(f_{1;\ell}(x_1))_\mathbb{N}$. Für jedes $j \in \mathbb{N}$

können wir zu $(f_{j;\ell}(x_{j+1}))_{\mathbb{N}}$ eine in K konvergente Teilfolge $(f_{j+1;\ell}(x_{j+1}))_{\mathbb{N}}$ bilden. Die diagonale Teilfolge $(f_{\ell;\ell}(x_j))_{\mathbb{N}}$ konvergiert dann für alle $j \in \mathbb{N}$. Um zu zeigen, daß die Folge $(f_{\ell;\ell}(y))_{\mathbb{N}}$ sogar für alle $y \in B_\varepsilon(p)$ konvergiert, schreiben wir der Einfachheit halber wieder $(f_n)_{\mathbb{N}}$ statt $(f_{\ell;\ell})_{\mathbb{N}}$.

Sei also $y \in B_\varepsilon(p)$ beliebig und $\delta > 0$. Wir wählen eines der abzählbar vielen x_j, so daß $d_M(y, x_j) < \frac{\delta}{3}$. Weil konvergente Folgen Cauchyfolgen sind, gibt es ein $N' \in \mathbb{N}$, so daß $d(f_n(x_j), f_m(x_j)) < \frac{\delta}{3}$ für alle $n, m > N'$ gilt. Es folgt nun mit Hilfe der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d_M\big(f_n(y), f_m(y)\big) \leq d_M\big(f_n(y), f_n(x_j)\big) & \\ + d_M\big(f_n(x_j), f_m(x_j)\big) + d_M\big(f_m(x_j), f_m(y)\big) & \\ = 2d_M(y, x_j) + d_M\big(f_n(x_j), f_m(x_j)\big) < \delta. & \end{aligned}$$

Somit ist auch $(f_n(y))_{\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Nach I ist andererseits $f_n(y) \in K$ für alle $n > N$. Weil ein kompakter metrischer Raum vollständig ist, konvergiert die Folge $(f_n(y))_{\mathbb{N}}$. ■

Lemma A.2: *Sei $(f_n)_{\mathbb{N}}$ eine Folge von Isometrien auf M, so daß $(f_n(p))_{\mathbb{N}}$ für ein $p \in M$ konvergiert. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{\mathbb{N}}$, so daß $(f_{n_k}(y))_{\mathbb{N}}$ für alle $y \in M$ konvergiert.*

Bemerkung: Im Beweis wird der Zusammenhang von M benutzt.

Beweis: Weil M lokal-kompakt ist, kann man zu jedem $x \in M$ ein $\varepsilon_x > 0$ wählen, so daß $\bar{B}_{4\varepsilon_x}(x)$ kompakt ist. Zur Abkürzung sei jeweils $V(x) := B_{\varepsilon_x}(x)$. Wenn wir in M eine endliche Anzahl von Punkten $x_1, \ldots, x_N$ mit dazugehörigen $V(x_1), \ldots, V(x_N)$ haben, so daß je zwei aufeinanderfolgende $V(x_j)$, $V(x_{j+1})$ mindestens einen gemeinsamen Punkt haben, so sprechen wir von einer *Kette relativ kompakter Umgebungen.*

Jeden Punkt $x \in M$ kann man – ausgehend von p – durch eine Kette relativ kompakter Umgebungen erreichen. Sei nämlich P die Menge aller Punkte $x \in M$, die von p über eine Kette relativ kompakter Umgebungen erreichbar sind. Weil M zusammenhängend ist, reicht es zu zeigen, daß P offen und abgeschlossen ist:

- Sei $x \in P$; jeder Punkt aus $V(x)$ ist dann selbstverständlich durch eine Kette erreichbar, also ist $V(x) \subset P$ und folglich P offen.

- Weiter ist P auch abgeschlossen: Sei $x \in \bar{P}$; dann gibt es ein $y \in P \cap V(x)$, und das heißt, daß mittels $V(y)$ auch x durch eine Kette erreichbar ist.

Wegen der Separabilität von M gibt es eine abzählbare Menge $\{x_j \mid j \in \mathbb{N}\}$, die dicht in M liegt. Nach obigen Überlegungen können wir jedes x_j durch eine Kette relativ kompakter Umgebungen von p aus erreichen. Nach Voraussetzung konvergiert $(f_n(p))_{\mathbb{N}}$. Durch wiederholtes Anwenden von Lemma A.1 läßt sich die Konvergenz von Teilfolgen auf weitere Punkte ausdehnen:

Sei $V(p) =: V_1, V_2, \ldots, V_s := V(x_1)$ eine p und x_1 verbindende Kette relativ kompakter Umgebungen. Nach Lemma A.1 gibt es eine Teilfolge $(f_{n_\alpha})_{\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{\mathbb{N}}$, so daß $(f_{n_\alpha}(x))_{\mathbb{N}}$ für alle $x \in V_1$ konvergiert, insbesondere also für den V_1 und V_2 gemeinsamen Punkt; daher gibt es eine Teilfolge $(f_{n_\beta})_{\mathbb{N}}$ von $(f_{n_\alpha})_{\mathbb{N}}$, so daß

$(f_{n_\beta}(x))_{\mathbb{N}}$ auch für alle $x \in V_2$ konvergiert, etc. Durch fortgesetztes Bilden von Teilfolgen entsteht schließlich eine Teilfolge $(f_{1;\ell})_{\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{\mathbb{N}}$, mit der $(f_{1;\ell}(x_1))_{\mathbb{N}}$ konvergiert.

Genauso schließt man weiter, daß es eine Teilfolge $(f_{2;\ell})_{\mathbb{N}}$ von $(f_{1;\ell})_{\mathbb{N}}$ gibt, so daß $(f_{2;k}(x_2))_{\mathbb{N}}$ konvergiert, etc. Durch Wahl der Diagonalfolge erhalten wir eine Folge $(f_{\ell;\ell})_{\mathbb{N}}$, so daß $(f_{\ell;\ell}(x_j))_{\mathbb{N}}$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ konvergiert. Zur Vereinfachung sei diese Folge mit $(f_{n_k})_{\mathbb{N}}$ bezeichnet.

Sei nun $y \in M$ ein beliebiger Punkt. Weil $\{x_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ dicht in M liegt, enthält $V(y)$ mindestens ein x_j. Nach Lemma A.1.I gibt es ein N und ein kompaktes K, so daß $f_{n_k}(V(y)) \subset K$ für alle $k > N$ gilt. Wie im Beweis von Lemma A.1.II folgt, daß $(f_{n_k}(y))_{\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in einem Kompaktum ist und somit konvergiert. ■

Lemma A.3: *Sei $(f_n)_{\mathbb{N}}$ eine Folge von Isometrien, so daß $(f_n(x))_{\mathbb{N}}$ für alle $x \in M$ konvergiert. Setzt man $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, so ist f eine Isometrie.*

Beweis: Zu zeigen ist, daß f abstandserhaltend (und daher stetig) sowie umkehrbar ist.

(a) Seien $x, y \in M$ beliebig; die Dreiecksungleichung liefert für alle $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\Big|d_M(x,y) - d_M\big(f(x), f(y)\big)\Big| &= \Big|d_M\big(f_m(x), f_m(y)\big) - d_M\big(f(x), f(y)\big)\Big| \\ &\leq d_M\big(f_m(x), f(x)\big) + d_M\big(f(y), f_m(y)\big),\end{aligned}$$

wobei die Summe rechts für $m \to \infty$ verschwindet. Weil die linke Seite nicht von m abhängt, muß $d_M\big(f(x), f(y)\big) = d_M(x,y)$ gelten. Also ist f in der Tat abstandserhaltend und insbesondere injektiv.

(b) Sei $p \in M$ ein Punkt von M; wir setzen $q := f(p)$. Weil alle f_n Isometrien sind, gilt: $d_M\big(f_n^{-1}(q), p\big) = d_M\big(q, f_n(p)\big)$, und deswegen haben wir: $f_n^{-1}(q) \to p$. Nach Lemma A.2 gibt es dann eine Teilfolge $(f_{n_k})_{\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{\mathbb{N}}$, so daß $(f_{n_k}^{-1}(y))_{\mathbb{N}}$ für jedes $y \in M$ konvergiert. Wir definieren nun die Abbildung $g\colon M \to M$ per $y \mapsto \lim_{k\to\infty} f_{n_k}^{-1}(y)$. Wegen der Stetigkeit von d_M gilt für alle $x \in M$:

$$\begin{aligned}d_M\big(f(g(x)), x\big) &= d_M\big(\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(g(x)), x\big) = \lim_{k\to\infty} d_M\big(f_{n_k}(g(x)), x\big) \\ &= \lim_{k\to\infty} d_M\big(g(x), f_{n_k}^{-1}(x)\big) = d_M\big(g(x), g(x)\big) = 0.\end{aligned}$$

Somit ist $f(g(x)) = x$ für alle $x \in M$, das heißt, f ist surjektiv.

Insgesamt folgt also, daß f eine Isometrie ist mit g als Umkehrabbildung. ■

B. Ergänzende Betrachtungen

Nach Fertigstellung dieser Diplomarbeit erschienen, aufbauend auf dem Artikel von Isaev und Krantz (2001), eine Reihe von weitergehenden Resultaten, die ich in diesem Anhang kurz darstellen möchte. Inzwischen liegen Charakterisierungen der komplexen Mannigfaltigkeiten mit großen Automorphismengruppen vor, die über die Sätze 4.2 und 4.5 hinausgehen (Isaev, 2005a, b, 2006, 2007a, b, c, 2008a, b). Meine als Ausblick geäußerte Vermutung 4.6 erweist sich dabei als korrekt (siehe unten).

Wir beginnen mit hyperbolischen Mannigfaltigkeiten und Siegel-Gebieten. Zum Satz 4.1 (mit $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} U \geq n^2+1$) gibt es folgende Ergänzung:

Satz (Isaev, 2007b, Prop. 5.1)**:** *Sei $U = U(K,F) \subset \mathbb{C}^n$ mit $n \geq 4$ ein Siegel-Gebiet (zweiter Art). Falls die Automorphismengruppe die Dimension $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} U = n^2$ hat, ist U biholomorph äquivalent zu $B^2 \times B^2$, insbesondere gilt also $n = 4$.*

Im Kapitel 4 haben wir den Satz 4.1 (über Siegel-Gebiete) dazu benutzt, den Satz 4.2 (über hyperbolische Mannigfaltigkeiten M mit $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} M \geq n^2+1$) herzuleiten. Die Entsprechung hierzu ist der folgende

Satz (Isaev, 2006, Thm. 2.1)**:** *Sei M eine zusammenhängende hyperbolische Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension $n \geq 2$; M sei homogen, und die Automorphismengruppe $\operatorname{Aut} M$ habe die Dimension n^2. Dann ist entweder $n = 3$ und $M \simeq \mathbb{D}^3$ oder $n = 4$ und $M \simeq B^2 \times B^2$.*

Eine weitere Reduktion der Dimension der Automorphismengruppe gibt:

Satz (Isaev, 2006, Thm. 3.1)**:** *Sei M eine zusammenhängende hyperbolische Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension $n \geq 2$; M sei homogen, und die Automorphismengruppe $\operatorname{Aut} M$ habe die Dimension n^2-1. Dann ist $n = 4$ und M biholomorph äquivalent zu folgendem Siegel-Gebiet erster Art:*

$$T := \left\{ z \in \mathbb{C}^4 \;\middle|\; (\operatorname{Im} z_1)^2 + (\operatorname{Im} z_2)^2 + (\operatorname{Im} z_3)^2 - (\operatorname{Im} z_4)^2 < 0; \operatorname{Im} z_4 > 0 \right\}.$$

Die Forderung einer *homogenen* Mannigfaltigkeit stellt hier jeweils eine echte Einschränkung dar – anders als im Satz 4.2, bei dem die Homogenität aus Dimensionsgründen (vgl. Satz 3.6 von Kaup) immer gegeben ist. Läßt man diese Einschränkung fallen, gibt es erheblich mehr Möglichkeiten für die Mannigfaltigkeit. Ein überschaubares Ergebnis erhält man zumindest für $n \geq 3$:

Satz (Isaev, 2005b, Thm. 1.1)**:** *Sei M eine zusammenhängende hyperbolische Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension $n \geq 3$; die Automorphismengruppe $\operatorname{Aut} M$ habe die Dimension n^2-1. Dann ist M biholomorph äquivalent zu $B^{n-1} \times R$, wobei R eine hyperbolische Riemannsche Fläche mit $\dim \operatorname{Aut} R = 0$ ist, oder zu obigem Siegel-Gebiet T (hier $n = 4$).*

Die vollständige Liste an Möglichkeiten für eine hyperbolische Mannigfaltigkeit M mit $\dim_{\mathbb{C}} M = n \geq 2$ und $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Aut} M = n^2$ findet man bei Isaev (2006, 2007a, b).

In den Lecture Notes (Isaev, 2007a) wird im Kap. 6 zusätzlich der allgemeinere Fall einer Mannigfaltigkeit diskutiert, auf der eine eigentliche Transformationsgruppe G operiert. Um diesen Fall geht es auch im Abschnitt 4.2 dieser Diplomarbeit, unser Satz 4.5 nach Isaev und Krantz (2001) liefert eine Klassifikation für $\dim_{\mathbb{R}} G \geq n^2 + 3$. Eine Ergänzung dazu für $\dim_{\mathbb{R}} G = n^2 + 2$ ist der folgende

Satz (Isaev, 2007c, Thm. 3.1)**:** *Sei M eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension $n \geq 2$, sei $G \subset \operatorname{Aut} M$ eine zusammenhängende Lie-Gruppe, die eigentlich auf M operiert und $\dim_{\mathbb{R}} G = n^2 + 2$ erfüllt. Dann ist M ist biholomorph äquivalent zu $M_1 \times M_2$ mit $M_1 \in \{\mathbb{D}; \mathbb{C}; \mathbb{P}\}$ und $M_2 \in \{B^{n-1}; \mathbb{C}^{n-1}; \mathbb{P}^{n-1}\}$.*

Zusammen mit der Klassifikation aus Satz 4.5 ist das genau die Vermutung 4.6.

Bemerkung: Die Beweisführung von Isaev (2007c) könnte noch verkürzt werden mit Hilfe von Struktursätzen aus der Theorie der Transformationsgruppen auf komplexen Mannigfaltigkeiten (siehe etwa Huckleberry u. Oeljeklaus, 1984).

Laut Isaev (2008b) liegen außerdem kürzere Beweise in (Isaev, 2008a) vor.

Man kann die Dimension der eigentlichen Transformationsgruppe noch weiter reduzieren auf $\dim_{\mathbb{R}} G = n^2 + 1$, siehe Isaev (2008b); im genannten Artikel sind einige der dann möglichen Mannigfaltigkeiten aufgeführt. Der Beweis ist noch nicht vollständig veröffentlicht, die Veröffentlichung ist für das Jahr 2009 angekündigt und findet sich bereits vorab bei Isaev u. Kruzhilin (2007).

Literatur

Bland u. a. 1987
BLAND, J.; DUCHAMP, T.; KALKA, M.:
„A Characterization of $\mathbb{CP}^n$ by Its Automorphism Group".
In: KRANTZ, Steven G. (Hrsg.); DOLD, A. (Hrsg.); ECKMANN, B. (Hrsg.): *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 1268: *Complex Analysis*.
Berlin; Heidelberg: Springer, 1987, S. 60 – 65.
DOI 10.1007/BFb0097296.

Bochner u. Montgomery 1946
BOCHNER, Salomon; MONTGOMERY, Deane:
„Locally Compact Groups of Differentiable Transformations".
In: *The Annals of Mathematics* 47 (1946), Nr. 4, S. 639 – 653.
http://www.jstor.org/stable/1969226.

Bourbaki 1975
BOURBAKI, Nicolas:
Lie Groups and Lie Algebras.
Paris: Hermann, 1975 (Elements of Mathematics, Part I: Chapters 1–3).

Cartan 1984
CARTAN, Elie:
„Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes".
In: *Œuvres complètes*. Bd. I: *Groupes de Lie*.
Réprod. photomécanique de l'éd. 1952–1955.
Paris: Ed. du Centre National de la Recherche Scientifique [u.a.], 1984, S. 1259 – 1305.
DOI 10.1007/BF02940719.
Nachdruck von: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 11 (1935), S. 161ff.

van Dantzig u. van der Waerden 1928
DANTZIG, D. van; WAERDEN, B. L. van der:
„Über metrisch homogene Räume".
In: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 6 (1928), S. 367 – 376.
DOI 10.1007/BF02940622.

Fischer u. Lieb 1988
FISCHER, Wolfgang; LIEB, Ingo:
Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie.
Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg, 1988.

Fischer u. Lieb 1994
FISCHER, Wolfgang; LIEB, Ingo:
Funktionentheorie.
7., verb. Aufl.
Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg, 1994.

Gamst 2000
GAMST, Jens:
Skript zur Analysis auf Mannigfaltigkeiten.
2000.
Unveröffentlicht.

Goto u. Grosshans 1978
GOTO, Morikuni; GROSSHANS, Frank D.:
Semisimple Lie Algebras.
New York: Marcel Dekker, 1978.

Greene u. Krantz 1985
GREENE, Robert E.; KRANTZ, Steven G.:
„Characterization of Complex Manifolds by the Isotropy Subgroups of Their Automorphism Groups“.
In: *Indiana University Mathematics Journal* 34 (1985), S. 865 – 879.
http://www.iumj.indiana.edu/oai/1985/34/34048/34048.xml.
DOI 10.1512/iumj.1985.34.34048.

Gunning u. Rossi 1965
GUNNING, Robert C.; ROSSI, Hugo:
Analytic Functions of Several Complex Variables.
Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1965.

Helgason 1978
HELGASON, Sigurdur:
Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces.
New York; San Francisco; London: Academic Press, 1978.

Herrlich 1986
HERRLICH, Horst:
Topologie I: Topologische Räume.
Berlin: Heldermann, 1986.
Unter Mitarbeit von Hubertus Bargenda.

Hochschild 1965
HOCHSCHILD, G.:
The Structure of Lie Groups.
San Francisco; London; Amsterdam: Holden-Day, 1965.

Huckleberry u. Oeljeklaus 1984
HUCKLEBERRY, Alan T.; OELJEKLAUS, Eberhard:
Classification Theorems for Almost Homogeneous Spaces.
Nancy: Institut Elie Cartan, Université de Nancy I, 1984.

Humphreys 1972
HUMPHREYS, James E.:
Graduate Texts in Mathematics. Bd. 9: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*.
Second Printing, Revised.
New York: Springer, 1972.

Isaev 2005a
ISAEV, A. V.:
„On Hyperbolic n-Dimensional Manifolds with Automorphism Group of Dimension n^2“.
In: *Complex Variables* 50 (2005), Nr. 5, S. 345 – 355.
DOI 10.1080/02781070500032754.

Isaev 2005b
ISAEV, A. V.:
„Hyperbolic Manifolds of Dimension n with Automorphism Group of Dimension $n^2 - 1$“.
In: *The Journal of Geometric Analysis* 15 (2005), Nr. 2, S. 239 – 259.
http://springerlink.com/content/4960644828khr361.
DOI 10.1007/BF02922195.

Isaev 2006
ISAEV, A. V.:
„Hyperbolic Manifolds with High-Dimensional Automorphism Group“.
In: *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* 253 (2006), S. 225 – 245.
DOI 10.1134/S0081543806020192.

Isaev 2007a
Isaev, Alexander; Morel, J.-M. (Hrsg.); Takens, F. (Hrsg.); Teissier, B. (Hrsg.): *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 1902: *Lectures on the Automorphism Groups of Kobayashi-Hyperbolic Manifolds*.
Berlin; Heidelberg: Springer, 2007.
DOI 10.1007/3-540-69151-0.

Isaev 2007b
Isaev, Alexander V.:
„Hyperbolic n-Dimensional Manifolds with Automorphism Group of Dimension n^2“.
In: *Geometric And Functional Analysis* 17 (2007), S. 192 – 219.
DOI 10.1007/s00039-006-0586-3.

Isaev 2007c
Isaev, A. V.:
„Proper Actions of High-Dimensional Groups on Complex Manifolds“.
In: *The Journal of Geometric Analysis* 17 (2007), Nr. 4, S. 649 – 667.
http://springerlink.com/content/l1q37r6v3805361w.
DOI 10.1007/BF02937432.

Isaev 2008a
Isaev, Alexander:
„Complex Manifolds Admitting Proper Actions of High-Dimensional Groups“.
In: *Journal of Lie Theory* 18 (2008), Nr. 1, S. 141 – 160.
http://www.heldermann.de/JLT/JLT18/JLT181/jlt18009.htm.

Isaev 2008b
Isaev, A. V.:
„On Proper Actions of Lie Groups of Dimension $n^2 + 1$ on n-Dimensional Complex Manifolds“.
In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 342 (2008), S. 1160 – 1174.
DOI 10.1016/j.jmaa.2007.12.050.

Isaev u. Krantz 2000
Isaev, Alexander V.; Krantz, Steven G.:
„Invariant Distances and Metrics in Complex Analysis“.
In: *Notices of the AMS* 47 (2000), Nr. 5, S. 546 – 553.
http://www.ams.org/notices/200005/fea-krantz.pdf.

Isaev u. Krantz 2001
Isaev, Alexander V.; Krantz, Steven G.:
„On the Automorphism Groups of Hyperbolic Manifolds“.
In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 534 (2001), S. 187 – 194.
DOI 10.1515/crll.2001.041.

Isaev u. Kruzhilin 2007
Isaev, A. V.; Kruzhilin, N. G.:
Proper Actions of Lie Groups of Dimension $n^2 + 1$ on n-Dimensional Complex Manifolds.
14. November 2007.
arXiv:0711.2098.
Unveröffentlicht.

Kaup 1967
Kaup, Wilhelm:
„Reelle Transformationsgruppen und invariante Metriken auf komplexen Räumen“.
In: *Inventiones mathematicae* 3 (1967), S. 43 – 70.
DOI 10.1007/BF01425490.

Kaup u. a. 1970
KAUP, Wilhelm; MATSUSHIMA, Yozo; OCHIAI, Takushiro:
„On the Automorphisms and Equivalences of Generalized Siegel Domains".
In: *American Journal of Mathematics* 92 (1970), S. 475 – 497.
http://www.jstor.org/stable/2373335.

Kobayashi 1970
KOBAYASHI, Shoshichi:
Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings.
New York: Marcel Dekker, 1970.

Kobayashi 1998
KOBAYASHI, Shoshichi:
Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Bd. 318: *Hyperbolic Complex Spaces*.
Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1998.

Kobayashi u. Nomizu 1963
KOBAYASHI, Shoshichi; NOMIZU, K.:
Foundations of Differential Geometry. Bd. I.
New York; London: Interscience (Wiley), 1963.

Lang 1983
LANG, Serge:
Real Analysis.
Second edition.
Reading: Addison-Wesley, 1983.

Lang 1987
LANG, Serge:
Introduction to Complex Hyperbolic Spaces.
Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1987.

Morrow u. Kodaira 1971
MORROW, James A.; KODAIRA, Kunihiko:
Complex Manifolds.
New York: Holt, Rinehart and Winston, 1971.

Murakami 1972
MURAKAMI, Shingo; DOLD, A. (Hrsg.); ECKMANN, B. (Hrsg.):
Lecture Notes in Mathematics. Bd. 286: *On Automorphisms of Siegel Domains*.
Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1972.
DOI 10.1007/BFb0058567.

Nakajima 1985
NAKAJIMA, Kazufumi:
„Homogeneous Hyperbolic Manifolds and Homogeneous Siegel Domains".
In: *Journal of Mathematics of Kyoto University* 25 (1985), S. 269 – 291.
JMKU0250203.

Onishchik u. Vinberg 1990
ONISHCHIK, Arkadij L.; VINBERG, Ernest B.:
Lie Groups and Algebraic Groups.
Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1990.

Pyatetskii-Shapiro 1969
PYATETSKII-SHAPIRO, I. I.:
Mathematics and Its Applications. Bd. 8: *Automorphic Functions and the Geometry of Classical Domains*.
New York; London; Paris: Gordon and Breach, 1969.

Rudin 1980
RUDIN, W.:
Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Bd. 241: *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$.
Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1980.

Satake 1980
SATAKE, Ichiro:
Algebraic Structures of Symmetric Domains.
Princeton: University Press, 1980.

Warner 1983
WARNER, Frank W.:
Graduate Texts in Mathematics. Bd. 94: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*.
NewYork; Berlin; Heidelberg: Springer, 1983.