Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Der Gegenstand dieser Arbeit, die Modulkurve $X_0(15)$, begegnete mir zuerst als Beispiel in einem Artikel [13] von K. Rubin und A. Silverberg über die Vorträge von A. Wiles 1993 in Cambridge, die vom Beweis der Fermatschen Vermutung handelten, nämlich

Example. It can be shown that there is a (holomorphic) isomorphism from $X_0(15)$ onto the elliptic curve $y^2 = x(x+9)(x-16)$.

Das Beispiel, dessen Ausarbeitung hier vorgelegt wird, steht sehr weit am Anfang des Artikels und dient als Illustration zur Definition der Modularität elliptischer Kurven, hat also selbst nichts mit dem Beweis von Wiles zu tun. Der Begriff der Modularität von elliptischen Kurven hingegen nimmt eine der Schlüsselstellungen im Beweis der Fermatschen Vermutung ein. Modularität elliptischer Kurven kann auf verschiedene Weisen definiert werden, die hier zugrunde liegende Definition lautet: Eine elliptische Kurve E wird modular genannt, falls es eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß eine nichkonstante holomorphe Abbildung $f: X_0(N) \to E$ existiert. Eine weiterführende Erklärung zur Einbettung dieser Eigenschaft in den Problemkreis der Fermatschen Vermutung würde sowohl den Rahmen dieser Arbeit sprengen, als auch weit über meinen mathematischen Horizont hinausgehen. Für einen kurzen geschichtlichen Überblick möchte ich dehalb auf den obigen Artikel sowie die Einleitung von H. Darmond, F. Diamond und R. Taylor in [2] und K.A. Ribet in [12] verweisen.

Die Aufgabe für mich war das Verständnis des oben angeführten Beispiels sowie dessen Ausarbeitung. Von dem Beispiel ausgehend hat die Arbeit sich recht bald in zwei Teilbereiche aufgespalten. Auf der einen Seite steht die Konstruktion der kompakten Riemannschen Fläche $X_0(15) = \mathbb{H}^*/\Gamma_0(15)$ als Quotient der erweiterten oberen Halbebene und der Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(15)$. Im zweiten Teil wird eine algebraischen Gleichung für diese Fläche aufgestellt, diese Gleichung geht auf eine Konstruktion von R. Fricke zurück, die dieser in [7] beschreibt.

Nach einem einführenden Kapitel, das die Begriffe und Grundlagen zum Umgang mit Riemannschen Flächen bereitstellen soll, folgt ein Kapitel, das die kompakte Riemannsche Fläche $\mathbb{H}^*/\Gamma_0(15)$ vorstellt. Zur Kompaktifizierung muß $\mathbb{H}/\Gamma_0(15)$ um sogenannte Spitzenklassen, d.h. Elemente von $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}/\Gamma_0(15)$ erweitert werden. Um konkrete Vertreter dieser Spitzenklassen benennen zu können, ist es notwendig, Nebenklassenvertreter für $SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma_0(15)$ zu bestimmen. Dies ist mit einigem Aufwand verbunden, und ich habe diese Berechnungen deshalb getrennt in Kapitel 4 beschrieben. Im dritten Kapitel wird noch das Geschlecht von $X_0(15)$ bestimmt, da sich dessen Berechnung am einfachsten an die Beschreibung der analytischen Struktur von $\mathbb{H}^*/\Gamma_0(15)$ anschließen läßt. Benötigt werden Informationen über das Geschlecht allerdings erst in Kapitel 5 bei der Konstruktion von R.Fricke.

Im vierten Kapitel werden die Nebenklassenvertreter für $SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma_0(15)$ berechnet. Die Schwierigkeit besteht hier darin, aus bekannten Vertretern für $SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma_0(3)$ und $SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma_0(5)$ auf Vertreter von $SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma_0(15)$ zu schließen. Außerdem wird in diesem Kapitel noch der Index $[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(15)]$ bestimmt, dessen Endlichkeit zwar schon in Kapitel 3 vorausgesetzt wird, dessen Berechnung sich aber hier am besten einfügt.

Das letzte Kapitel beschreibt die Konstruktion einer algebarischen Gleichung für $\mathbb{H}^*/\Gamma_0(15)$, wie sie von R. Fricke in [7] durchgeführt wurde, wobei für diese Konstruktion nötige Konzepte, wie z.B. das einer Modulform, noch eingeführt werden. Die von R. Fricke gefundene Gleichung entspricht der elliptischen Kurve $y^2 = x(x+9)(x-16)$. Hiermit ist der in dem Beispiel von Rubin und Silverberg angesprochene Zusammenhang hergestellt.

1 Grundlagen zu Riemannschen Flächen und algebraischen Kurven

Dieses Kapitel dient dazu, die von mir später benutzten Definitionen und Sätze zur Theorie der kompakten Riemannschen Flächen, sowie das Konzept einer Riemannschen Fläche selbst, darzulegen. Da es sich hier um einen allgemein bekannten und sehr gut dokumentierten Bereich handelt, werde ich in diesem Kapitel nichts beweisen, sondern höchstens Beweisskizzen angeben und mich teilweise recht nah an schon vorhandenen Textvorlagen orientieren. Dabei habe ich den Teil zur Definition der Riemannschen Fläche an die Darstellung in O. Forster [4] "Riemannsche Fächen" angelehnt, der Teil, der sich mit dem Satz von Riemann-Roch beschäftigt, sowie der letzte Abschnitt, sind in ähnlicher Form bei J. Jost in [8] zu finden.

1.1 Definition der Riemannschen Fläche

Riemannsche Fächen sind reell zweidimensionale, zusammenhängende Mannigfaltigkeiten mit einer zusätzlichen analytischen Struktur. Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein Hausdorffraum X mit abzählbarer Umgebungsbasis, in dem für jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebung existiert, die homöomorph zu einer Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Die analytische Struktur auf Riemannschen Flächen leitet sich aus der Verträglichkeit dieser Homöomorphismen her:

Definition 1. *1) Eine* komplexe Karte *auf einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit X ist ein Homöomorphismus*

$$\phi : \ U \subset X \to V \subset \mathbb{C}$$

einer offenen Menge $U \subset X$ in eine offene Menge $V \subset \mathbb{C}$.
2) Zwei komplexe Karten $\phi_i : U_i \to V_i \ i = 1, 2$ heißen biholomorph verträglich*, falls die Abbildung:*

$$\phi_2 \circ {\phi_1}^{-1} : \ \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

biholomorph ist. (Die Abbildung $\phi_2 \circ {\phi_1}^{-1}$ wird auch Kartentransformationsabbildung *genannt.)*
3) Ein komplexer Atlas *$\mathcal{A}$ auf X ist ein System paarweise biholomorph verträglicher Karten: $\mathcal{A} := \{\phi_i : U_i \to V_i\}$, so daß gilt $\bigcup_i U_i = X$.*
4) Zwei komplexe Atlanten $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ heißen biholomorph verträglich, falls jede Karte von $\mathcal{A}$ mit jeder Karte von $\mathcal{A}'$ biholomorph verträglich ist.

Die biholomorphe Verträglichkeit von Atlanten stellt eine Äquivalenzrelation dar. Um also nicht auf einen speziellen Atlas festgelegt zu sein, kann mit der Äquivalenzklasse von Atlanten gerechnet werden.

Definition 2. *Sei X eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Eine Äquivalenzklasse biholomorph äquivalenter Atlanten auf X wird* komplexe Struktur *auf X genannt.*

Das macht nun die Definition einer Riemannschen Fläche möglich:

Definition 3. *Eine* Riemannsche Fläche *ist ein Paar (X, Σ), bestehend aus einer zusammenhängenden zweidimensionalen Mannigfaltigkeit X und einer komplexen Struktur Σ auf X.*

Zur Angabe einer komplexen Struktur auf einer vorgegebenen Mannigfaltigkeit ist es ausreichend, einen die Struktur Σ repräsentierenden Atlas $\mathcal{A}$ anzugeben. Häufig wird (X, Σ) abgekürzt zu X, wenn entweder klar oder unwichtig ist, wie die analytische Struktur auf X aussieht.

Beispiele

1) Die Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{P}_1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
Topologie von $\mathbb{P}_1$:
Offene Mengen $U \subset \mathbb{C}$ seien wie üblich definiert, eine offene Umgebung von ∞ sei $V \cup \{\infty\}$, wobei V das Komplement einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{C}$ ist. $\mathbb{P}_1$ ist homöomorph zur Sphäre S^2, also ein zusammenhängender Hausdorffraum.
Die analytische Struktur:
Die Überdeckung von $\mathbb{P}_1$ sei gegeben durch

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbb{P}_1 \backslash \{\infty\} = \mathbb{C} \\ U_2 &= \mathbb{P}_1 \backslash \{0\} = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

Die Homöomorphismen seien

$$\begin{aligned} \phi_1 &= id_{\mathbb{C}} \\ \phi_2 &= \left\{ \begin{smallmatrix} \frac{1}{z} \text{ für } z \in \mathbb{C}^* \\ 0 \text{ für } z = \infty \end{smallmatrix} \right. \end{aligned}$$

Die Kartentransformationsabbildung

$$\begin{array}{rccc} \phi_2 \circ {\phi_1}^{-1}: & \mathbb{C}^* & \to & \mathbb{C}^* \\ & z & \mapsto & \frac{1}{z} \end{array}$$

ist eine biholomorphe Abbildung. Also ist in $\mathcal{A} = \{(\phi_i, U_i)\ i = 1, 2\}$ ein Atlas auf $\mathbb{P}_1$ definiert, durch $(\mathbb{P}_1, [\mathcal{A}])$ wird eine Riemannsche Fläche definiert.

2) Der Torus
Seien $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ reell unabhängig. Dann heißt:

$$\Gamma := \{nw_1 + mw_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

das von w_1, w_2 aufgespannte Gitter. Auf den komplexen Zahlen kann jetzt mittels Γ eine Äquivalenzrelation eingeführt werden:

$$z_1 \sim z_2 \;\Leftrightarrow\; z_1 - z_2 \in \Gamma$$

Die Menge aller Äquivalenzklassen sei wie üblich mit $\mathbb{C}/\Gamma$ bezeichnet.

Zur Topologie von $\mathbb{C}/\Gamma$:
Durch die natürliche Projektion

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}/\Gamma \\ & z & \mapsto & [z] \end{array}$$

kann die Quotiententopologie auf $\mathbb{C}/\Gamma$ eingeführt werden, d.h. eine Menge $U \subset \mathbb{C}/\Gamma$ ist genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{C}$ offen ist. In dieser Topologie ist $\mathbb{C}/\Gamma$ zusammenhängend und Hausdorff.

Die komplexe Stuktur von $\mathbb{C}/\Gamma$:
$V \subset \mathbb{C}$ sei eine offene Menge, die keine zwei modulo Γ äquivalenten Punkte enthält. Dann ist $\pi|_V$ ein Homöomorphismus und $U := \pi(V)$ offen in $\mathbb{C}/\Gamma$. Als komplexe Karte auf $\mathbb{C}/\Gamma$ soll nun $\phi := \pi^{-1} : U \to V$ verwandt werden. Die biholomorphe Verträglichkeit zweier solcher Karten ergibt sich aus folgender Überlegung:

$$\phi_2 \circ {\phi_1}^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

Abgekürzt sei $\psi := \phi_2 \circ {\phi_1}^{-1}$, für jedes $z \in \phi_1(U_1 \cap U_2)$ gilt:

$$\pi(\psi(z)) = \pi(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z)) = \phi^{-1}(z) = \pi(z)$$

D.h. $\psi(z) - z \in \Gamma$. Da Γ diskret und ψ stetig ist, muß $\psi(z) - z$ auf jeder Zusammenhangskomponente von $\phi_1(U_1 \cap U_2)$ konstant sein und damit sind sowohl ψ wie auch ψ^{-1} holomorph. In $(\mathbb{C}/\Gamma, [\mathcal{A}])$ ist eine Riemannsche Fläche erklärt, wobei $[\mathcal{A}]$ die durch den oben beschriebenen Atlas vertretene Äquivalenzklasse bezeichnet.

Die analytische Struktur einer Riemannschen Fläche ist gerade so eingerichtet, daß in sinnvoller Weise holomorphe Abbildungen zwischen zwei Riemannschen Flächen erklärt werden können.

Definition 4. *Seien X, Y Riemannsche Flächen. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt* holomorph, *wenn für jedes Paar von Karten $\phi_1 : U_1 \to V_1$ auf X und $\phi_2 : U_2 \to V_2$ auf Y*

$$\phi_2 \circ f \circ {\phi_1}^{-1} : \; \widetilde{V_1} \to V_2$$

eine holomorphe Abbildung im üblichen Sinne ist, hier bezeichnet $\widetilde{V_1} := \phi_1(U_1 \cap f^{-1}U_2)$.

Viele der "lokalen" Sätze aus der Funktionentheorie übertragen sich nun auf die Riemannschen Flächen. Ein Satz, der es möglich macht, den Verzweigungsindex einer holomorphen Abbildung zu erklären, ist der folgende über die lokale Gestalt holomorpher Abbildungen:

Satz 5. *Seien X, Y Riemannsche Flächen, $f : X \to Y$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen ihnen. Es sei $a \in X$, $b = f(a) \in Y$. Dann gibt es Karten $\phi : U \to V$ auf X und $\phi' : U' \to V'$ auf Y mit folgenden Eigenschaften:*
i) $a \in U, \phi(a) = 0$; $b \in U', \phi'(b) = 0$
ii) $f(U) = U'$
iii) Für $F := \phi' \circ f \circ \phi^{-1} : V \to V'$ gilt:

$$F(z) = z^k \text{ für alle } z \in V$$

Zum Beweis siehe z.B. O. Forster in [4] S.9.
Oft ist es sinnvoll, nicht gleich holomorphe Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen zu betrachten, sondern sogenannte Überlagerungen, die auch in einem allgemeineren Zusammenhang definiert werden können:

Definition 6. *Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $p : X \to Y$ heißt* verzweigte Überlagerung*, falls p stetig, offen und diskret ist.*

Mit diskret ist hier gemeint, daß das Urbild eines jeden Punktes $y \in Y$ eine diskrete Menge in X ist. Insbesondere sind also holomorphe Abbildungen zwischen zwei Riemannschen Flächen Überlagerungsabbildungen. Eine eigentliche, nicht-konstante, holomorphe Abbildung zwischen zwei Riemannschen Flächen X, Y nimmt jeden Wert $y \in Y$ gleich oft, etwa n-mal an. Diese Zahl n wird die Blätterzahl oder auch der Grad der Abbildung genannt, das spiegelt die Auffassung wider, daß X gegeben ist als n Kopien von Y, die an einigen Stellen, den Verzweigungspunkten, zusammengeklebt sind. Im Falle kompakter Riemannscher Flächen kann die Bedingung der Eigentlichkeit fallengelassen werden, da dann schon jede stetige Funktion eigentlich ist.

Definition 7. *Seien X, Y topologische Räume, $p : X \to Y$ eine Überlagerung. Ein Punkt $x \in X$ heißt Verzweigungspunkt von p, wenn es keine Umgebung V von y gibt, so daß $p|_V$ injektiv ist.*

Für eine holomorphe Abbildung zwischen zwei Riemannschen Flächen liegt ein Verzweigungspunkt vor, wenn in der lokalen Gestalt gilt $F(z) = z^k$ mit $k > 1$. Die Zahl $v_f(x) = k$ ist die Vielfachheit, mit der f in x den Wert $f(x)$ animmt, $b(f, x) = v_f(x) - 1$ wird der *Verzweigungsindex* oder auch die *Verzweigungsordnung* von f in x genannt.

1.2 Zum Satz von Riemann-Roch

Um den Satz von Riemann-Roch formulieren zu können, muß ich hier zunächst einiges an Terminologie und Notation einführen.

Definition 8. *Sei X eine Riemannsche Fäche. Ein* Divisor *auf X ist eine formale Linearkombination,*

$$D = \sum sz \quad s \in \mathbb{Z}\ z \in X,$$

die lokal nur endlich viele Terme enthält.

Für kompakte Riemannsche Flächen folgt aus der lokalen Endlichkeit die globale. Der Grad eines Divisors $deg(D)$ ist definiert als $deg(D) := \sum s_\nu$, die Divisoren auf einer Riemannschen Fläche X bilen eine abelsche Gruppe, die mit $Div(X)$ bezeichnet wird.

Definition 9. *Sei g eine nichtkonstante, meromorphe Funktion auf X, dann ist der* Divisor von g *definiert als:*

$$(g) := \sum_{z \in X} (ord_z g) z$$

wobei

$$ord_z g = k \begin{cases} > 0 & \text{falls } g \text{ } k\text{-fache 0-Stelle in } z \text{ hat} \\ < 0 & \text{falls } g \text{ } k\text{-fache Poltelle in } z \text{ hat} \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bezüglich der lokalen Koordinate z kann eine meromorphe $1-$Form η dargestellt werden, als $\eta = fdz$, wobei f eine meromerphe Funktion ist, die den Hauptteil von η bezüglich der lokalen Koordinate z darstellt. Wird anstelle von z eine andere lokale Karte y gewählt, so transformiert sich dz zu $dz = \frac{dz}{dy}dy$. In $ord_z\eta = ord_z f$ ist also eine von der lokalen Koordinatenabbildung unabhängige Definition der Ordnung von η in Punkten $z \in X$ gefunden.

Definition 10. *1) Der* Divisor einer meromorphen 1-Form $\eta \neq 0$ *sei definiert als:*

$$(\eta) := \sum_{z \in X} (ord_z \eta) z$$

2) Der Divisor einer meromorphen $1-$Form wird kanonischer Divisor *genannt und mit K bezeichnet.*
3) Ein Divisor D auf X heißt Hauptdivisor, *falls $D = (g)$ für eine meromorphe Funktion g.*

Mit Hilfe des Begriffs des Hauptdivisors läßt sich auf X eine Äquivalenzrelation erklären durch:

$$D \sim D' \;\Leftrightarrow\; D - D' = (g)$$

d.h zwei Divisoren sind genau dann äquivalent, wenn ihre Differenz ein Hauptdivisor ist.

Bemerkung 11. *Je zwei kanonische Divisoren auf X sind äquivalent.*

Beweis. (*Bemerkung*)
Seien $K = (\eta)$, $K' = (\eta')$ die Divisoren der meromorphen Formen η, η'. Der Quotient $\frac{\eta}{\eta'} = g$ ist eine meromorphe Funktion, und es folgt: $D(\frac{\eta}{\eta'}) = K - K' = (g)$. □

Außerdem kann auf $Div(X)$ eine teilweise Ordnung eingeführt werden, indem für $D, D' \in Div(X)$ gesetzt wird:

$$D \leq D', \text{ falls } s_x \leq s_x{}' \text{ für alle } x \in X$$

$D \geq 0$ heißt z.B., daß keiner der Koeffizienten negativ ist.

Definition 12. *Sei X eine Riemannsche Fläche, $D \in Div(X)$ ein Divisor auf ihr. Es kann folgender $\mathbb{C}$-Vektorraum eingeführt werden:*
$\mathcal{L}(D) := \{h$ *eine meromorphe Funktion auf* $X \mid h \equiv 0$ *oder* $D + (h) \geq 0\}$. *Die Dimension dieses Vektorraumes wird mit $h^0(D) := dim_{\mathbb{C}}\mathcal{L}(D)$ bezeichnet.*

$\mathcal{L}(D)$ umfaßt also alle Funktionen, die ein durch D vorgeschriebenes Null- und Polstellenverhalten haben. In Punkten $z \in X$, in denen $s_z < 0$ ist, muß $f \in \mathcal{L}(D)$ mindestens eine s_z-fache Nullstelle haben, und in $y \in X$ mit $s_y > 0$ kann $f \in \mathcal{L}(D)$ höchstens einen s_y-fachen Pol haben. Z.B besteht $\mathcal{L}(0)$ aus den konstanten Funktionen.

Satz 13. (Riemann-Roch)
Sei X eine kompakte Riemannsche Fäche von Geschlecht g, D ein Divisor auf X, dann gilt:

$$h^0(D) = deg(D) - g + 1 + h^0(K - D)$$

Zum Beweis siehe z.B. J. Jost in [8] S.225 ff.
Es gibt viele Möglichkeiten das Geschlecht g einer Riemannschen Fläche X zu definieren, unter Anderem kann man in dem im obigen Satz D Null setzen und erhält eine mögliche Definition: $g = h^0(K)$. Weiter möchte ich hier nicht auf die Definition des Geschlechts einer Fläche eingehen. Um eine anschauliche Vorstellung von der Bedeutung des Geschlechs zu bekommen, kann es als

die Anzahl der Henkel, die die Fläche hat, angesehen werden. Im Laufe dieser Arbeit interessieren mich nur das Geschlecht der Zahlenkugel $\mathbb{P}^1$, welches 0 ist, und das des Torus, welches 1 ist.
Eine für die Konstruktion von R.Fricke wichtige Folgerung aus dem Satz von Riemann-Roch ist:

Korollar 14. *Zu jeder kompakten Riemannschen Fläche X von Geschlecht p gibt es eine holomorphe Überlagerungsabbildung $f : X \to \mathbb{P}^1$ mit höchstens $p+1$ Blättern.*

Zum Beweis siehe z.B. O. Forster in [4] S.120.
Um in Kapitel 3 das Geschlecht von $X_0(15)$ ausrechnen zu können, benötige ich noch die Riemann-Hurwitz-Formel:

Satz 15. (Riemann-Hurwitz)
Es seien X, Y kompakte Riemannsche Flächen mit den Geschlechtern g, g' und $f : X \to Y$ eine nicht-konstante, holomorphe, n-blättrige Abbildung mit der Gesamtverzweigungsordnung $b(f) = \sum_{x \in X}(v_f(x) - 1)$. $b(f)$ ist endlich und gerade, und es gilt:

$$g = \frac{b}{2} + n(g' - 1) + 1$$

1.3 Zusammenhang zwischen Riemannschen Flächen und algebraischen Kurven

In diesem Teil werde ich die benötigte Theorie noch knapper skizzieren, indem ich nur den zentralen Satz angebe, der mir die gewünschte Bijektion zwischen kompakten Riemannschen Flächen und algebraischen Kurven garantiert.
Eine der Motivationen, die zur Definition der Riemannschen Fläche geführt haben, war der Wunsch aus " mehrdeutigen" Funktionen "eindeutige" zu machen. Mehrdeutige Funktionen treten hier als algebraische Funktionen auf, d.h. als analytische Funktionen f, die einem Polynom in zwei Variablen $P(z, f(z))$ genügen. Nun ist es umgekehrt so, daß zwei meromorphe Funktionen z und f auf einer kompakten Riemannschen Fläche durch eine algebraische Gleichung $f^n + \sigma_1(z)f^{n-1} + \cdots + \sigma_n(z) = 0$ verbunden sind, und falls dieses Polynom irreduzibel ist, besteht gerade eine Bijektion zwischen der Riemannschen Fläche, auf der die meromorphen Funktionen z und f leben, und der zu der obigen Gleichung gehörenden Riemannschen Fläche. Dieser Zusammenhang wird in folgendem Satz dargelegt:

Satz 16. *Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche, $\mathcal{M}(X)$ der Funktionenkörper auf ihr. Für eine nichtkonstante meromorphe Funktion z auf X*

gibt es eine Einbettung $\mathbb{C}(z) \to \mathcal{M}(X)$, und es existiert ein $f \in \mathcal{M}(X)$, so daß $\mathcal{M}(X) = \mathbb{C}(z)(f)$ gilt. Sei P die zugehörige irreduzible Gleichung. Dann sind X und die Fläche, die durch $P(x,y) = 0$ definiert wird, biholomorph äquivalent.

Kurz dargelegt wird dieser Zusammenhang in J. Jost in [8] Kapitel 5.8 S.254ff. Im Fall, daß $P(x,y)$ eine elliptische Kurve darstellt, ist der Übergang von der projektiven Kurve, also dem Nullstellengebilde von $P(x,y)$ in $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, zu der zugehörigen Riemannschen Fläche besonders einfach, da Singularitäten ausgeschlossen sind.
Wie schon in der Einleitung angedeutet, wird die kompakte Riemannsche Fläche $X_0(15)$ in dieser Arbeit von zwei Seiten erschlossen. In Kapitel 3 geht es darum zu zeigen, daß $X_0(15) = \mathbb{H}^*/\Gamma_0(15)$ eine kompakte Riemannsche Fläche im Sinne der Definition dieses Kapitels ist, und in Kapitel 5 werden zwei auf $X_0(15)$ lebende meromorphe Funktionen und die sie verbindende irreduzible Gleichung konstruiert. Der obige Satz schließt dann den Kreis durch die Aussage, daß sowohl $\mathbb{H}^*/\Gamma_0(15)$ wie auch die gefundene Gleichung $y^2 = x(x+9)(x-16)$ die gleiche Fläche darstellen.

2 $\mathbf{X}_0(N)$ als kompakte Riemannsche Fläche

Im folgenden werde ich die Konstruktion der kompakten Riemannschen Fläche $\mathbb{H}^*/\Gamma_0(N)$ vorstellen. Nach dem Klären der Grundbegriffe wird zunächst $\mathbb{H}/\Gamma$ für eine Untergruppe Γ von $SL_2(\mathbb{Z})$ von endlichem Index betrachtet und nachgewiesen, daß dies ein Hausdorffraum ist. Dieser ist leider noch nicht kompakt, kann aber durch Hinzunahme endlich vieler Spitzenklassen kompaktifiziert werden. Das so entstandene Gebilde $\mathbb{H}^*/\Gamma$ stellt, mit einer analytischen Struktur ausgestattet, eine kompakte Riemannsche Fläche dar. Obwohl einige der Sätze sich auch in größerer Allgemeinheit zeigen lassen, werde ich mich auf Untergruppen von endlichem Index beschränken, da es um die Konstruktion von $\mathbf{X}_0(N) = \mathbb{H}^*/\Gamma_0(N)$ geht. Die Endlichkeit des Indexes werde ich im zweiten Teil zeigen. Dort werden der Index $[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(15)]$ und Vertreter für die Spitzenklassen von $\Gamma_0(15)$ konkret berechnet.

In diesem Kapitel werde ich folgende abkürzende Schreibweisen benutzen:
$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$ (die obere Halbebene)
$SL_2(\mathbb{Z}) := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1 \right\}$
$\Gamma_0(N) := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv\ 0 \ mod\ N \right\}$

2.1 $SL_2(\mathbb{Z})$ und die obere Halbebene

Durch die gebrochen lineare Abbildung:

$$\begin{array}{cccc} \gamma & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

definieren die Elemente von $SL_2(\mathbb{Z})$ Abbildungen von $\mathbb{C}$ in sich. Dabei wird $\mathbb{H}$ auf sich abgebildet, denn sei $z \in \mathbb{H}$, $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$, dann gilt für den Imaginärteil von $\gamma(z)$:

$$\begin{aligned} Im(\gamma z) &= Im\left(\tfrac{az+b}{cz+d}\right) \\ &= Im\left(\tfrac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2}\right) \\ &= Im\left(\tfrac{ac|z|^2+adz+bc\bar{z}+bd}{|cz+d|^2}\right) \\ &= \tfrac{1}{|cz+d|^2}(Im(adz) - Im(bcz)) \\ &= \tfrac{1}{|cz+d|^2} Im(z) \underbrace{(ad - bc)}_{=1} \qquad > 0 \end{aligned}$$

(Für $c \neq 0$ ist $Im(cz)^2 > 0$, also auch $|cz + d|^2 > 0$. Für $c = 0$ folgt $d \neq 0$, da $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$, damit ist dann aber $Re(cz + d)^2 > 0$, also wiederum

$|cz+d|^2 > 0$.)

An dieser Stelle möchte ich eine Klassifikation der Elemente von $SL_2(\mathbb{R})$ anhand ihrer Fixpunkte einführen:

Definition 17. *Sei $\sigma \in SL_2(\mathbb{R})$, $\sigma \neq \pm I$:*
σ heißt parabolisch $\Leftrightarrow$ *σ hat nur einen Fixpunkt in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*
σ heißt elliptisch $\Leftrightarrow$ *σ hat einen Fixpunkt $z \in \mathbb{H}$ und einen $\bar{z} \in \mathbb{H}^-$.*
σ heißt hyperbolisch $\Leftrightarrow$ *σ hat zwei verschiedene Fixpunkte in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$*

Diese Definition deckt alle Möglichkeiten ab, da Elemente aus $SL_2(\mathbb{R})$, mit Vielfachheit gezählt, genau zwei Fixpunkte in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ haben. Im Fall $SL_2(\mathbb{R})$ läßt sich diese Definition auch mit Hilfe der Spur formulieren:

Bemerkung 18. *Sei $\sigma \in Sl_2(\mathbb{R})$, $\sigma \neq \pm I$, dann gilt:*
σ ist parabolisch $\Leftrightarrow$ $|Sp(\sigma)| = 2$
σ ist elliptisch $\Leftrightarrow$ $|Sp(\sigma)| < 2$
σ ist hyperbolisch $\Leftrightarrow$ $|Sp(\sigma)| > 2$

Sowohl die obige Definition wie auch die Bemerkung lassen sich aus der Normalformentheorie für $GL_2(\mathbb{C})$ ableiten, siehe hierzu z.B. G. Shimura in [15] (S. 5-7). Die Fixpunkte der Substitutionen werden nach dieser Charakterisierung elliptische, parabolische, oder hyperbolische Fixpunkte genannt, je nachdem in welche Sparte die zugehörige Substitution fällt.

Beispiele
1) Die Abbildung $z \to z+1$, also $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, ist parabolisch. Sie hat den Fixpunkt ∞
2) Die Abbildung $z \to -\frac{1}{z}$ ist ein Beispiel für eine elliptische Transformation, ihr Fixpunkt ist i.
3) In $z \to \frac{2z+3}{z+2}$ ist eine hyperbolische Transformation mit dem Fixpunkt $\pm\sqrt{3}$ gegeben.

Im folgenden sei $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$ eine Untergruppe von endlichem Index in $SL_2(\mathbb{Z})$. Zwei Punkte $z, z' \in \mathbb{H}$ heißen zueinander Γ-äquivalent, wenn es ein Element $\gamma \in \Gamma$ gibt, so daß $z = \gamma z'$ ist. Dies ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation. Zunächst werde ich jetzt zeigen, daß $\mathbb{H}/\Gamma$ ein Hausdorffraum ist. Sei $\pi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/\Gamma$ die natürliche Projektion, durch π wird auf $\mathbb{H}/\Gamma$ die Quotiententopologie induziert.

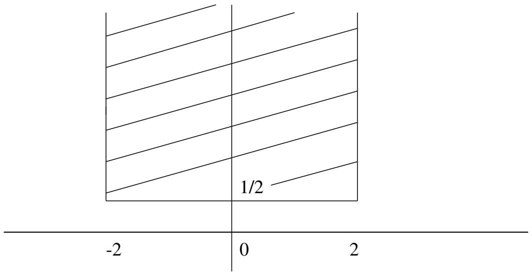
Satz 19. $\mathbb{H}/\Gamma$ *ist ein Hausdorffraum.*

Beweis. Seien $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{H}/\Gamma$ mit $\bar{a} \neq \bar{b}$.
Zu zeigen: Es existieren Umgebungen $V(\bar{a})$ von $\bar{a}$ und $V(\bar{b})$ von $\bar{b}$, so daß gilt

$V(\bar{a}) \cap V(\bar{b}) = \emptyset$, d.h. zu den Urbildern a, b von $\bar{a}, \bar{b}$ existieren Umgebungen $U(a), U(b)$ mit $V(\bar{a}) = \pi(U(a))$ und $V(\bar{b}) = \pi(U(b))$, so daß es für kein $x \in U(a)$ ein $\gamma \in \Gamma$ gibt mit $\gamma(x) \in U(b)$. Da Γ eine Gruppe ist, existiert dann auch kein $\gamma' \in \Gamma$ mit $\gamma'(y) \in U(a)$ für ein $y \in U(b)$. Um das zu beweisen, benötige ich folgendes Lemma, den ich erst nach dem Satz beweisen werde.

Lemma 20. *Sei $\delta > 0$ gegeben.*
$F(\delta) := \{z = x + iy \in \mathbb{H} \mid |x| \leq \delta^{-1},\ y \geq \delta\}$. *Es existieren nur endlich viele $\gamma \in \Gamma$, für die gilt:*

$$\gamma(F(\delta)) \cap F(\delta) \neq \emptyset$$



Der Bereich F(δ)

Der Beweis des Satzes kann jetzt per Widerspruch geführt werden. Seien $U_1(a)$ und $U_1(b)$ Umgebungen von a und b und $a_1 \in U_1(a)$ ein Punkt, $a_1 \neq a$, so daß ein $\gamma_1 \in \Gamma$ existiert mit $\gamma_1(a_1) = b_1 \in U_1(b)$. Wähle $U_2(a) \subset U_1(a)$ als echte Teilmenge von $U_1(a)$ und ebenso $U_2(b) \subset U_1(b)$. Wenn in jeder Umgebung von a ein Punkt existierte, der durch ein $\gamma \in \Gamma$ in die entsprechende Umgebung von b abgebildet würde, entstünden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthalten in Umgebungen $U_i(a), U_i(b)$ und $(\gamma_n) \subseteq \Gamma$ mit $\gamma_n(a_n) = b_n$ und $a_n \to a, b_n \to b$.
Wähle kompakte Umgebungen $\overline{U(a)} \supset U(a), \overline{U(b)} \supset U(b)$, diese sind für ein δ in einem Bereich F_δ enthalten. Dann existiert wegen Lemma 20 eine konstante Teilfolge $(\gamma_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\gamma_{n_i} = \gamma$ für alle i. Also gilt:

$$b = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \gamma_n(a_n) = \lim_{n\to\infty} \gamma(a_n) = \gamma \lim_{n\to\infty} a_n = \gamma(a)$$

Widerspruch zu $\bar{a} \neq \bar{b}$. □

Beweis. (*Lemma*) Sei $\gamma \in \Gamma$ $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$
i) $c = 0$:
In diesem Fall ist $z \mapsto \frac{az+b}{d}$ wegen der Bedingung $ad-bc = 1$, also $a = d = \pm 1$, gerade die Translation um $\pm b$. Da $|x| \leq \delta^{-1}$ ist für $z \in F(\delta)$, gibt es nur endlich viele ganzzahlige Translationen, für die gilt $\gamma(F(\delta)) \cap F(\delta) \neq \emptyset$.

ii) $c \neq 0$
Für γ mit $\gamma(F(\delta)) \cap F(\delta) \neq \emptyset$ existiert ein Punkt $z = x + iy \in F(\delta)$, für den gilt:
$y = Im(z) \geq \delta$ und $\frac{y}{|cz+d|^2} = Im(\gamma z) \geq \delta$
$\Rightarrow y \geq |cz+d|^2\delta = \delta((cx+d)^2 + c^2y^2) \geq \delta c^2 y^2$ also $\frac{1}{\delta c^2} \geq y \geq \delta > 0$
Diese Bedingung können nur endlich viele $c \in \mathbb{Z}$ erfüllen und wegen

$$y \geq \delta((cx+d)^2 + c^2y^2) \geq \underbrace{\delta c^2 y^2}_{endl.}$$

gibt es dazu auch nur endlich viele d.
Da aus $\gamma(F(\delta)) \cap F(\delta) \neq \emptyset$ folgt: $F(\delta) \cap \gamma^{-1}(F(\delta)) \neq \emptyset$ wobei $\gamma^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, kann es mit der gleichen Begründung auch nur endlich viele $a \in \mathbb{Z}$ geben, die die Bedingung erfüllen.
Letztendlich führt die Determinantenbedingung $ad - bc = 1$ dazu, daß auch b nur aus einer endlichen Menge gewählt werden kann. $\square$

Ein nützliches Korollar zu diesem Lemma ist::

Korollar 21. *Für jedes $z \in \mathbb{H}$ existiert eine Umgebung $U(z)$, für die gilt:*

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(U(z)) \cap U(z) \neq \emptyset\} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma z = z\}$$

Definition 22. *Der* Stabilisator *von z wird mit*

$$\Gamma_z := \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma z = z\}$$

bezeichnet.

Beispiel

Der Stabilisator von ∞ in $SL_2(\mathbb{Z})$ ist:

$$SL_2(\mathbb{Z})_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} a\, b \\ 0\, d \end{pmatrix} \text{ mit } ad = 1 \right\} = \{\pm 1\} \cdot S,$$

wobei S erzeugt wird von $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist. Für eine Untergruppe $\Gamma \subseteq SL_2(\mathbb{Z})$ ist der Stabilisator

$$\Gamma_\infty = \{\pm 1\} \cdot G$$

mit $G = \Gamma \cap S$, und G wird erzeugt von $\begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für ein $R > 0$. R ist echt positiv, da Γ eine Untergruppe von endlichem Index in $SL_2(\mathbb{Z})$ ist.

2.2 Kompaktifizierung von $\mathbb{H}/\Gamma$

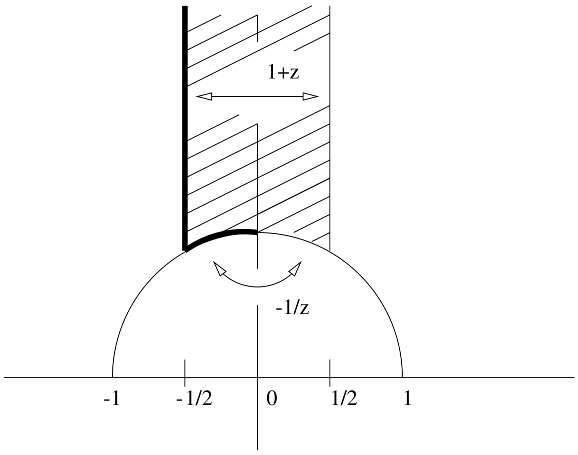
Um zu zeigen, daß $\mathbb{H}/\Gamma$ noch nicht kompakt ist und die folgende Kompaktifizierung zu motivieren, wird an dieser Stelle der Fundamantalbereich von $\mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$ eingeführt. Aus ihm kann dann ein Fundamantalbereich für $\mathbb{H}/\Gamma$ gewonnen werden. Da $-I = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ Element von $SL_2(\mathbb{Z})$ ist und $-I(z) = z$ gilt, wird hier die Gruppe $\overline{SL_2(\mathbb{Z})} := SL_2(\mathbb{Z})/\pm I$ betrachtet.

Definition 23. *Sei G eine Gruppe, die auf $\mathbb{H}$ operiert. $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{H}$ heißt* Fundamentalbereich *für $\mathbb{H}/G$, wenn gilt:*
1) $\mathcal{F}$ ist zusammenhängend.
2) Keine zwei Punkte $x, y \in \mathcal{F}$ sind äquivalent unter G.
3) Jeder Punkt $x \in \mathbb{H}$ ist G-äquivalent zu einem Punkt aus $\mathcal{F}$.

Satz 24.

$$\mathcal{F} := \{w \in \mathbb{H} \mid -\frac{1}{2} \leq Re(w) \leq 0,\ |w| \geq 1\} \cup \{w \in \mathbb{H} \mid 0 < Re(w) < \frac{1}{2},\ |w| > 1\}$$

$\mathcal{F}$ ist ein Fundamantalbereich für $\mathbb{H}/\overline{SL_2(\mathbb{Z})}$.



Der Fundamentalbereich von $\mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$

Der fettgedruckte, also im Fundamentalbereich enthaltene Rand, ist folgendermaßen auf den rechten Rand der Figur bezogen:
Die Senkrechte $\{z \in \mathbb{H} \mid |z| > 1,\ Im(z) = -\frac{1}{2}\}$ geht durch $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : z \mapsto z+1$ über in $\{z \in \mathbb{H} \mid |z| > 1,\ Im(z) = \frac{1}{2}\}$. Das Kreisbogensegment $\{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1,\ -\frac{1}{2} \leq Re(z) \leq 0\}$ ist durch $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) : \ z \mapsto -\frac{1}{z}$ auf $\{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1,\ 0 \leq Re(z) \leq \frac{1}{2}\}$ bezogen.

Beweis. $\mathcal{F}$ ist per Definition zusammenhängend, es sind also nur noch die Eigenschaften 2) und 3) nachzuprüfen.

Zu 2): Seien $z, w \in \mathcal{F},\ z \neq w,\ w = \sigma(z)$ mit $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \neq \pm I$ gegeben. Ohne Einschränkung kann angenommen werden, daß gilt: $Im(z) \leq Im(w)$. Mit $Im(z) \leq Im(w) = Im(\sigma z) = \frac{Im(z)}{|cz+d|^2}$ ergibt sich:

$$|cz + d| \leq 1 \tag{1}$$

Da $z \in \mathcal{F}$ ist, gilt außerdem:

$$|cz + d|^2 = (cRe(z) + d)^2 + \underbrace{(cIm(z))^2}_{>c^2\frac{1}{4}}. \tag{2}$$

Mit (1) und (2) folgt $|c| < 2$.

i) $c \neq 0$, denn:
Aus $c = 0$ würde folgen, daß $a = d = \pm 1$ gilt. Dann gälte $w = z \pm b$, innerhalb von $\mathcal{F}$ geht das nur für $b = 0$. Das steht aber im Widerspruch zu $\sigma \neq \pm I$. Also gilt ohne Einschränkung $c = 1$

ii) $|d| \leq 1$, denn:
Gleichung (1) hat jetzt die Form $|z + d| \leq 1$. Angenommen, $|d|$ wäre größer als 1, dann folgt, da z aus $\mathcal{F}$ ist:

$$|z + d| = \sqrt{(Imz)^2 + (Rez + d)^2} > \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

Widerspruch zu (1). Also gilt $d = 0, 1$ oder -1.

iii) Sei $d = 0$.
Aus (1) folgt $|z| = 1$, außerdem muß σ, wegen $det(\sigma) = 1$ die Gestalt $\left(\begin{smallmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ haben, das heißt $w = a - \frac{1}{z}$. Hier kommen nur die drei Fälle in Frage: $a = \pm 1$ und $a = 0$.

$a = 1$: Es bleibt als einziger Kandidat $z = -\bar{\rho} := e^{\frac{\pi i}{3}}$, da $\sigma(-\bar{\rho}) = \rho$, aber $-\bar{\rho}$ ist nicht Element von $\mathcal{F}$.

$a = -1$: Für $z = \rho := e^{\frac{2\pi i}{3}} \in \mathcal{F}$ gilt $\sigma(\rho) = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)(\rho) = \rho$, ρ wird also durch σ auf sich selbst abgebildet.

$a = 0$: Hier wird $i = z = \sigma(z)$ auf sich abgebildet.

iv) Sei $d = 1$
Mit $z \in \mathcal{F}$ und (1) (also $|z+1| \leq 1$) folgt $z = \rho$. σ hat die Gestalt: $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ mit $a - b = 1$. Dann gilt $w = \frac{a\rho + a - 1}{\rho + 1} = a - \frac{1}{\rho+1}$, dann folgt wegen $\rho^2 + \rho + 1 = 0$: $w = a + \rho$; da $\rho \pm 1$ nicht Element von $\mathcal{F}$ ist, folgt $a = 0$ und $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Es

gilt $\sigma(\rho) = \rho$.
v) Sei $d = -1$
Wie oben folgt $z = -\bar{\rho}$ und $\sigma(-\bar{\rho}) = a + (-\bar{\rho}) \;\Rightarrow\; a = 0$ und $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Zu 3) Sei $z \in \mathbb{H}$ nun beliebig. Da c und d ganze Zahlen sind, existiert eine Matrix $\gamma := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, so daß $|cz + d|$ minimal ist. Mit dieser Matrix gilt für $z' := \gamma(z)$

$$Im(z') = \frac{Im(z)}{|cz+d|^2} \geq Im(\delta(z')) \text{ für alle } \delta \in SL_2(\mathbb{Z})$$

Mit $\tau := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^n$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{Z}$ gilt für $z'' = \tau(z')$: $-\frac{1}{2} \leq Re(z'') < \frac{1}{2}$ und $Im(z'') = Im(z')$. Angenommen $|z''| < 1$, dann hätte man $Im(\zeta(z'')) > Im(z'')$ für $\zeta := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Widerspruch zur Minimalität von $|cz + d|$. □

Aus dem Beweis von Satz 24 ergibt sich ein sehr nützliches Korrolar:

Korollar 25. *1) Die einzigen elliptischen Punkte im Fundamentalbereich von $SL_2(\mathbb{Z})$ sind i und $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.*
2) $\overline{\Gamma_i} := \left\{\gamma \in \overline{SL_2(\mathbb{Z})} | \gamma(i) = i\right\} = \left\{I, \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}$
3) $\overline{\Gamma_\rho} := \left\{\gamma \in \overline{SL_2(\mathbb{Z})} | \gamma(\rho) = \rho\right\} = \left\{I, \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}$

Beweis. Siehe Beweis von Satz 24. □

Ein vollständiges Vertretersystem für $\mathbb{H}^*/\Gamma$, mit einer Untergruppe Γ von $SL_2(\mathbb{Z})$ von endlichem Index, kann mit Hilfe des Fundamentalbereiches von $SL_2(\mathbb{Z})$ gewonnen werden:
Sei $SL_2(\mathbb{Z}) = \bigcup_j \beta_j \Gamma$ eine Zerlegung von $SL_2(\mathbb{Z})$ in Linksnebenklassen bezüglich Γ, $\mathcal{F}$ ein Fundamentalbereich für $\mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$,
dann ist $\mathcal{F}_\Gamma = \bigcup_j {\beta_j}^{-1} \mathcal{F}$ ein vollständiges Vertretersystem für $\mathbb{H}/\Gamma$. Denn, sei $z \in \mathbb{H}$ gegeben, dann existiert mit Satz 24 ein $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ mit $\gamma z \in \mathcal{F}$, γ läßt sich darstellen als $\beta_j \gamma'$ mit $\gamma' \in \Gamma$, also ist γz in $\mathcal{F}_\Gamma$. Die Eindeutigkeit folgt aus der Disjunktheit der Nebenklassen. Das so konstruierte Gebilde muß allerdings nicht zusammenhängend sein.

$\mathbb{H}/SL_2(\mathbb{Z})$ kann durch Hinzunahme des Punktes ∞ kompaktifiziert werden. Um $\mathbb{H}/\Gamma$ für eine beliebige Untergruppe $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$ von endlichem Index zu einer kompakten Riemannschen Fläche zu machen, müssen noch bestimmte Punkte, die Spitzen von Γ, hinzugenommen werden.

Definition 26. *Sei* $\bar{\mathbb{Q}} := \{\infty\} \cup \mathbb{Q}$. *Die Elemente von* $S_\Gamma := \bar{\mathbb{Q}}/\Gamma$ *heißen* Spitzenklassen *von* Γ.

Im Folgenden werde ich mit

$$\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$$

die Erweiterung der oberen Halbebene um $\bar{\mathbb{Q}}$ bezeichnen.
Oft ist es sinnvoll, nicht mit den Äquivalenzklassen, sondern mit den Vertretern zu arbeiten. Diese werden dann auch Spitzen von Γ genannt.

2.3 Topologie von $\mathbb{H}^*/\Gamma$

Zunächst soll eine Topologie auf $\mathbb{H}^*$ definiert werden, um mittels

$$\pi : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}^*/\Gamma$$

die Quotiententopologie auf $\mathbb{H}^*/\Gamma$ einzuführen.

Offene Umgebungen von Punkten in $\mathbb{H}^*$:

i) Auf $\mathbb{H}$ seien offene Mengen wie üblich definiert.

ii) Für $s \in \mathbb{Q}$ sei eine offene Umgebung: $\{s\} \cup \{$ das Innere eines Kreises in $\mathbb{H}$, der s berührt$\}$.

iii) Eine Umgebung von ∞ sei: $\{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{H} \mid Im(z) > c\}$ für ein $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$.

Zunächst wird nun nachgewiesen, daß die Hinzunahme von $\bar{\mathbb{Q}}/\Gamma$ wirklich das gewünschte Resultat erzeugt, also $\mathbb{H}^*/\Gamma$ kompakt ist:

Lemma 27. *Für eine Untergruppe* Γ *von endlichem Index in* $SL_2(\mathbb{Z})$ *ist* $\mathbb{H}^*/\Gamma$ *kompakt.*

Beweis. Es seien $\beta_1, \ldots, \beta_r$ Nebenklassenvertreter von $SL_2(\mathbb{Z})/\Gamma$, d.h. $SL_2(\mathbb{Z}) = \bigcup_j \beta_j \Gamma$. Es seien $\pi : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}^*/SL_2(\mathbb{Z})$ und $\pi' : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}^*/\Gamma$ die natürlichen Projektionen. Eine offene Überdeckung von $\mathbb{H}^*/\Gamma = \bigcup_l \pi'(U_l)$ entspricht über die Quotientenabbildung $\phi : \mathbb{H}^*/\Gamma \to \mathbb{H}^*/SL_2(\mathbb{Z})$ einer offenen Überdeckung $\bigcup_l \pi(U_l)$ von $\mathbb{H}^*/SL_2(\mathbb{Z})$. Da $\mathbb{H}^*/SL_2(\mathbb{Z})$ kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $\bigcup_{k=1}^n \pi(U_k) = \mathbb{H}^*/SL_2(\mathbb{Z})$. Diese erzeugt dann eine endliche Teilüberdeckung von $\mathbb{H}^*/\Gamma$ durch: $\mathbb{H}^*/\Gamma = \bigcup_{j,k} \pi'(\beta_j U_k)$. □

Beispiele:

1) Für $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$ besteht S_Γ nur aus einer Spitzenklasse: $\Gamma \backslash \bar{\mathbb{Q}} = [\infty]$, da $SL_2(\mathbb{Z})$ auf $\bar{\mathbb{Q}}$ transitiv operiert, denn:
sei $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $ggT(a,b) = 1$ und u, v so gewählt, daß $au + bv = 1$ ist. Dann bildet die Matrix $g := \left(\begin{smallmatrix} u & v \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$, $\frac{a}{b}$ auf ∞ ab und g^{-1} bildet ∞ auf einen Punkt $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ab.

2) Für $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$ mit $|SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma| < \infty$ existieren nur endlich viele Spitzenklassen. Denn sei $SL_2(\mathbb{Z}) = \bigcup_1^r \beta_j \Gamma$ mit Vertretern $\beta_1 \ldots \beta_r$ der Linksnebenklassen, $\frac{a}{b} \in \bar{\mathbb{Q}}$ gegeben, dann existiert ein $\alpha \in SL_2(\mathbb{Z})$ mit $\alpha(\frac{a}{b}) = \infty$ (siehe 1)). Mit obiger Zerlegung gilt $\alpha = \beta_j \gamma$ für ein β_j und $\gamma \in \Gamma$.
$\Rightarrow \gamma(\frac{a}{b}) = \beta_j^{-1}(\infty)$.
D.h. Jeder Punkt in $\bar{\mathbb{Q}}$ ist Γ-äquivalent zu einem $\beta_j^{-1}(\infty)$.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß $\mathbb{H}^*/\Gamma$ ein Hausdorffraum ist. Für den Beweis brauche ich allerdings ein technisches Lemma, das ich voranstellen möchte:

Lemma 28. *Sei $s \in \bar{\mathbb{Q}}$ eine Spitze von Γ.*
Es existiert eine offene Umgebung U von s, so daß

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma U \cap U \neq \emptyset\} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma s = s\} =: \Gamma_s$$

Beweis. (*Lemma*) Für die Spitze kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß sie ∞ ist, denn:
für $s \in \mathbb{Q}$ existiert ein $g \in SL_2(\mathbb{Z})$, so daß $gs = \infty$ (siehe Beispiel 1) S. 19). Sei $\Gamma' := g\Gamma g^{-1}$, V sei die Umgebung von ∞, für die gilt $\{\sigma \in \Gamma' \mid \sigma V \cap V \neq \emptyset\} = \Gamma'_\infty$.
Dann ist $U = g^{-1}V$ eine Umgebung, die obige Eigenschaft für s erfüllt, denn:

$$\begin{aligned} \{\sigma \in \Gamma' = g\Gamma g^{-1} \mid \sigma V \cap V \neq \emptyset\} &= \{\gamma \in \Gamma \mid g\gamma g^{-1} V \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma g^{-1} V \cap g^{-1} V \neq \emptyset\} \\ &= \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma U \cup U \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} \Gamma'_\infty = \{\sigma \in \Gamma' \mid \sigma\infty = \infty\} &= \{\gamma \in \Gamma \mid g\gamma g^{-1}(\infty) = \infty\} \\ &= \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma g^{-1}(\infty) = g^{-1}(\infty)\} \\ &= \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma s = s\} \qquad = \Gamma_s \end{aligned}$$

D.h. falls es eine Umgebung V von ∞ gibt, für die gilt

$$\{\sigma \in \Gamma' \mid \sigma V \cap V \neq \emptyset\} = \Gamma'_\infty,$$

so gibt es auch eine Umgebung U von s mit

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma U \cap U \neq \emptyset\} = \Gamma_s$$

Der Rückzug auf den Fall $s = \infty$ ist dadurch motiviert, daß sich der Stabilisator von ∞ in Γ leicht angeben läßt, wie im Beispiel auf S. 15 gezeigt wurde.
Sei nun $s = \infty$.
Der Beweis des Lemmas ist in mehrere Schritte gegliedert. Zunächst wird festgestellt, daß für $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ der Eintrag c nur von der Doppelnebenklasse $\Gamma_\infty \gamma \Gamma_\infty$ abhängt, dann wird gezeigt, daß es nur endlich viele solche Nebenklassen gibt, also auch eine mit $|c|$ minimal, $|c| > 0$. Danach kann die gewünschte Umgebung U konstruiert werden.

1) Sei $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) =: \gamma \in \Gamma$, setze $c_\gamma := c$
Beh.: $|c_\gamma|$ hängt nur von der Doppelnebenklasse $\Gamma_\infty \gamma \Gamma_\infty$ ab.
Denn nach der obigen Bemerkung zum Stabilisator von ∞ in Γ hat ein $\gamma \in \Gamma_\infty$ die Form $\pm 1 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Es ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & \alpha \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & \beta \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ \pm c & * \end{pmatrix}$$

2) Beh.: Für $M \in \mathbb{R},\ M > 0$ existieren nur endlich viele Doppelnebenklassen mit $|c_\gamma| < M$. Ohne Einschränkung gilt $M \geq 1$, da $c_\gamma = 0$ gearde eine der Nebenklassen vertritt.
Denn für $\gamma \in \Gamma$ mit $0 < |c_\gamma| \leq M$ existiert ein $m \in \mathbb{Z}$, so daß gilt: $\gamma' = \gamma \left(\begin{smallmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^m$ genügt den folgenden Ungleichungen:
$|c'| = |c_\gamma| \leq M$ und $1 \leq |d'| = |d + mRc_\gamma| \leq 1 + m|Rc_\gamma|$. (Der Eintrag d von γ wird also in das Intervall $[1, 1 + R|c_\gamma|]$ verschoben).
Für den Imaginärteil von $\gamma'(i)$ gilt dann:

$$Im(\gamma'(i)) = \frac{Im(i)}{\mid c'i + d' \mid^2} = \frac{1}{c'^2 + d'^2} \geq \frac{1}{M^2 + (1 + RM)^2}$$

also gilt $\gamma'(i) \in \{z \in \mathbb{H}^* \mid \frac{1}{M^2 + (1+RM)^2} \leq Im(z) \leq 1\}$ (es ist $Im(\gamma'(i)) \leq 1$, da für c_γ gilt: $|c_\gamma| > 0$).
Weiterhin existiert ein $n \in \mathbb{Z}$, so daß für $\gamma'' := \left(\begin{smallmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^n \cdot \gamma'$ gilt:
$Im(\gamma''(i)) = Im(\gamma'(i))$ und $0 \leq |Re(\gamma''(i))| \leq 1$,
denn sei $\gamma'(a) = z$ und $\alpha := \left(\begin{smallmatrix} 1 & Rn \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, dann ist $\alpha(z) = \frac{z + Rn}{1}$ $(n \in Z)$,
daher $Im(\alpha z) = Im(z)$ und $Re(\alpha z) = Re(z) + Rn$.
D.h. jede Doppelnebenklasse $\Gamma_\infty \gamma \Gamma_\infty$ enthält ein σ, so daß

$$\sigma(i) \in B := \{z \in \mathbb{H} \mid 0 \leq |Re(z)| \leq R,\ \frac{1}{M^2 + (1 + RM)^2} \leq Im(z) \leq 1\}$$

Mit $\delta = \frac{1}{M^2+(1+RM)^2}$ gilt $B \subset F(\delta)$ ($F(\delta)$ wie in Lemma 20)), denn $|Re(z)| \leq R < M^2 + (1+RM)^2$ und $Im(z) \geq \frac{1}{M^2+(1+RM)^2}$. Also gilt mit Lemma 20:
$|\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma B \cap B \neq \emptyset\}| < \infty$. Da $i \in B$, gilt insbesondere:

$$|\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(i) \cap B \neq \emptyset\}| < \infty$$

Es gibt also nur endlich viele $\sigma \in \Gamma$, die i in den Bereich B abbilden. Da Doppelnebenklassen disjunkt sind, gibt es nur endlich viele Nebenklassen mit $|c_\gamma| < M$.

3) Es gilt $|c_\gamma| = 0$ genau dann, wenn $\gamma \in \Gamma_\infty$. Da $|c_\gamma|$ nur von der Doppelnebenklasse abhängt, derer es nur endlich viele gibt, existiert ein $r > 0$, so daß $|c_\gamma| \geq r$ für alle $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \notin \Gamma_\infty$.

4) Sei $U(\infty) := \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{H} | Im(z) > A\}$ mit $A > \max\{1, \frac{1}{r}\}$ (mit r aus **3)**) und $\gamma \in \Gamma \backslash \Gamma_\infty$, dann gilt für $z \in U(\infty)$, $z = x + iy$:

$$Im(\gamma z) = \frac{Im(z)}{|cz+d|^2} \leq \underbrace{\frac{y}{|c|^2 y^2}}_{(Im(cz))^2} < \frac{1}{r^2 A} < A$$

In $U(\infty)$ ist die gewünschte Umgebung von ∞ gefunden, und es gilt:

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma U(\infty) \cap U(\infty) \neq \emptyset\} = \Gamma_\infty$$

□

Satz 29. $\mathbb{H}^*/\Gamma$ *ist ein Hausdorffraum.*

Beweis. Die Hausdorffeigenschaft wurde für $\mathbb{H}/\Gamma$ schon in Satz 19 nachgewiesen, interessant sind jetzt also nur noch die Spitzen.
Es sind zwei Fälle zu unterscheiden: der Orbit eines Punktes aus der oberen Halbebene muß sich von dem einer Spitze trennen lassen, und zwei Spitzenklassen müssen sich durch Umgebungen voneinander trennen lassen.

1) $z \in \mathbb{H}$, ohne Einschränkung sei $s = \infty$.
Wähle eine Umgebung V von z mit kompaktem Abschluß, so daß gilt:
$V \subseteq \{w \in \mathbb{H} \mid A < Im(w) < B,\ A, B \in \mathbb{R}\}$
Die Umgebung von ∞ sei
$U := \{\infty\} \cup \{w \in \mathbb{H} \mid Im(w) > max(B, \frac{1}{Ar^2})\}$,
wobei r gewählt sei gemäß **3)** in Beweis zu Lemma 28.
Für $\gamma \in \Gamma_\infty, w \in U$ ist $Im(\gamma w) = Im(w) > B$, also $\gamma w \notin V$.
Für $\gamma \in \Gamma,\ \gamma \notin \Gamma_\infty$ und $w \in U$ gilt:

$$Im(\gamma w) = \frac{Im(w)}{|cw+d|^2} \leq \frac{Im(w)}{|c|^2 Im(w)^2} = \frac{1}{|c|^2 Im(w)} < \frac{1}{r^2 \frac{1}{Ar^2}} < A,$$

auch hier gilt demnach $\gamma w \notin V$.
Un damit gilt für alle $\gamma \in \Gamma: \ \gamma U \cap V = \emptyset$.

2) Seien s, t Spitzen von Γ. Wie oben kann angenommen werden, daß eine der Spitzen, z.B. $t = \infty$ ist.
zu zeigen: es existieren Umgebungen W von s und U von ∞, so daß $\gamma W \cap U = \emptyset$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Sei

$$\begin{array}{rcl} U & := & \{z \in \mathbb{H}^* \mid Im(z) > 1\} \\ K & := & \{z \in \mathbb{H} \mid Im(z) = 1, \ 0 \leq Re(z) \leq 1\} \end{array}$$

In 1) wurde gezeigt, daß sich eine Spitzenklasse $\bar{s}$ von einem beliebigen Punkt $\bar{z} \in \mathbb{H}/\Gamma$ trennen läßt, insbesondere existiert eine Umgebung W von s, so daß $\gamma W \cap K = \emptyset$ für alle $\gamma \in \Gamma$ (da $K \subset V$ mit $A = \frac{1}{2}, B = \frac{3}{2}$, und K kompakt ist). Die Umgebung W kann so gewählt werden, daß $\overline{W}$ die abgeschlossene Kreisscheibe ist, welche in s tangential an $\mathbb{R}$ ist. Da s nicht Γ- äquivalent mit ∞ ist, gilt: $\gamma s \neq \infty$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Die linearen Transformationen erhalten die Kreisverwandtschaft, also ist $\gamma(W)$ wieder ein Kreis, der die reelle Achse berührt. Wäre jetzt $\gamma W \cap U \neq \emptyset$, würde nach geeigneter Translation mit $\sigma \in \Gamma_\infty$ gelten: $\sigma\gamma(W) \cap K \neq \emptyset$. Das steht im Widerspruch dazu, daß der Schnitt $\gamma W \cap K$ für alle $\gamma \in \Gamma$ leer sein soll. □

2.4 Die analytische Struktur von $\mathbb{H}^*/\Gamma$

Es sei $p_\Gamma : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}^*/\Gamma$ die natürliche Projektion.

Bemerkung 30. *Für $z \in \mathbb{H}^*$ existiert eine offene Umgebung U von z für die gilt:*

$$\Gamma_z = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(U) \cap U \neq \emptyset\}$$

Beweis. Falls z eine Spitze von Γ ist, ist das gerade die Aussage von Lemma 28. Für $z \in \mathbb{H}$ folgt dies aus Korrolar 21. □

Um $\mathbb{H}^*/\Gamma$ mit einer analytischen Struktur auszustatten, werden als nächstes Karten definiert, wobei drei Fälle zu beachten sind:

1) $z \in \mathbb{H}$, z ist nicht Fixpunkt einer elliptischen Substitution.
2) $z \in \mathbb{H}$, z ist Fixpunkt einer elliptischen Substitution.
3) $z \in \mathbb{H}^*$, z ist Spitze von Γ.

Zu 1) Hier gilt $\Gamma_z = \pm I$, also $\overline{\Gamma_z} = id_{\mathbb{H}}$.
Die Karte sei $(U/\Gamma_z, p_\Gamma^{-1})$ wobei U die von Bemerkung 30 garantierte Umgebung ist und $p_\Gamma : \mathbb{H}^* \to \mathbb{H}^*/\Gamma$ die natürliche Projektion, die auf U/Γ_z ein Homöomorphismus ist.

Zu 2) $z \in \mathbb{H}$ sei Fixpunkt einer elliptischen Substitution. Für $\overline{\Gamma_z}$ gilt dann:

Bemerkung 31. *$\overline{\Gamma_z}$ ist eine endliche zyklische Gruppe.*

Beweis. (Bemerkung)
Sei $\gamma \in \Gamma$ ein elliptisches Element mit $\gamma z = z$ und sei $g \in SL_2(\mathbb{R})$ so gewählt, daß gilt $g(i) = z$. Dann ist $g^{-1}\gamma g(i) = i$, da der Stabilisator von i gerade $SO_2(\mathbb{R})$ ist, gilt:

$$\Gamma_z = \Gamma \cap gSO_2(\mathbb{R})g^{-1}$$

hier ist die rechte Seite der Schnitt einer diskreten Menge (Γ) mit einer kompakten ($SO_2(\mathbb{R})$ ist isomorph zu S^1), also ist Γ_z isomorph zu einer endlichen Untergruppe von S^1, ist also zyklisch. Dann ist auch $\overline{\Gamma_z} = \Gamma_z/(\pm I \cap \Gamma)$ endlich und zyklisch. □

Sei $\tilde{\lambda}(w) := \frac{w-i}{w+i}$, $\tilde{\lambda}$ ist eine holomorphe Abbildung der oberen Halbebene in die Einheitskreisscheibe mit $\tilde{\lambda}(i) = 0$. Wähle $\alpha \in SL_2(\mathbb{R})$ mit $\alpha(z) = i$ und setze $\lambda(w) := \tilde{\lambda}(\alpha(w)) = \frac{\alpha(w)-i}{\alpha(w)+i}$; insbesondere gilt: $\lambda(z) = 0$.
$\lambda\Gamma_z\lambda^{-1}$ ist also eine endliche Gruppe von Automorphismen des Einheitskreises, die 0 auf sich abbilden.
Mit dem Lemma von Schwarz folgt dann, daß die Elemente von $\lambda\Gamma_z\lambda^{-1}$ die Form haben: $w \mapsto \zeta^k w$ mit $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ und $0 \leq k \leq n-1,\ n = |\Gamma_z|$.

Lemma 32 (Schwarz). *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die auf dem Einheitskreis analytisch ist. Es gelte $f(0) = 0$, dann folgt:*

$$|f(z)| \leq |z| \text{ für alle } z \in D$$

Falls zusätzlich gilt $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in D$, so ist $f(z) = e^{i\lambda}z$ mit einem passenden $\lambda \in \mathbb{R}$.

Der Beweis beruht auf dem Maximumprinzip, und ich werde ihn hier nicht ausführen (vergl. [3] S.253). Für $f \in Aut(D)$ mit $f(0) = 0$ gilt: $|f(z)| \leq |z|$ und $|z| = |f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)|$. Demnach gilt $|f(z)| = |z|$ für alle $z \in D$, also $f(z) = e^{i\lambda}z$.
Die Karte für U/Γ_z mit einer ausreichend kleinen Umgebung U von z, sei definiert als:

$$(U/\Gamma_z, p^*) \text{ mit } p^*(p_\Gamma(w)) := (\lambda(w))^n$$

p^* ist wohldefiniert:
Sei $w \in U,\ w \neq z$, dann ist $p_\Gamma(w) = \{\gamma w \mid \gamma \in \Gamma_z\}$:

$$\begin{aligned} p^*(p_\Gamma(w)) &= (\lambda(\gamma w))^n \\ &= (\lambda(\gamma\lambda^{-1}(\lambda w)))^n \\ &= (\zeta^k \lambda w)^n \qquad = \ (\lambda(w))^n \text{ für alle } \gamma \in \Gamma_z \end{aligned}$$

Die Abbildung $z \mapsto z^n$ ist invariant unter Transformation der z durch die zyklische Gruppe $z \mapsto \zeta z$, bildet also D/Γ homöomorph auf die Kreisscheibe ab.

Zu 3) Sei $z \in \mathbb{H}^*$ eine Spitze von Γ. Wähle $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$ mit $\sigma(z) = \infty$, dann ist

$$\sigma\Gamma\sigma^{-1}\{\pm I\} = \left\{\pm \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n, \ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

U_z sei eine Umgebung von z, für die gilt $\Gamma_z = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(U_z) \cap U_z \neq \emptyset\}$ (siehe Bemerkung 30).
Eine Karte für z sei $(U_z/\Gamma_z, \ p^*)$, wobei

$$p^*(p_\Gamma(z)) := e^{\frac{2\pi i\sigma(z)}{R}}$$

Dies ist ein Homöomorphismus, da die e-Funktion horizontale Streifen der Höhe $2\pi i$ bijektiv auf $\mathbb{C}^*$ abbildet. Also bildet $e^{2\pi iz}$ Säulen der Breite 1 bijektiv auf $\mathbb{C}^*$ ab und $e^{\frac{2\pi i\sigma(z)}{R}}$ Säulen der Breite R. Für $Im(z) \to \infty$ gilt $e^{\frac{2\pi i\sigma(z)}{R}} \to 0$. Hier ist die Abbildung $z \mapsto e^{\frac{2\pi iz}{R}}$ invariant bei Translation um R, bildet also U_z/Γ_z homöomorph auf D ab.

Diese Abbildungen sind auf den Schnitten $\phi(U_1 \cap U_2)$ holomorph und bijektiv und da das jeweils für $\phi_2 \circ {\phi_1}^{-1}$ wie auch für die Umkehrung gilt sind sie auch biholomorph. Damit ist eine komplexe Struktur auf $X_0(15)$ definiert.

Für die Konstruktion von R. Fricke, die in Kapitel 4 vorgestellt wird, benötige ich Informationen über das Geschlecht von $X_0(15)$. Da dies sich mit den gerade gewonnenen Informationen zur analytischen Struktur und der Riemann-Hurwitzschen Formel berechnen läßt, werde ich hier einen Abschnitt zur Berechnung des Geschlechts von $X_0(15)$ einschieben.

2.5 Eine Formel zur Berechnung des Geschlechts von $X_0(15)$

Proposition 33. *Die Abbildung*

$$f : \ \mathbb{H}^*/\Gamma_0(N) \to \mathbb{H}^*/SL_2(\mathbb{Z})$$

ist eine verzweigte Überlagerung vom Grad $\mu := [SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)]$. *Die Vielfachheit mit der* f *in einem Punkt* $p \in \mathbb{H}^*/\Gamma_0(N)$ *den Wert* $f(p)$ *annimmt, ist gegeben durch* $[\overline{SL_2(\mathbb{Z})_w} : \overline{\Gamma_0(N)_w}]$, *wobei* $\pi(w) = p$ *gilt.*

Beweis. Ich werde zeigen, daß f holomorph und nicht konstant ist. Wie in Kapitel 2 dargelegt, ist f dann insbesondere eine verzweigte Überlagerung.

Der Grad von f ergibt sich aus der Konstruktion.
Die in Teil 3.4 entwickelte analytische Struktur ermöglicht einen direkten Zugang zum Verhalten von f. Die Fälle 1) und 2), also Punkte die nicht Spitzen sind, können folgendermaßen zusammengefaßt werden: In 1) wird als Kartenabbildung zu den schon gewählten Umgebungen nicht die Identität gewählt, sondern $\lambda(z)$, die auch in 2) benutzte Abbildung, die z auf den Nullpunkt abbildet.
i) Für einen Punkt $z \in \mathbb{H}$ stellt sich f jetzt folgendermaßen dar:

$$p_{\Gamma_0(N)}{}^{*} \cdot f \cdot p_{SL_2(\mathbb{Z})}{}^{*-1}|_{U_z} : z \mapsto z^{\frac{n_1}{n_0}}$$

wobei $n_1 := |\overline{SL_2(\mathbb{Z})_z}| \geq |\overline{\Gamma_0(N)_z}| =: n_0$.
f ist holomorph. Der Verzweigungsindex in einem Punkt $p = \pi(z)$ ist $[\overline{SL_2(\mathbb{Z})_z} : \overline{\Gamma_0(N)_z}] = \frac{n_1}{n_0}$. Insbesondere ist der Verzweigungsindex 1 in Punkten, die nicht elliptisch sind.
ii) Sei $z \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ eine Spitze. Hier stellt sich f folgendermaßen dar:

$$p_{\Gamma_0(N)}{}^{*} \cdot f \cdot p_{SL_2(\mathbb{Z})}{}^{*-1}|_{U_z} : z \mapsto z^R$$

Auch hier ist f offensichtlich holomorph. □

Proposition 34. *Das Geschlecht von $\mathbb{H}^*/\Gamma_0(N)$ errechnet sich als:*

$$g = 1 + \frac{\mu}{12} - \frac{\nu_2}{4} - \frac{\nu_3}{3} - \frac{\nu_\infty}{2},$$

wobei $\mu = [SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)]$ den Index von $\Gamma_0(N)$ in $SL_2(\mathbb{Z})$ darstellt und ν_2, ν_3 die Anzahl der unter $\Gamma_0(N)$ inäquivalenten Punkte über i bzw. $\rho := e^{\frac{2\pi i}{3}}$ bezeichnet; $\nu_\infty =$ ist gleich der Anzahl der unter $\Gamma_0(N)$ inäquivalenten Spitzen.

Beweis. Für die oben beschriebene Überlagerungsabbildung

$$f: \ \mathbb{H}^*/\Gamma_0(N) \to \mathbb{H}^*/SL_2(\mathbb{Z})$$

gilt: In einem $p \in \mathbb{H}/\Gamma_0(N)$, welches nicht über i, ρ oder ∞ liegt, ist der Verzweigungsindex 1.
Seien $q_1, \ldots, q_h$ die über $\pi_{SL_2(\mathbb{Z})}(\rho)$ liegenden Punkte und $e_j := v_f(q_j)$ die Vielfachheit, mit der f in q_j den Wert $f(q_j)$ annimmt.
Es gilt $\mu = [SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)] = \sum_{i=1}^{h} e_i$. Korollar 25 besagt, daß $\#|SL_2(\mathbb{Z})_\rho| = 3$ ist, $[\overline{SL_2(\mathbb{Z})}_{q_j} : \overline{\Gamma_0(N)}_{q_j}]$ kann also nur 1 oder 3 sein:

$$e_j = [\overline{SL_2(\mathbb{Z})}_{q_j} : \overline{\Gamma_0(N)}_{q_j}] = \begin{cases} 1 & \text{falls } q \text{ elliptischer Punkt von } \Gamma_0(N) \text{ ist} \\ 3 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit $\nu_3' = h - \nu_3$ folgt $\mu = \sum_{i=1}^{h} e_i = \nu_3 + 3\nu_3'$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{h}(e_i - 1) = \sum_{i=1}^{h} e_i - h = \nu_3 + 3(h - \nu_3) - h = 2h - 2\nu_3 = 2\nu_3'$$

Da $\nu_3' = \frac{\mu-\nu_3}{3}$, folgt $\sum_{i=1}^{h}(e_i - 1) = \frac{2}{3}(\mu - \nu_3)$. Analog kann für q über $\pi_{SL_2(\mathbb{Z})}(i)$ liegend geschlossen werden:

$$e_j = [\overline{SL_2(\mathbb{Z})}_{q_j} : \overline{\Gamma_0(N)}_{q_j}] = \begin{cases} 1 & \text{falls } q \text{ elliptischer Punkt von } \Gamma_0(N) \text{ ist} \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{h}(e_i - 1) = \frac{1}{2}(\mu - \nu_2)$$

Über der Spitzenklasse von $SL_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^* = \pi_{SL_2(\mathbb{Z})}(\infty)$ gelegene Punkte $p \in \mathbb{H}^*/\Gamma_0(N)$ sind immer auch Spitzen von $\Gamma_0(N)$, deshalb ergibt sich hier:

$$\sum_{i=1}^{\nu_\infty}(e_i - 1) = \mu - \nu_\infty$$

Die schon in Kapitel 2 erwähnte Riemann-Hurwitz-Formel

$$g = \frac{b}{2} + n(g' - 1) + 1$$

ergibt auf die obige Situation angewandt, in der das Geschlecht g' von $\mathbb{H}^*/SL_2(\mathbb{Z})$ gleich Null ist:

$$\begin{aligned} g = \tfrac{\sum(e_i-1)}{2} - \mu + 1 &= (\tfrac{1}{3}(\mu - \nu_3) + \tfrac{1}{4}(\mu - \nu_2) + \tfrac{1}{2}(\mu - \nu_\infty)) - \mu + 1 \\ &= 1 + \tfrac{\mu}{12} - \tfrac{\nu_3}{3} - \tfrac{\nu_2}{4} - \tfrac{\nu_\infty}{2} \end{aligned}$$

$\square$

Die Berechnung des Geschlechts von $\mathbb{H}^*/\Gamma_0(15)$ wird erst in Kapitel 3 ausgeführt, da sich die Anzahl ν_∞ der $\Gamma_0(15)$-inäquivalenten Spitzen, mit Hilfe der dort betimmten Nebenklassenvertreter von $\Gamma_0(15)$ in $SL_2(\mathbb{Z})$, bestimmen läßt.

3 Repräsentanten der Nebenklassen von $\Gamma_0(15)$ in $SL_2(\mathbb{Z})$

In diesem Kapitel werde ich Vertreter für die Nebenklassen von $\Gamma_0(15)$ in $SL_2(\mathbb{Z})$ bestimmen, um dann Vertreter der Spitzenklassen $\bar{\mathbb{Q}}/\Gamma_0(15)$ berechnen zu können. Da für den Fall $\Gamma_0(p)$ mit p prim schon Nebenklassenvertreter bekannt sind, werde ich im ersten Teil zeigen, daß folgende Isomorphie besteht $SL_2(\mathbb{Z}_N) \cong SL_2(\mathbb{Z}_p) \times SL_2(\mathbb{Z}_q)$. Der Beweis hierzu ist zwar etwas ausführlich, liefert dafür aber ein konstruktives Verfahren zur Berechnung der Vertreter für $\Gamma_0(15)$ aus schon bekannten für $\Gamma_0(3)$ und $\Gamma_0(5)$.
Im zweiten Teil werde ich die Indexformel

$$[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)] = N\ \Pi_{p|N}(1 + \frac{1}{p})$$

beweisen. Im Fall $\Gamma_0(15)$ sind also 24 Nebenklassenvertreter zu finden, der letzte Teil besteht aus deren Berechnung.

Ich werde folgende abkürzende Schreibweisen benutzen:

$$\begin{aligned}
\Gamma_N &:= SL_2(\mathbb{Z}_N) := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\ ad - bc = 1 \right\} \\
\Gamma(N) &:= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma \middle| \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\ (N) \right\} \\
\Gamma_0(N) &:= \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma | c \equiv 0\ (N) \right\}
\end{aligned}$$

3.1 Nebenklassenvertreter

Das erste Lemma stellt die verschiedenen auftretenden Gruppen in Beziehung zueinander und wird sowohl in diesem Teil des Kapitels, als auch zur Berechnung des Index benötigt.

Lemma 35. *Sei $\Gamma := SL_2(\mathbb{Z})$, dann ist die Folge*

$$1 \to \Gamma(N) \to \Gamma \xrightarrow{f} \Gamma_N \to 1$$

ist exakt.

Beweis. $\Gamma(N)$ ist nach Definition der Kern des Reduktionshomomorphismus f, zu zeigen ist daher nur noch, daß f surjektiv ist.
Sei ein Element von $SL_2(\mathbb{Z}_N)$ repräsentiert durch eine ganzzahlige Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ gegeben. Es gilt $ad - bc \equiv 1\ (N)$, d.h. $ggT(c, d, N) = 1$. Ohne Einschränkung kann angenommen werden, daß auch $ggT(c, d) = 1$ ist, indem nötigenfalls d ersetzt wird durch $d' := d + lN$ mit $l = \Pi p$, wobei das Produkt

über alle Pimzahlen p gebildet ist, die c teilen, nicht aber d. Dabei hat man weiterhin $ad' - bc \equiv 1\ (N)$ und mit obiger Wahl von d' gilt $ggT(c, d') = 1$. Denn, sei q ein Primteiler von c, dann gilt:
entweder q teilt d, dann teilt q nicht N nach Voraussetzung und nicht l nach Konstruktion, also teilt q nicht d', oder q teilt nicht d, dann teilt q nach Konstuktion l und wiederum nicht d'.
Gesucht ist jetzt ein $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} a+eN & b+fN \\ c & d' \end{smallmatrix}\right)$ mit $det(\alpha) = 1$. Das ist gleichbedeutend damit, daß e und $f \in \mathbb{Z}$ existieren, die folgende Gleichung lösen:

$$\begin{array}{rlcl} & (a+eN)d' - (b+fN)c & = & 1 \\ \Leftrightarrow & ad' - bc + N(ed' - fc) & = & 1 \\ \Leftrightarrow & 1 + N(k+al) + N(ed' - cf) & = & 1 \\ \Leftrightarrow & ed' - cf & = & -(k+al) \end{array}$$

Solche Zahlen e und f lassen sich finden, da $ggT(c, d') = 1$ ist. □

Lemma 36. *Für $N \in \mathbb{Z},\ N = pq,\ ggT(p, q) = 1$ gilt:*

$$SL_2(\mathbb{Z}_N) \cong SL_2(\mathbb{Z}_p) \times SL_2(\mathbb{Z}_q)$$

Beweis. Sei

$$\phi :\ SL_2(\mathbb{Z}_N) \to SL_2(\mathbb{Z}_p) \times SL_2(\mathbb{Z}_q)$$

der kanonische Homomorphismus in das Produkt der Quotienten mod p und mod q. Da p und q teilerfremd sind, gibt es eine Darstellung $1 = up+vq$, setze $a = vq$ und $b = up$. Dann gilt $ab \equiv 0\ (N)$ und damit auch $a^2 - a = a(a-1) = a(-b) \equiv 0\ (N)$, d.h. $a^2 \equiv a\ (N)$, ebenso folgt $b^2 \equiv b\ (N)$. Diese Eigenschften werden nicht verändert, wenn a, b modulo N abgeändert werden.
Durch

$$\begin{array}{rrcl} \psi : & SL_2(\mathbb{Z}_p) \times SL_2(\mathbb{Z}_q) & \to & SL_2(\mathbb{Z}_N) \\ & (\alpha, \beta) & \mapsto & a\tilde{\alpha} + b\tilde{\beta} \end{array}$$

ist eine Abbildung erklärt für die gilt: $\phi \circ \psi = id$. Diese Abbildung ist die Umkehrung der Reduktion ϕ. Klar ist, daß ψ per Konstruktion ein injektiver Homomorphismus ist, zu zeigen ist also nur noch die Wohldefiniertheit und die Surjektivität.

a) ψ ist wohldefiniert:
$\psi(\alpha, \beta) \in SL_2(\mathbb{Z}_N)$:

$$\begin{array}{rcll} det(a\tilde{\alpha} + b\tilde{\beta}) & = & (a\tilde{\alpha}_1 + b\tilde{\beta}_1)(a\tilde{\alpha}_4 + b\tilde{\beta}_4) - (a\tilde{\alpha}_2 + b\tilde{\beta}_2)(a\tilde{\alpha}_3 + b\tilde{\beta}_3) & \\ & \equiv & a^2 det(\tilde{\alpha}) + b^2 det(\tilde{\beta}) & (N) \\ & \equiv & 1 & (N) \end{array}$$

für $(\alpha,\beta)\sim(\alpha',\beta')$ gilt $\psi(\alpha,\beta)\sim\psi(\alpha',\beta')$:

$$\begin{aligned}\psi(\alpha,\beta) &= a(\tilde{\alpha}'+r\left(\begin{smallmatrix} p & p\\ p & p\end{smallmatrix}\right))+b(\tilde{\beta}'+s\left(\begin{smallmatrix} q & q\\ q & q\end{smallmatrix}\right))\\ &\equiv a\tilde{\alpha}'+b\tilde{\beta}' \qquad\qquad\qquad (N)\\ &= \psi(\alpha',\beta')\end{aligned}$$

b) ψ ist surjektiv:
Sei $\left(\begin{smallmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{smallmatrix}\right)\in SL_2(\mathbb{Z}_N)$ gegeben, $k=ggT(a,b),\ a=\tilde{a}k,\ b=\tilde{b}k$, gesucht sind $x_i,y_i\in\mathbb{Z}$ mit $k^{-1}\alpha_i\equiv\tilde{a}x_i+\tilde{b}y_i\ (N)$ für $i=1,\dots,4$.
Da $ggT(\tilde{a},\tilde{b})=1$ ist, lassen sich solche $x_i,\ y_i$ finden.
Die so entstandenen Matrizen $(x):=\left(\begin{smallmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{smallmatrix}\right),\ (y):=\left(\begin{smallmatrix}y_1 & y_2\\ y_3 & y_4\end{smallmatrix}\right)$ genügen den Determinantenbedingungen $det(x)\equiv 1\ (p),\ det(y)\equiv 1\ (q)$, denn:

$$\begin{array}{lrcll} & \alpha_1\alpha_4-\alpha_2\alpha_3 & \equiv & 1 & (N)\\ \Leftrightarrow & (ax_1+by_1)(ax_4+by_4)-(ax_2+by_2)(ax_3+by_3) & \equiv & 1 & (N)\\ \Rightarrow & a^2x_1x_4-a^2x_2x_3 & \equiv & 1 & (p)\\ \Leftrightarrow & det(x) & \equiv & 1 & (p)\end{array}$$

Analog für $det(y)$. □

Die Reduktion von $\Gamma_0(N)$ modulo N sei mit $\widetilde{\Gamma_0(N)}$ bezeichnet. $\widetilde{\Gamma_0(N)}$ besteht aus den oberen Dreiecksmatrizen $\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ 0 & a^{-1}\end{smallmatrix}\right)$ aus $SL_2(\mathbb{Z}_N)$. Die Reduktion modulo p und q induziert dann einen Isomorphismus

$$\widetilde{\Gamma_0(N)}\cong\widetilde{\Gamma_0(p)}\times\widetilde{\Gamma_0(q)}. \tag{3}$$

Lemma 37. *Gibt es zu $\alpha,\beta\in SL_2(\mathbb{Z})$ ein $\gamma_N\in\widetilde{\Gamma_0(N)}$ mit $\alpha\equiv\beta\gamma_N\ (N)$, so existiert ein Litf $\gamma\in\Gamma_0(N)$ mit $\alpha=\beta\gamma$ in $SL_2(\mathbb{Z})$.*

Beweis. Sei $\alpha=\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ und $\beta=\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ aus $SL_2(\mathbb{Z})$ gegeben, Division mit Rest durch N ergibt:

$$\begin{array}{lll} a=a'+r_1N & b=b'+r_2N & \\ c=c'+r_3N & d=d'+r_4N & \text{mit } a',b',c',d'\in\{0,\dots,N-1\}\end{array}$$

Dann gilt:

$$\begin{array}{ccc}\left(\begin{smallmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{smallmatrix}\right) & \equiv & \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)\underbrace{\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & z\end{pmatrix}}_{=\gamma_N} \qquad (N)\\ \left(\begin{smallmatrix}a'+s_1N & b'+s_2N\\ c'+s_3N & d'+s_4N\end{smallmatrix}\right) & = & \left(\begin{smallmatrix}\alpha x & \alpha y+\beta z\\ \gamma x & \gamma y+\delta z\end{smallmatrix}\right)\end{array}$$

Es muß jetzt eine zu γ_N äquivalente Matrix $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} x'+iN & y'+jN \\ kN & z'+lN \end{smallmatrix}\right)$ aus $\Gamma_0(N)$ gefunden werden, so daß gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) &= \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} x'+iN & y'+jN \\ kN & z'+lN \end{smallmatrix}\right) \\
&= \left(\begin{smallmatrix} \alpha x+N(i\alpha+k\beta) & \alpha y+\beta z+N(\alpha j+\beta l) \\ \gamma x+N(i\gamma+k\delta) & \gamma y+\delta z+N(\gamma j+\delta l) \end{smallmatrix}\right) \\
\left(\begin{smallmatrix} a'+r_1N & b'+r_2N \\ c'+r_3N & d'+r_4N \end{smallmatrix}\right) &= \left(\begin{smallmatrix} a'+N(i\alpha+k\beta+s_1) & b'+N(j\alpha+l\beta+s_2) \\ c'+N(i\gamma+k\delta+s_3) & d'+N(j\gamma+l\delta+s_4) \end{smallmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Also folgt für i, j, k, l:

$$\begin{pmatrix} r_1 - s_1 \\ r_3 - s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} r_2 - s_2 \\ r_4 - s_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ l \end{pmatrix}$$

Da $\beta_j = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$ aus $SL_2(\mathbb{Z})$ ist und die $r_i,\ s_i$ bekannt sind, ist dieses Gleichungssystem eindeutig lösbar.
γ ist Element von $SL_2(\mathbb{Z})$, da β und α aus $SL_2(\mathbb{Z})$ sind. □

Korollar 38. *Seien $\beta_j \in SL_2(\mathbb{Z})$, $\widetilde{\beta_j}$ die entsprechenden Reduktionen modulo N aus $SL_2(\mathbb{Z}_N)$, $\widetilde{\Gamma_0(N)}$ sei die Reduktion von $\Gamma_0(N)$ modulo N. Es gilt:*

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \bigcup_j \beta_j \Gamma_0(N) \Leftrightarrow SL_2(\mathbb{Z}_N) = \bigcup_j \widetilde{\beta_j}\widetilde{\Gamma_0(N)}$$

Beweis. $\Rightarrow$ Diese Richtung gilt offensichtlich, da die Reduktion modulo N ein Homomorphismus ist.
$\Leftarrow$ folgt aus Lemma 37. □

3.2 Der Index $[\Gamma : \Gamma_0(N)]$

Zur Berechnung des Index werde ich neben Lemma 35 noch zwei weitere Lemmata benötigen, die ich hier voranstellen möchte.

Lemma 39.

$$[\Gamma : \Gamma(N)] = N^3 \Pi_{p|N}(1 - \frac{1}{p^2})$$

Beweis. Lemma 35 hat gezeigt, daß $\Gamma/\Gamma(N)$ isomorph zu Γ_N ist. Daraus folgt: $[\Gamma : \Gamma(N)] = |\Gamma_N|$, wobei $|\Gamma_N|$ die Anzahl der modulo N inkongruenten Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $ad - bc \equiv 1\ (N)$ ist.
Sei $\mu(N) := |\Gamma_N|$. Zunächst soll hier angenommen werden, daß $N = p^\alpha$ eine Primzahlpotenz ist, da der allgemeine Fall sich mit Hilfe von Lemma 36 multiplikativ aus den betrachteten zusammensetzen läßt.

i) $a \not\equiv 0\ (p)$:
Es gibt $\phi(p^\alpha)$ verschiedene Restklassenmöglichkeiten für a modulo p^α mit $a \not\equiv 0\ (p)$, hier bezeichnet ϕ die Eulersche ϕ-Funktion (also die Anzahl der invertierbaren Restklassen modulo $p^\alpha:\ \phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$). Für diese Restklassen können b und c frei gewählt werden, es gibt also $p^{2\alpha}$ Möglichkeiten für b und c. Weiterhin ist dann d eindeutig bestimmt durch:

$$\begin{array}{rcll} 1 & \equiv & ad - bc & (p^\alpha) \\ \Rightarrow\ d & \equiv & \frac{1+bc}{a} & (p^\alpha) \end{array}$$

ii) $a \equiv 0\ (p)$:
Außerdem gibt es noch $p^{\alpha-1}$ Restklassen $a\ mod\ p^\alpha$ mit $a \equiv 0\ (p)$. In diesem Fall ist d, unter p^α Möglichkeiten, frei wählbar. Bei der Wahl von b muß jetzt beachtet werden, daß p kein Teiler von bc sein darf, das heißt, daß bc invertierbar ist in $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$. Es gibt also $\phi(p^\alpha)$ Möglichkeiten für b mod p^α, und c ist dann eindeutig bestimmt durch $c \equiv -\frac{1}{b}\ (p^\alpha)$. Für μ folgt damit:

$$\begin{array}{rcl} \mu(p^\alpha) & = & \phi(p^\alpha)p^{2\alpha} + \phi(p^\alpha)p^{2\alpha-1} \\ & = & \phi(p^\alpha)p^{2\alpha}(1+\frac{1}{p}) \\ & = & p^{3\alpha}(1-\frac{1}{p})(1+\frac{1}{p}) \\ & = & p^{3\alpha}(1-\frac{1}{p^2}) \end{array}$$

Für allgemeines N gilt also $\mu(N) = N^3\Pi_{p|N}(1-\frac{1}{p^2})$. □

Lemma 40.

$$[\Gamma_0(N) : \Gamma(N)] = N\phi(N)$$

Beweis. Mit Lemma 35 folgt: $\Gamma_0(N)/\Gamma(N) \cong \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}_N)\right\}$. Wobei die Anzahl der Möglichkeiten, a zu wählen, $\phi(N)$ ist, und b in den Restklassen mod N frei wählbar ist. Es folgt:
$\mid \Gamma_0(N)/\Gamma(N) \mid = [\Gamma_0(N) : \Gamma(N)] = N\phi(N)$. □

Satz 41.

$$[\Gamma : \Gamma_0(N)] = N\Pi_{p|N}(1+\frac{1}{p})$$

Beweis.

$$\begin{array}{rcl} [\Gamma : \Gamma_0(N)] & = & \frac{[\Gamma:\Gamma(N)]}{[\Gamma_0(N):\Gamma(N)]} \\ & = & \frac{N^3\Pi_{p|N}(1-\frac{1}{p^2})}{N\phi(N)} \\ & = & \frac{N^3\Pi_{p|N}(1-\frac{1}{p^2})}{N^2\Pi_{p|N}(1-\frac{1}{p})} \\ & = & N\Pi_{p|N}(1+\frac{1}{p}) \end{array}$$

□

3.3 Berechnung der Repräsentanten für $\Gamma_0(15)$

Nach Satz 41 existieren 24 Nebenklassen für $\Gamma_0(15)$ in $SL_2(\mathbb{Z})$. In diesem Teil des Kapitels sollen jetzt Vertreter für die Nebenklassen berechnet werden. Mit Hilfe des Isomorphismus ψ aus dem Beweis zu Lemma 36 können die Vertreter für $\Gamma_0(N)$ in $SL_2(\mathbb{Z})$ aus denen für $\Gamma_0(p)$ und $\Gamma_0(q)$, mit $N = pq$ und $ggT(p, q) = 1$, folgendermaßen gewonnen werden:
Es seien α_i die Nebenklassenvertreter für $\Gamma_0(p)$ und β_j die für $\Gamma_0(q)$; modulo N seien die Reduktionen $\widetilde{\alpha_i}, \widetilde{\beta_j}$ und $\widetilde{\Gamma_0(p)}, \widetilde{\Gamma_0(p)}$. Dann gilt: $SL_2(\mathbb{Z}_p) = \bigcup_i \widetilde{\alpha_i}\widetilde{\Gamma_0(p)}$ und $SL_2(\mathbb{Z}_q) = \bigcup_j \widetilde{\beta_j}\widetilde{\Gamma_0(q)}$, betrachte $SL_2(\mathbb{Z}_p) \times SL_2(\mathbb{Z}_q)$. Im Beweis zu Lemma 36 wurde gezeigt, daß die dort definierte Abbildung ψ einen bijektiven Homomorphismus zwischen $SL_2(\mathbb{Z}_N)$ und $SL_2(\mathbb{Z}_p) \times SL_2(\mathbb{Z}_q)$ darstellt. Mit (3) ergibt sich:

$$\begin{aligned} SL_2(\mathbb{Z}_N) &\cong SL_2(\mathbb{Z}_p) \times SL_2(\mathbb{Z}_q) \\ &= \psi(\textstyle\bigcup_i \widetilde{\alpha_i}\widetilde{\Gamma_0(p)}, \bigcup_j \widetilde{\beta_j}\widetilde{\Gamma_0(q)}) \\ &= \textstyle\bigcup_{i,j} \psi(\widetilde{\alpha_i}, \widetilde{\beta_j})\widetilde{\Gamma_0(N)} \end{aligned}$$

Die so gewonnenen Vertreter $\psi(\widetilde{\alpha_i}, \widetilde{\beta_j})$ in $SL_2(\mathbb{Z}_N)$ können zu Matrizen $\Psi(\widetilde{\alpha_i}, \widetilde{\beta_j})$ in $SL_2(\mathbb{Z})$ geliftete werden (siehe Korollar 38). Es gilt dann $\psi(\widetilde{\alpha_i}, \widetilde{\beta_j}) \equiv \Psi(\widetilde{\alpha_i}, \widetilde{\beta_j})$ (N). Mit Lemma 36 folgt:

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \bigcup_{i,j} \Psi(\widetilde{\alpha_i}, \widetilde{\beta_j})\Gamma_0(N)$$

Um die Vertreter von $\Gamma_0(15)$ berechnen zu können, müssen jetzt also nur noch welche für $\Gamma_0(p)$, für $p = 3$ bzw. $p = 5$, gefunden werden. Allgemein gilt für eine Primzahl p:

Lemma 42. *Sei $p \in \mathbb{N}$ prim, dann gilt:*

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \bigcup_j \beta_j \Gamma_0(p)$$

mit $\beta_j = \left(\begin{smallmatrix} j & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ *für* $0 \leq j < p$, $\beta_p = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

Beweis. Da der Index $[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(p)] = p\Pi_{p|p}(1 + \frac{1}{p}) = p + 1$ ist, muß nur noch gezeigt werden, daß die obigen Matrizen verschiedene Nebenklassen vertreten:

$$\begin{array}{rlcll}
1) & {\beta_0}^{-1}\beta_j & = & \beta_j & \notin \Gamma_0(p) \\
2) & {\beta_i}^{-1}\beta_j & = & \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & i \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} j & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) & \\
 & & = & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ j-i & 1 \end{smallmatrix}\right) & \notin \Gamma_0(p) \text{ für } i \neq j
\end{array}$$

$\square$

Zu bestimmen sind jetzt die $\Psi(\alpha_i, \beta_j)$ für

$$\begin{array}{llll}
\alpha_i = \left(\begin{smallmatrix} i & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) & 0 \leq i < 5 & \beta_j = \left(\begin{smallmatrix} j & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) & 0 \leq j < 3 \\
\alpha_5 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) & & \beta_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) &
\end{array}$$

Im Fall $N = 15$ sind a, b aus dem Beweis von Lemma 36 $a = 6,\ b = -5$, diese können aber noch um Vielfache von N abgeändert werden und ich werde hier $a = 6,\ b = 10$ benutzen. Demnach ergeben sich für $\psi(\alpha_i, \beta_j)$:

$$\begin{array}{llcll}
1) & \psi(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)) & \equiv & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) & (15) \\
2) & \psi(\left(\begin{smallmatrix} i & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} j & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)) & \equiv & \left(\begin{smallmatrix} k & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) & (15) \quad \text{für } 0 \leq k < 15 \\
3) & \psi(\left(\begin{smallmatrix} i & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)) & \equiv & \left(\begin{smallmatrix} l & 6 \\ -6 & 10 \end{smallmatrix}\right) & (15) \quad l = 1, 4, 7, 10, 13 \\
4) & \psi(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} j & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)) & \equiv & \left(\begin{smallmatrix} n & 10 \\ -10 & 6 \end{smallmatrix}\right) & (15) \quad n = 1, 6, 11
\end{array}$$

Die Matrizen in 1) und 2) haben schon Determinante 1, Für 3) und 4) müssen noch $\Psi(\alpha_i, \beta_j)$ mit dem Verfahren aus Lemma 35 berechnet werden:

$$\begin{array}{rcccl}
3): & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 6 \\ -6 & 10 \end{smallmatrix}\right) & \equiv & \left(\begin{smallmatrix} -59 & 246 \\ -6 & 25 \end{smallmatrix}\right) & (15) \\
 & \left(\begin{smallmatrix} 4 & 6 \\ -6 & 10 \end{smallmatrix}\right) & \equiv & \left(\begin{smallmatrix} -41 & 171 \\ -6 & 25 \end{smallmatrix}\right) & (15) \\
 & \left(\begin{smallmatrix} 7 & 6 \\ -6 & 10 \end{smallmatrix}\right) & \equiv & \left(\begin{smallmatrix} -23 & 96 \\ -6 & 25 \end{smallmatrix}\right) & (15) \\
 & \left(\begin{smallmatrix} 10 & 6 \\ -6 & 10 \end{smallmatrix}\right) & \equiv & \left(\begin{smallmatrix} -5 & 21 \\ -6 & 25 \end{smallmatrix}\right) & (15) \\
 & \left(\begin{smallmatrix} 13 & 6 \\ -6 & 10 \end{smallmatrix}\right) & \equiv & \left(\begin{smallmatrix} -77 & 321 \\ -6 & 25 \end{smallmatrix}\right) & (15)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl}
4): & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 10 \\ -10 & 6 \end{smallmatrix}\right) & \equiv & \left(\begin{smallmatrix} -119 & 250 \\ -10 & 21 \end{smallmatrix}\right) & (15) \\
 & \left(\begin{smallmatrix} 6 & 10 \\ -10 & 6 \end{smallmatrix}\right) & \equiv & \left(\begin{smallmatrix} 81 & -170 \\ -10 & 21 \end{smallmatrix}\right) & (15) \\
 & \left(\begin{smallmatrix} 11 & 10 \\ -10 & 6 \end{smallmatrix}\right) & \equiv & \left(\begin{smallmatrix} -19 & 40 \\ -10 & 21 \end{smallmatrix}\right) & (15)
\end{array}$$

Die Spitzenklassen $\bar{\mathbb{Q}}/\Gamma_0(15)$ können also vertreten werden durch:
Im Fall 1):

$$\beta_j^{-1}(\infty) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}(\infty) = \infty \quad \text{für } \beta_j = I$$

Im Fall 2):

$$\beta_j^{-1}(\infty) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}(\infty) = 0 \quad \text{für } 0 \leq k < 15$$

Im Fall 3):

$$\beta_j^{-1}(\infty) = \begin{pmatrix} 25 & * \\ 6 & * \end{pmatrix}(\infty) = \frac{25}{6} \quad \text{für die 5 Matrizen aus 3)}$$

Im Fall 4):

$$\beta_j^{-1}(\infty) = \begin{pmatrix} 21 & * \\ 10 & * \end{pmatrix}(\infty) = \frac{21}{10} \quad \text{für die 3 Matrizen aus 4)}$$

Also als Spitzenklassenvertreter:

$$[0],\ [\infty],\ \left[\frac{25}{6}\right],\ \left[\frac{21}{10}\right],$$

daß diese paarweise nicht $\Gamma_0(15)$-äquivalent sind, wird aus dem nächsten Abschnitt zur Berechnung des Geschlechts hervorgehen.

3.4 Das Geschlecht von $\mathbb{H}^*/\Gamma_0(15)$

Mit Hilfe dieser Spitzenklassenvertreter soll nun, wie schon in Kapitel 2 angekündigt, das Geschlecht g von $X_0(15)$ berechnet werden. In Kapitel 2 wurde folgende Formel zur Bestimmung von g hergeleitet:

$$g = 1 + \frac{\mu}{12} - \frac{\nu_3}{3} - \frac{\nu_2}{4} - \frac{\nu_\infty}{2}$$

Wobei μ der Grad der Überlagengsabbildung $f:\ \mathbb{H}^*/\Gamma_0(N) \to \mathbb{H}^*/SL_2(\mathbb{Z})$ ist, also $\mu = [SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(15)] = 24$. ν_3 bzw. ν_2 bezeichnet die Anzahl der $\Gamma_0(N)$-inäquivalenten elliptischen Punkte der Ordnung 3 bzw. 2, und ν_∞ ist die Anzahl der $\Gamma_0(N)$-inäquivalenten Spitzen.

Die Anzahl der $\Gamma_0(N)$-inäquivalenten Spitzen (ν_∞):

Der Stabilisator von $s \in \mathbb{Q}$ in einer Untergruppe $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$ von endlichem Index ist:

$$\Gamma_s = \Gamma \cap SL_2(\mathbb{Z})_s$$

wobei $SL_2(\mathbb{Z})_s$ der Stabilisator von s in $SL_2(\mathbb{Z})$ ist, dieser kann aus $SL_2(\mathbb{Z})_\infty$ gewonnen werden:

$$\Gamma_s = \Gamma \cap \sigma SL_2(\mathbb{Z})_\infty \sigma^{-1}$$

mit einem $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$ für das gilt: $\sigma(\infty) = s$. Für $\Gamma_0(15) \subset SL_2(\mathbb{Z})$ und die Spitzen $\infty, 0, \frac{25}{6}, \frac{21}{10}$ ergibt sich:

1) Sei $s = \infty$:

$$\begin{aligned} SL_2(\mathbb{Z})_\infty &= \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \\ \Gamma_0(15)_\infty &= \Gamma_0(15) \cap SL_2(\mathbb{Z})_\infty = SL_2(\mathbb{Z})_\infty \\ \Rightarrow \quad & [SL_2(\mathbb{Z})_\infty : \Gamma_0(15)_\infty] = 1 \end{aligned}$$

2) Sei $s = 0$, dann ist $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und es gilt:

$$\begin{aligned} SL_2(\mathbb{Z})_0 &= \left\{ \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \\ \Gamma_0(15)_0 &= \Gamma_0(15) \cap SL_2(\mathbb{Z})_0 \\ &= \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{pmatrix} \mid n \equiv 0 \ (15) \right\} \\ \Rightarrow \quad & [SL_2(\mathbb{Z})_0 : \Gamma_0(15)_0] = 15 \end{aligned}$$

3) Sei $s = \frac{25}{6}$, dann ist $\sigma = \begin{pmatrix} 25 & -21 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ und es gilt:

$$\begin{aligned} SL_2(\mathbb{Z})_{\frac{25}{6}} &= \left\{ \pm \begin{pmatrix} 25 & -21 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 21 \\ -6 & 25 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 1-150n & 625n \\ -36n & 1+150n \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \\ \Gamma_0(15)_{\frac{25}{6}} &= \Gamma_0(15) \cap SL_2(\mathbb{Z})_{\frac{25}{6}} \\ &= \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1-150n & 625n \\ -36n & 1+150n \end{pmatrix} \mid -36n \equiv 0 \ (15) \right\} \\ \Rightarrow \quad & [SL_2(\mathbb{Z})_{\frac{25}{6}} : \Gamma_0(15)_{\frac{25}{6}}] = 5 \end{aligned}$$

4) Sei $s = \frac{21}{10}$, dann ist $\sigma = \begin{pmatrix} 21 & -40 \\ 10 & -19 \end{pmatrix}$ und es gilt:

$$\begin{aligned} SL_2(\mathbb{Z})_{\frac{21}{10}} &= \left\{ \pm \begin{pmatrix} 21 & -40 \\ 10 & -19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 81 & -170 \\ -10 & 21 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 1-210n & 441 \\ -100n & 1-210n \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \\ \Gamma_0(15)_{\frac{21}{10}} &= \Gamma_0(15) \cap SL_2(\mathbb{Z})_{\frac{21}{10}} \\ &= \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1-210n & 441 \\ -100n & 1-210n \end{pmatrix} \mid -100n \equiv 0 \ (15) \right\} \\ \Rightarrow \quad & [SL_2(\mathbb{Z})_{\frac{21}{10}} : \Gamma_0(15)_{\frac{21}{10}}] = 3 \end{aligned}$$

Da der Index der Stabilisatoren unterschiedlich ist, können keine zwei der Spitzen äquivalent sein.

Interessanterweise stimmen die Anzahl der Nebenklassenvertreter, die ∞ auf die Spitzen $s = \infty, 0, \frac{25}{6}, \frac{21}{10}$ abbilden mit dem Index der Stabilisatoren $[SL_2(\mathbb{Z})_s : \Gamma_0(15)_s]$ überein. Das hängt mit folgender Tatsache zusammen:
Eine Spitze $\frac{a}{c} = \gamma(\infty)$ mit $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ hat als Stabilisator $\overline{SL_2(\mathbb{Z})_s} = \left\{\gamma\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^n \gamma^{-1} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$. Sei $k \in \mathbb{N}$ die kleinste positive Zahl, so daß $\gamma\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^k \gamma^{-1}$ ein Element von $\Gamma_0(15)$ ist, dann sind die Matrizen $\gamma\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^l \gamma^{-1}$ für $0 \leq l < k$ $\Gamma_0(15)$-inäquivalente Matrizen aus $SL_2(\mathbb{Z})$. Die Bilder $\gamma\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^l(\mathcal{F})$ des Fundamentalbereichs von $\mathbb{H}^*/SL_2(\mathbb{Z})$ für $0 \leq l < k$ formen nun einen Fächer der $\Gamma_0(15)$-inäquivalenten Bilder von $\mathcal{F}$ an $\frac{a}{c}$. k wird auch die Weite des Fächers genannt. Gleichzeitig ist k der Index des Stabilisators $\Gamma_0(15)_{\frac{a}{c}}$ in $SL_2(\mathbb{Z})_{\frac{a}{c}}$. Diese Übereinstimmung findet sich in obiger Rechnung wieder: Es gibt einen Nebenklassenvertreter β_j mit $\beta_j(\infty) = \infty$, also ist die Fächerweite bei ∞ größer gleich 1, Ebenso ist die Fächerweite bei 0 größer gleich 15, bei $\frac{25}{6}$ größer gleich 5 und bei $\frac{21}{10}$ größer gleich 3.
Es kann gezeigt werden, daß es 4 inäqivalente Spitzen bzgl. $\Gamma_0(15)$ gibt (siehe [15] S. 25 ff.). Damit ist klar, daß die Fächerweite wirklich gleich der Anzahl der Nebenklassenvertreter ist. Daß sich dieser Zusammenhang hier so deutlich abzeichnet, liegt vor allem an der glücklichen Wahl der Nebenklassenvertreter; sie hätten nicht unbedingt gleich die entsprechenden Fächer bilden müssen, es hätte auch erst eine Abänderung durch Matrizen aus $\Gamma_0(15)$ nötig sein können.

Die Anzahl der $\Gamma_0(15)$-inäquivalenten elliptischen Punkte der Ordnung $2, 3$ (ν_2, ν_3):

Zunächst werde ich zeigen, daß es keine elliptischen Punkte der Ordnung 3 gibt, also gilt: $\nu_3 = 0$. Im Fall ν_2 kann dann analog geschlossen werden.
Zwei Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ sind modulo $\Gamma_0(15)$ äquivalent, wenn $A{A_1}^{-1}$ ein Element von $\Gamma_0(15)$ ist. Das heißt, wenn gilt:

$$cd' - c'd \equiv 0 \ (15) \tag{4}$$

Andersherum können je zwei Zahlenpaare $(c, d), (c'd')$ mit $ggT(c, d, 15) = ggT(c', d', 15) = 1$, die (4) erfüllen, nach evtl. Abänderung mod 15, zu $\Gamma_0(15)$-äquivalenten Matrizen aus $SL_2(\mathbb{Z})$ ergänzt werden können. Denn für ein Zahlenpaar (c, d) mit $ggT(c, d, 15) = 1$ kann wie im Beweis zu Lemma 35, nach Änderung mod 15, angenommen werden, daß gilt: $(c, d) = 1$.

Bemerkung 43. *Die Bedingung (4) kann folgendermaßen formuliert werden:*

Es existiert ein $\delta \in \mathbb{Z}$, so daß gilt:

$$c \equiv \delta c' \ (15) \ \textit{und} \ d \equiv \delta d' \ (15) \tag{5}$$

Beweis. (5) $\Rightarrow$ (4) ist offensichtlich.
(4) $\Rightarrow$ (5):
Für zwei Zahlenpaare $(c,d),(c',d')$ mit $ggT(c,d,15) = ggT(c',d',15) = 1$ seien $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c'_1 & d'_1 \end{pmatrix}$ zugehörige Matrizen aus $SL_2(\mathbb{Z})$. Wenn (4) gilt, so folgt:

$$\begin{array}{rcll} A \cdot {A_1}^{-1} & \equiv & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} & (15) \\ \Leftrightarrow \ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \equiv & \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} & (15) \end{array}$$

also $c \equiv \delta c'$ (15) und $d \equiv \delta d'$ (15). □

Zwei Zahlenpaare, für die (5) gilt, sollen *paarweise proportional* genannt werden.

Hiermit ist gezeigt, daß ein Vertreter jeder Äquivalenzklasse von $SL_2(\mathbb{Z})$ modulo $\Gamma_0(15)$ gefunden werden kann, indem die Paare $(c,d) \in \mathbb{Z}^2$ mit

1) $(c,d,15) = 1$
2) (c,d) paarweise nicht proportional modulo 15

zu Matrizen von $SL_2(\mathbb{Z})$ ergänzt werden.

Sei $\rho := e^{\frac{2\pi i}{3}}$, ein $z \in \mathbb{H}^*$ mit $\gamma(\rho) = z$ für ein $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$ ist Fixpunkt von $\gamma_0 \in \Gamma_0(15)$ genau dann, wenn gilt:

$$\begin{aligned} \gamma_0(\gamma(\rho)) &= \gamma(\rho) \\ \gamma^{-1}\gamma_0\gamma(\rho) &= \rho \end{aligned} \tag{6}$$

Der Stabilisator von ρ in $SL_2(\mathbb{Z})$ ist nach Korrolar 25

$$\overline{\Gamma_\rho} = \left\{ \pm I, \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

also ist (6) gleichbedeutend mit

$$\gamma^{-1}\gamma_0\gamma = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\alpha} \text{ für } \alpha = 1, 2$$

oder:

$$\gamma \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\alpha} \gamma^{-1} \in \Gamma_0(15),$$

da $-I \in \Gamma_0(N)$. Sowohl $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ wie auch $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ führen auf die Bedingung $c^2 - cd + d^2 \equiv 0$ (15) für γ.
Zur Bestimmung von ν_3 muß jetzt die Anzahl der Paare $(c, d) \in \mathbb{Z}$ gezählt werden, für die gilt:

1) $(c, d, 15) = 1$
2) (c, d) paarweise nicht proportional modulo 15
3) $c^2 - cd + d^2 \equiv 0$ (15)

Das Paar (c, d) soll nun identifiziert werden mit der ganzen Zahl $\omega = c + d \cdot \rho$ im quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}(\rho)$. Die obigen Bedingungen können dann auch so geschrieben werden:
Es werden alle Elemente aus $\mathbb{Q}(\rho)$ zugelassen für die gilt:

1′) $ggT(\omega, 15)$ hat keinen Teiler in $\mathbb{Z}\backslash\{\pm 1\}$
3′) $\mathcal{N}(\omega) \equiv 0$ (15)

Wobei $\mathcal{N}(\omega)$ die Norm von ω im Zahlkörper $\mathbb{Q}(\rho)$ bezeichnet.
Diese Teilmenge von $A \subset \mathbb{Q}(\rho)$ wird nun durch folgende Bedingung in Äquivalenzklassen eingeteilt:

$$w_1 \sim w_2 \;\Leftrightarrow\; \text{es existiert ein } g \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \text{ mit } w_1 \equiv g w_1 \ (15)$$

(Das entspricht der paarweisen Proportionalität von w_1 und w_2, also der Bedingung 2)). Die Anzahl der Äquivalenzklassen $A/\sim$ ist das gesuchte ν_3.

Die Körperdiskriminante im hier betrachteten Zahlkörper ist $d = -3$, für einen Primteiler p von 15, für den das Legendresymbol $\left(\frac{-3}{p}\right) = -1$ ist, gilt:

$$\mathcal{N}(\omega) = \omega\overline{\omega} \equiv 0 \ (p) \;\Rightarrow\; p|(\omega, 15)$$

da in diesem Fall p in $\mathbb{Q}(\rho)$ träge ist. Das tritt bei $p = 5$ ein, dies bildet aber einen Widerspruch zu 1′), es gilt also $\nu_3 = 0$. Für ν_2 können analoge Überlegungen in $\mathbb{Q}(i)$ durchgeführt werden, und $\left(\frac{-1}{3}\right) = -1$ ergibt den gleichen Widerspruch, d.h. $\nu_2 = 0$.

Für das Geschlecht von $X_0(15) = \mathbb{H}^*/\Gamma_0(15)$ gilt also:

$$g = 1 + \frac{24}{12} - \frac{0}{3} - \frac{0}{2} - \frac{4}{2} = 1$$

4 Die Konstruktion von Fricke

In diesem Teil der Arbeit soll die Beziehung zwischen der Riemannschen Fläche $X_0(15)$ und der elliptischen Kurve $y^2 = x(x+9)(x-16)$ hergestellt werden. Die hier vorgestellte Methode geht auf F. Klein und R. Fricke zurück, die sich aus einer etwas anderen Motivation heraus mit Funktionen beschäftigt haben, die unter $\Gamma_0(15)$ invariant sind. Ihre Fragestellung bezog sich auf das Transformationsverhalten gewisser Modulformen, z.B. der Invarianten j, bei Streckung oder Stauchung des zugrundeliegenden Periodengitters. Läßt sich die Funktion des transformierten Gitters j' in eine algebraische Relation mit der Funktion des Ursprungsgitters j setzen? Ist dies der Fall, liegt eine sogenannte Transformationsgleichung vor. Auf der Suche nach diesen Transformationsgleichungen benutzt R. Fricke in [7] Hilfsmittel der Theorie kompakter Riemannscher Flächen, um möglichst einfache Funktionen σ, τ zu konstruieren, die zur Erzeugung aller auf $X_0(15)$ lebenden Funktionen ausreichen. Diese sind selbst durch eine algebraische Relation miteinander verbunden, siehe Abschnitt 2.3, im Fall $X_0(15)$ ist es $\sigma^2 = \tau^4 - 10\tau^3 - 13\tau^2 + 10\tau + 1$. Für die Berechnung der algebraischen Kurve, die durch $X_0(15)$ gegeben ist, ist der Weg hier zu Ende. Ihre Gleichung ist die oben genannte Relation, die sich durch Koordinatentransformation in die in der Einleitung angesprochene Form bringen läßt. R. Fricke muß allerding noch weiterrechnen. Erst müssen die Funktion j und ihr transformiertes Pendant j' in den gefundenen σ und τ dargestellt werden, um dann selbige wieder aus den Gleichungen eliminieren zu können und eine Relation zwischen j und j' zu erhalten.
Zunächst geht es also darum, möglichst "einfache" Funktionen der Fläche $\mathbb{H}^*/\Gamma_0(15)$ zu finden. Mit einfach ist in diesem Fall eine eine meromorphe Funktion der Fläche von niedriegem Grad gemeint, also eine Überlagerung der Zahlenkugel mit möglichst kleiner Blätterzahl. Das Korollar 14 zum Satz von Riemann-Roch garantiert die Existenz einer Abbildungen mit $g+1$ Blättern, wobei g das Geschlecht von $\mathbb{H}^*/\Gamma_0(15)$ bezeichnet. In Kapitel 3 wurde gezeigt, daß das Geschlecht von $\mathbb{H}^*/\Gamma_0(15)$ gleich 1 ist. Es kann also eine zweiblättrige Überlagerung der Zahlenkugel gefunden werden. Um die zur Konstruktion dieser Abbildung nötigen Informationen zu sammeln, erweitert R.Fricke die Gruppe $\Gamma_0(15)$ derart, daß $\mathbb{H}^*/\widehat{\Gamma_0(15)}$ eine Fläche des Geschlechts 0 darstellt, und die auf $\mathbb{H}^*/\widehat{\Gamma_0(15)}$ konstruierte meromorphe Funktion von Grad 1 ein leicht verständliches Verhalten unter der Erweiterung W zeigt. Mit Hilfe von Modulformen gleichen Gewichts wird eine auf $\mathbb{H}^*/\widehat{\Gamma_0(15)}$ lebende meromorphe Funktion τ von Grad 1 definiert, die dann eine zweiblättrige Überlagerung der Zahlenkugel durch $\Gamma_0(15)\backslash\mathbb{H}^*$ dar-

stellt. Aus der Riemann-Hurwitzschen Formel folgt, daß τ, als meromorphe Funktion von Grad 2 auf $\mathbb{H}^*/\Gamma_0(15)$, genau vier getrennt liegende Verzweigungspunkte hat. Dies sind die Fixpunkte von $\Gamma_0(15)\cdot W$ in $\mathbb{H}$. Die Funktion $\sigma = \sqrt{(\tau-\tau_1)(\tau-\tau_2)(\tau-\tau_3)(\tau-\tau_4)}$ ist dann eine weitere Funktion auf $\mathbb{H}^*/\Gamma_0(15)$, und $\sigma^2 = (\tau-\tau_1)(\tau-\tau_2)(\tau-\tau_3)(\tau-\tau_4)$ ist die gewünschte algebraische Gleichung. Da allerdings die Verzweigungswerte $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$, nicht vorliegen und nur schwer direkt zu bestimmen sind, wird σ aus τ konstruiert. Diese Konstruktion beruht darauf, daß durch Ableiten aus τ eine Modulform v des Gewichts -2 gewonnen wird, die garantiert Nullstellen in den Verzweigungspunkten von τ. Nun muß nur noch eine weitere Modulform ${z_1}^2$ gefunden werden, die das gleiche Gewicht hat. Der Quotient $\frac{v}{{z_1}^2}$ liefert die gewünschte Funktion σ.

4.1 Die Gruppe $\widehat{\Gamma_0(15)}$

Die angekündigte Erweiterung der Gruppe $\Gamma_0(15)$ ist durch $W = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 15 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ gegeben, W operiert auf $\mathbb{H}^*$ durch $W(z) = -\frac{1}{15z}$. Da W kein Element von $SL_2(\mathbb{Z})$ ist, werden im folgenden nicht mehr die Matrizengruppen $SL_2(\mathbb{Z})$ bzw. $\Gamma_0(15)$ betrachtet, sondern die Automorphismengruppen die sie darstellen. In diesem Sinne ist die Erweiterung von $\widehat{\Gamma_0(15)}$, die kleinste Gruppe konformer Automorphismen von $\mathbb{H}^*$, die von W und $\Gamma_0(15)$ erzeugt wird. Als Abbildung auf $\mathbb{H}^*$ aufgefaßt hat W die Ordnung zwei, da $W^2(w) = \left(\begin{smallmatrix} -15 & 0 \\ 0 & -15 \end{smallmatrix}\right)(w) = \frac{-15w}{-15w} = w$, obwohl W als Matrix natürlich nicht Ordnung zwei hat, da $W^2 = -15 \cdot I$. Im folgenden wird trotzdem oft mit $\widehat{\Gamma_0(15)}$ als Untergruppe von $GL_2(\mathbb{R})$ gerechnet werden, die Ergebnisse müssen dann modulo Vielfache der Einheitsmatrix gelesen werden. Einige der Sätze im folgenden Abschnitt werde ich für allgemeines N formulieren, da das nicht mehr Aufwand bei der Beweisführung macht und dem Wunsch nach größtmöglicher Allgemeinheit etwas besser entgegenkommt. In diesen Fällen ist mit W natürlich die entsprechende Matrix $W = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{smallmatrix}\right)$, bzw. die durch sie induzierte Abbildung, gemeint.
Um nicht im weiteren Verlauf ständig Bemerkungen zur Determinantenbedingung machen zu müssen, insbesondere bei Untersuchungen zu elliptischen und parabolischen Elementen von $\Gamma_0(15)\cdot W$, werde ich $\Gamma_0(15)\cdot W$ hier etwas ausführlicher vorstellen.

1) Elemente aus $\Gamma_0(15)\cdot W$ haben die Form:

$$\Gamma_0(N)\cdot W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) |\; ad - bc = N \;\; a \equiv c \equiv d \equiv 0 \;(N) \right\}$$

denn, sei $\gamma_0 = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$, dann ist

$$\gamma_0 \cdot W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Nb & -a \\ Nd & -c \end{pmatrix}$$

2)

$$(\gamma_0 \cdot W)^2 = \begin{pmatrix} N(Nb^2 - ad) & N(a\frac{c}{N} - ab) \\ N(Nbd - dc) & N(\frac{c^2}{N} - ad) \end{pmatrix}$$

Als Abbildung auf $\mathbb{H}^*$ aufgefaßt, entspricht das

$$\frac{1}{N}(\gamma_0 \cdot W)^2 = \begin{pmatrix} Nb^2 - ad & a\frac{c}{N} - ab \\ Nbd - dc & \frac{c^2}{N} - ad \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$$

Die Definition elliptischer und parabolischer Elemente bezieht sich auf $SL_2(\mathbb{R})$. Da $\frac{1}{N}(\gamma_0 \cdot W)^2$ sogar Element von $SL_2(\mathbb{Z})$ ist, bleibt nur noch die Beziehung zwischen $\frac{1}{N}(\gamma_0 \cdot W)^2$ und $\frac{1}{\sqrt{N}}(\gamma_0 \cdot W)$ zu klären.

3) Zu den parabolischen Elementen:

Bemerkung 44. *Für $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{R})$ gilt:*
i) Wenn γ parabolisch ist, ist γ^2 parabolisch.
ii) Wenn γ^2 parabolisch ist, ist γ elliptisch oder parabolisch.

Beweis. Zu i) Die Definition aus Kapitel 3 besagt, daß γ genau dann parabolisch ist, wenn γ die Spur ± 2 hat. Für die Spur von γ^2 gilt: $Sp(\gamma^2) = a^2 + bc + d^2 + bc = (a+d)^2 - 2(ad - bc) = 2$.
Zu ii) γ^2 parabolisch bedeutet $(a+d)^2 - 2(ad - bc) = 2 = \pm 2$. Es folgt: $(a+d)^2 = 4$ oder 0 und also $a + d = \pm 2$ oder 0. Im Fall $a + d = 0$ liegt eine elliptische Substitution vor. □

Analog kann geschlossen werden, daß gilt:
γ elliptisch $\Rightarrow$ γ^2 elliptisch oder parabolisch.

Bei der Untersuchung der parabolischen Elemente von $\Gamma_0(N) \cdot W$ ist es also ausreichend, nach parabolischen Elementen $(\gamma_0 W)^2$ in $\Gamma_0(N)$ zu suchen. $(\gamma_0 W)^2$ entspricht, als Abbildung auf $\mathbb{H}^*$ aufgefaßt, einem Element von $SL_2(\mathbb{Z})$, daher können elliptische Substitutionen in $\Gamma_0(N) \cdot W$ nur die Ordnung 2, 4 oder 6 haben, da die elliptischen Substitutionen aus $SL_2(\mathbb{Z})$ gerade die Ordnung 2 ($\cong \Gamma_i$) oder 3 ($\cong \Gamma_\rho$) haben (siehe Kapitel 3).

4) Der Index von $\Gamma_0(N)$ in $\widehat{\Gamma_0(N)}$:

Bemerkung 45. *Für*

$$\widehat{\Gamma_0(15)} := \Gamma_0(15) + \Gamma_0(15) \cdot W$$

gilt $[\widehat{\Gamma_0(15)} : \Gamma_0(15)] = 2$

Beweis. $W^{-1}\Gamma_0(15)W = \Gamma_0(15)$, denn:
für $\gamma_0 = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(15)$ gilt $W^{-1}\gamma_0 W = \left(\begin{smallmatrix}\delta & -\frac{\gamma}{15} \\ -15\beta & \alpha\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(15)$. Entsprechend können natürlich auch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gewählt werden, um zu erreichen, daß $\left(\begin{smallmatrix}\delta & -\frac{\gamma}{15} \\ -15\beta & \alpha\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ für eine aus $\Gamma_0(15)$ vorgegebene Matrix $\gamma = \left(\begin{smallmatrix}a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)$.
Es folgt $W \cdot \Gamma_0(15) = \Gamma_0(15) \cdot W$
Für zwei Elemente $\gamma_0 W,\ \gamma_1 W$ aus $\Gamma_0(15)W$ gilt: $\gamma_0 W \cdot \gamma_1 W = \gamma_0 \hat{\gamma_1} \cdot W^2$, als Abbildung auf $\mathbb{H}^*$ entspricht das $\gamma_0\hat{\gamma_1} \in \Gamma_0(15)$. □

Als nächstes soll die Nebengruppe $\Gamma_0(15) \cdot W$ auf parabolische und elliptische Elemente hin untersucht werden, um Aufschluß über mögliche Fixpunkte zu erhalten. Für ein beliebiges N gilt folgende Aussage:

Bemerkung 46. *Für $N \neq 2, 3, 4$ gibt es in der Nebengruppe $\Gamma_0(N) \cdot W$ keine parabolischen Elemente und höchstens elliptische Elemente der Ordnung 2.*

Beweis. i) Zu zeigen: für $N \neq 4$ enthält $\Gamma_0(N)W$ keine parabolischen Elemente.
Nach 3) reicht es zu zeigen, daß $\frac{1}{N}(\gamma_0 W)^2$ nicht parabolisch sein kann.

$$Sp(\frac{1}{N}(\gamma_0 W)^2) = \frac{\alpha^2 + \delta^2 + 2\beta\gamma}{N} = \frac{(\alpha+\delta)^2 - 2 \cdot N}{N} = \pm 2$$

$$\Leftrightarrow \qquad (\alpha+\delta)^2 = \begin{cases} 4 \cdot N \\ 0 \end{cases}$$

Da $(\alpha + \delta)$ ein Vielfaches von N ist (siehe1)), hat $(\alpha+\delta)^2 = 4 \cdot N$ nur für $N = 4$ eine ganzzahlige Lösung und $(\alpha+\delta)^2 = 0$ führt zu elliptischen Substitutionen der Ordnung 2 (siehe Kapitel 3).
ii) Für elliptische Elemente der Ordnung 4 oder 6 bleiben jetzt noch die Fälle $Sp(\frac{1}{N}(\gamma_0 W)^2) = \pm 1,\ 0$ zu betrachten. Diese drei Fälle führen auf:

$$(\alpha+\delta)^2 = N,\ 2 \cdot N,\ \text{und } 3 \cdot N$$

Da $\alpha + \delta$ ein Vielfaches von N ist (siehe 1)), scheidet $(\alpha+\delta)^2 = N$ aus. Die beiden anderen Fälle können nur für $N = 2$ bzw. $N = 3$ mit ganzzahligen α und δ gelöst werden. □

Als Elemente endlicher Ordnung in $\Gamma_0(15) \cdot W$ bleiben nur noch die elliptischen Transformationen der Ordnung zwei zu betrachten. Diese sind besonders interessant, da sie als Spiegelungen aufgefaßt werden können, und so eine relativ leichte Beschreibung des Fundamentalbereichs von $\mathbb{H}^*/\widehat{\Gamma_0(15)}$, mit Hilfe der Spiegelungskreise und des Fundamentalbereichs von $\Gamma_0(15)$ in $\mathbb{H}^*$, möglich machen. Der Fundamentalbereich von $\mathbb{H}^*/\widehat{\Gamma_0(15)}$ wird von R. Fricke auch Klassenpolygon, oder kurz K_{15}, genannt. Auf diese Konstruktion werde ich später etwas näher eingehen, da sie zur Konstruktion der auf $\mathbb{H}^*/\widehat{\Gamma_0(15)}$ lebenden Funktion insofern wichtig ist, als sie möglich macht, die Anzahl der Spitzen von $\widehat{\Gamma_0(15)}$ zu bestimmen. Eine für die spätere Konstruktion wichtige Information ist die Anzahl der im Fundamentalbereich von $\Gamma_0(15)$ gelegenen Fixpunkte von $\Gamma_0(15) \cdot W$. Diese Zahl läßt sich z.B. bestimmen, indem eine Verbindung zwischen quadratischen Formen und elliptischen Substitutionen der Ordnung zwei aus $\Gamma_0(15) \cdot W$ hergestellt wird.

4.2 Elliptische Transformationen der Ordnung zwei und quadratische Formen

Die quadratischen Formen zu einer gegebenen negativen, quadratfreien Diskriminante D stellen ein wichtiges Hilfsmittel dar, da sich die Formklassen bijektiv auf die Idealklassen des imaginär quadratischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ abbilden lassen. Durch Aussagen über die Formklassen ist es möglich, Aussagen z.B. über die Klassenzahl eines Körpers zu machen, oder umgekehrt, falls die Klassenzahl bekannt ist, auf die Anzahl der Formklassen zurückzuschließen. Diesen Weg möchte ich hier gehen. R. Fricke zeigt in [7], daß die Anzahl der elliptischen Substitutionen der Ordnung zwei in $\Gamma_0(N) \cdot W$ gleich der Anzahl der Formklassen quadratischer Formen der Diskriminante $-N$ und evtl. $-4N$ ist. Da aber für den Fall eines quadratfreien N die gleich der Klassenzahl $h(N)$ ist, kann die Anzahl der elliptischen Fixpunkte von $\Gamma_0(N) \cdot W$ im Fundamentalbereich von $\mathbb{H}^*/\Gamma_0(N)$ direkt aus Tabellen zu Klassenzahlen imaginär quadratischer Zahlkörper abgelesen werden.

Obwohl ich nur den Fall $N = 15$ benötige werde ich die folgenden Zusammenhänge für ein allgemeines N formulieren, da dies hier nicht viel mehr Mühe macht. Im ersten Teil dieses Abschnitts werde ich die binär quadratischen Formen einführen, dann folgt ein Teil, der die Verknüpfung zwischen quadratischen Formen und den Fixpunkten elliptischer Substitutionen aus $\Gamma_0(15) \cdot W$ herstellt, und am Schluß werde ich kurz auf den Zusammenhang zwischen Formklassen und Idealklassen eingehen.

a) **Quadratische Formen**

Definition 47. *Ein Ausdruck der Form*

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{Z}$$

wird binäre quadratische Form *genannt, kurz geschrieben als (a,b,c).*

Im folgenden geht es vor allem um die Nullstellen solcher Formen, es kann also auch die inhomogene Schreibweise $az^2 + bz + c = 0$ mit $z := \frac{x}{y}$ gewählt werden. Eine Form heißt urspünglich, falls $ggT(a, b, c) = 1$ gilt.
Die Diskriminante einer Form ist definiert als $D = b^2 - 4ac$. Hier wird es nur um Formen mit negativer Diskriminante gehen und solche heißen positiv definit, oder einfach nur positiv, wenn $a > 0$ gilt. Um die Menge der ursprünglichen, positiv definiten Formen der Diskriminante k kurz ansprechen zu können, werde ich abkürzend für sie schreiben:

$$\mathbf{F}_k := \{\text{ursprünglich positive quadratische Formen der Diskriminante k}\}$$

Auf der Menge der Formen ist folgendermaßen eine Äquivalenzrelation definiert:

Definition 48. *Zwei Formen (a, b, c) und (a', b', c') heißen* äquivalent*, falls sie durch eine Transformation der Variablen*

$$x' = \alpha x + \beta y \quad y' = \gamma x + \delta y$$

mit $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$ auseinander hervorgehen.

Die Koeffizienten der transformierten Form berechnen sich aus den alten wie folgt:

$$\begin{aligned} a' &= \alpha^2 a + \gamma\alpha b + \gamma^2 c \\ b' &= 2\beta\alpha a + (\alpha\delta + \beta\gamma)b + 2\delta\gamma c \\ c' &= \beta^2 a + \delta\beta b + \delta^2 c \end{aligned} \tag{7}$$

Unter Benutzung dieser Gleichungen läßt sich ausrechnen, daß die Diskriminante invariant ist gegenüber Transformation der Form durch Elemente aus $SL_2(\mathbb{Z})$. Sie ist also ein Attribut der Äquivalenzklasse von Formen $[(a, b, c)]_{SL_2(\mathbb{Z})}$. Ebenso bleibt bei negativer Diskriminante das Vorzeichen von a unverändert, denn es gilt:

$$aa' = a^2\alpha^2 + ab\alpha\gamma + ac\gamma^2 = (a\alpha + \frac{1}{2}b\gamma)^2 - \frac{1}{4}D\gamma^2 > 0$$

Die negativ definiten Formen entstehen aus den positiven durch Multiplikation mit -1. Im folgenden sollen deshalb nur positive Formen betrachtet werden (diese Vereinfachung ist der negativen Diskriminante zu verdanken).

Der in der oberen Halbebene gelegene Nullpunkt der Form (a, b, c) mit Diskriminante $D < 0$ ist gegeben durch $w = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b+i\sqrt{|D|}}{2a}$. Für äquivalente Formen $(a', b', c') = \gamma((a, b, c))$ mit $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$ gilt $w' = \gamma^{-1}(w) = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha}$, ebenso gilt die Umkehrung: $SL_2(\mathbb{Z})$-äquivalente Punkte aus $\mathbb{H}^*$ sind Nullstellen äquivalenter Formen. Im Fundamentalbereich von $SL_2(\mathbb{Z})$ liegt also von jeder Formklasse genau ein Nullpunkt, die zu diesem Nullpunkt gehörende Form wird reduzierte Form genannt.

b) **Die Verbindung zwischen Nullstellen und Fixpunkten**

Dieser Abschnitt behandelt elliptische Substitutionen der Ordnung zwei in $\Gamma_0(N) \cdot W$, kurz:

$$\Gamma_{N,2} := \{\text{elliptische Substitutionen der Ordnung zwei in } \Gamma_0(N) \cdot W\}$$

Bemerkung 49. *Für* $\gamma_0 = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_{N,2}$ *gilt:* $\alpha + \delta = 0$.

Beweis. Da γ_0 eine elliptische Substitution ist, gilt für die Spur: $|Sp(\gamma_0)| < 2$. Da die Spur ganzzahlig sein muß, ist $Sp(\gamma_0) = \pm 1$ oder 0.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & (\alpha+\delta)\beta \\ (\alpha+\delta)\gamma & \delta^2 + \beta\gamma \end{pmatrix} = \pm I$$

D.h. entweder $\beta = \gamma = 0$ und damit $\gamma_0 = \pm I$ oder $(\alpha + \delta) = 0$. □

Lemma 50. *Sei* $\gamma_0 \in \Gamma_{N,2}$*, dann gilt für den Fixpunkt* $z \in \mathbb{H}$ *von* γ_0*:*
1) $N \equiv 0, 1, 2 \ (4) \Rightarrow$ *z ist Nullstelle einer Form* (a, b, c) *aus* $\mathbf{F}_{-4N}$
2) $N \equiv 3 \ (4) \Rightarrow$ *z ist Nullstelle einer Form* (a, b, c) *aus* $\mathbf{F}_{-4N}$ *oder* $\mathbf{F}_{-N}$

Beweis. Sei $\gamma_0 := \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_{N,2}$. Der Fixpunkt von γ_0 ist gegeben durch

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z - \alpha} = z \ \Leftrightarrow \gamma z^2 - 2\alpha z - \beta = 0$$

Außerdem gilt für $\gamma_0 \in \Gamma_{N,2}$: $det(\gamma_0) = N$ und $\alpha \equiv \gamma \equiv -\alpha \equiv 0 \ (N)$, γ kann also nicht Null sein und es gilt: $ggT(\alpha, \beta) = 1$. Ohne Einschränkung sei $\gamma > 0$, dann ist durch $(\gamma, -2\alpha, -\beta)$ eine positive quadratische Form der Diskriminante $-4N$ gegeben. Mit $ggT(\alpha, \beta) = 1$ folgt $ggT(\gamma, -2\alpha, -\beta) = 1$ oder 2. Im Fall $ggT(\gamma, -2\alpha, -\beta) = 1$ ist in $(\gamma, -2\alpha, -\beta)$ schon eine Form aus $\mathbf{F}_{-4N}$ gefunden. Falls $ggT(\gamma, -2\alpha, -\beta) = 2$ ist, kann $(\frac{\gamma}{2}, -\alpha, -\frac{\beta}{2})$ als Form aus $\mathbf{F}_{-N}$ genommen werden. Da in diesem Fall γ und β gerade sind folgt: $\alpha^2 \equiv 1 \ (4)$ und $\beta\gamma \equiv 0 \ (4)$.

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta\gamma = -N \equiv 1 \ (4)$$

In diesem Fall ist also $N \equiv 3 \ (4)$. □

Lemma 51. *In jeder Äquivalenzklasse* $\mathbf{F}_{-4N}/SL_2(\mathbb{Z})$ *bzw.* $\mathbf{F}_{-N}/SL_2(\mathbb{Z})$ *gibt es eine Form, deren Nullstelle Fixpunkt eines* $\gamma_0 \in \Gamma_{N,2}$ *ist.*

Beweis. Zunächst werde ich zeigen, daß für Formen (a, b, c) der Diskriminante $-4N$ bzw. $-N$, mit der Eigenschaft $N|a$ und $2N|b$ bzw. im Fall $D = -N$, $N|a$ und $N|b$ gilt: die Nullstelle $z \in \mathbb{H}^*$ von

$$az^2 + bz + c = 0$$

ist Fixpunkt einer Substitution $\gamma_0 \in \Gamma_{N,2}$. Im zweiten Teil wird dann gezeigt, daß in jeder Formklasse modulo $SL_2(\mathbb{Z})$ eine solche Form gefunden werden kann.

i_a) Sei $(a, b, c) \in \mathbf{F}_{-4N}$, es gelte $N|a$ und $2N|b$, dann gilt $ggT(N, c) = 1$, und $\gamma_0 := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}b & -c \\ a & \frac{1}{2}b \end{pmatrix}$ ist Element von $\Gamma_{N,2}$, da $det(\gamma_0) = -\frac{1}{4}b^2 + ac = N$ und die Kongruenz $-\frac{1}{2}b \equiv \frac{1}{2}b \equiv a \equiv 0 \ (N)$ erfüllt ist. Außerdem gilt für den Fixpunkt von γ_0:

$$\frac{-\frac{1}{2}bz - c}{az + \frac{1}{2}b} = z \Leftrightarrow az^2 + bz + c = 0$$

i_b) Sei $(a', b', c') \in \mathbf{F}_{-N}$, $N \equiv 3 \ (4)$ und es gelte $N|a$ und $N|b$, dann gilt $ggT(c, N) = 1$ und $\gamma_1 := \begin{pmatrix} -b & -2c \\ 2a & b \end{pmatrix} \in \Gamma_{N,2}$. Für den Fixpunkt gilt:

$$\frac{-bz - 2c}{2az + b} = z \Leftrightarrow 2az^2 + 2bz + 2c = 0 \Leftrightarrow az^2 + bz + c = 0$$

ii) Hier werde ich zunächst zeigen, daß es in jeder Klasse eine Form gibt, für die gilt $ggT(c, N) = 1$:

Bemerkung 52. $(a, b, c) \in \mathbf{F}_{-4N}/SL_2(\mathbb{Z})$ *kann ohne Einschränkung so gewählt werden, daß* $ggT(c, N) = 1$ *gilt.*

Beweis. Bemerkung Seien $p_1, \ldots, p_r$ die Primfaktoren von N, die Form (a, b, c) sei gegeben. Es seien $\delta := \prod_{i=1}^{r} {p_i}^{\lambda_i}$ und $\beta := \prod_{i=1}^{r} {p_i}^{\mu_i}$ folgendermaßen definiert:

$$\left.\begin{array}{llll} \lambda_k = 0 & \mu_k = 1 & \text{für} & a \not\equiv 0 \\ \lambda_k = 1 & \mu_k = 0 & \text{für} & a \equiv 0 \ c \not\equiv 0 \\ \lambda_k = 0 & \mu_k = 0 & \text{für} & a \equiv 0 \ c \equiv 0 \end{array}\right\} (\text{mod } p_k)$$

Mit (7) folgt: $c' = c\delta^2 + b\delta\beta + a\beta^2$, also $ggT(c', N) = 1$. □

Sei nun (a, b, c) eine solche Form . Betrachte die durch $\binom{1\ 0}{\gamma\ 1}$ transformierte Form(a', b', c'):

$$\begin{aligned} a' &= a + \gamma b + \gamma^2 c \\ b' &= b + 2\gamma c \\ c' &= c \end{aligned}$$

Mit $-4N = b^2 - 4ac$ folgt b ist gerade, und damit ist auch b' gerade und $\frac{1}{2}b' = \frac{1}{2}b - \gamma c$ eine ganze Zahl. Da N und c teilerfremd sind, existiert ein γ, so daß $N|\frac{1}{2}b'$. Dann gilt $2N|b$ und wegen $-4N = b'^2 - 4a'c'$ folgt $a' \equiv 0\ (N)$. Das ist gerade die Situation von ia).

Sei $N \equiv 3\ (4)$ und $(a, b, c) \in \mathbf{F}_{-N}$. Ohne Einschränkung kann hier (a, b, c) so gewählt werden, daß $ggT(2c, N) = 1$ gilt. Transformation mit $\binom{1\ 0}{\gamma\ 1}$ führt auf $b' = b - 2\gamma c$, wie oben existiert ein γ, so daß $N|b'$. Mit $-N = b'^2 - 4a'c'$ folgt $a' \equiv 0\ (N)$ dies führt auf ib). ☐

Diejenigen Formen, die den in Teil i_a) und i_b) des Beweises von Lemma 51 beschriebenen Teilbarkeitskriterien genügen, also als Nullstellen einen Fixpunkt einer Substitution $\gamma_0 \in \Gamma_{N,2}$ haben, seien nun zu Teilmengen $M([a, b, c])$ innerhalb ihrer Äquivalenzklasse zusammengefaßt. Es gilt

Lemma 53. *Sei $(a, b, c) \in \mathbf{F}_{-4N}$ bzw. $\mathbf{F}_{-N}$. Ist $(a, b, c) \in M([\alpha, \beta, \gamma])$, so gilt für eine weitere Form $(a', b', c') \in \mathbf{F}_{-4N}$ bzw. $\mathbf{F}_{-N}$:*
(a', b', c') ist genau dann in $M([\alpha, \beta, \gamma])$, wenn die Äquivalenz durch ein $\gamma \in \Gamma_0(N)$ vermittelt wird.

Beweis. $\Rightarrow$) i) Sei $(a, b, c) \in \mathbf{F}_{-4N}$.
Die Äquivalenz zwischen (a, b, c) und (a', b', c') sei durch $\gamma = \binom{\alpha\ \beta}{\gamma\ \delta}$ vermittelt. Dann gilt mit (7):

$$\begin{aligned} a' &= \alpha^2 a + \gamma\alpha b + \gamma^2 c \\ b' &= 2\beta\alpha a + (\alpha\delta + \beta\gamma)b + 2\delta\gamma c \\ c' &= \beta^2 a + \delta\beta b + \delta^2 c \end{aligned}$$

Da (a, b, c) und (a', b', c') aus $M([\alpha, \beta, \gamma])$ sind, gilt: $N|a$, $N|a'$ und $2N|b$, $2N|b'$. Die erste und zweite Gleichung ergeben also:
$\gamma^2 c \equiv 0\ (N)$ und $2\delta\gamma c \equiv 0\ (2N)$. Da δ und γ teilerfremd sind und N c nicht teilt, folgt $\gamma \equiv 0\ (N)$.

ii) Im Fall $(a, b, c) \in \mathbf{F}_{-N}$ ergibt sich
$\gamma^2 c \equiv 0\ (N)$ und $2\delta\gamma c \equiv 0\ (2N)$, also auch $\gamma \equiv 0\ (N)$.

$\Leftarrow$) Sei $(a, b, c) \in M([\alpha, \beta, \gamma])$ und $(a', b', c') = \gamma((a, b, c))$ mit $\gamma = \binom{\alpha\ \beta}{\gamma\ \delta} \in \Gamma_0(N)$. Wegen $\alpha\delta - \gamma\beta = 1$ folgt: N und δ sind teilerfremd, mit der dritten Gleichung von (7) folgt $ggT(c', N) = 1$. Die ersten beiden Gleichungen führen auf $N|a'$ und $N|b'$, bzw. $2N|b'$ im Fall $(a, b, c) \in \mathbf{F}_{-N}$. Dies sind aber gerade die Bedingungen dafür, daß (a', b', c') in $M([\alpha, \beta, \gamma])$ ist. $\square$

Diese Bemerkungen können in folgendem Satz zusammengefaßt werden:

Satz 54. *Die Anzahl der im Fundamentalbereich von $\Gamma_0(N)$ gelegenen Fixpunkte von Substitutionen $\gamma_0 \in \Gamma_{N,2}$ ist:*
1) Für $N \equiv 0, 1, 2\ (4)$ gleich der Anzahl der Formklassen zur Diskriminante $-4N$.
2) Für $N \equiv 3\ (4)$ gleich der Summe der Anzahl der Formklassen der Diskriminante $-4N$ und $-N$.

Beweis. Lemma 50 und 51 ergeben zusammengenommen eine Bijektion zwischen den Formklassen $\mathbf{F}_{-4N}/SL_2(\mathbb{Z})$ bzw. $\mathbf{F}_{-N}/SL_2(\mathbb{Z})$ und den Fixpunkten von Substitutionen $\gamma_0 \in \Gamma_{N,2}$, hierbei müssen die Fälle $N \equiv 0, 1, 2\ (4)$ und $N \equiv 3\ (4)$ getrennt betrachtet werden. In Lemma 53 ist gezeigt, daß diejenigen Formen einer Formklasse, die zu einer elliptischen Substitution $\gamma_0 \in \Gamma_{N,2}$ führen, genau die unter $\Gamma_0(N)$ äquivalenten sind. Im Fundamentalbereich von $\Gamma_0(N)$ kann also jeweils nur ein Nullpunkt dieser Formklassen liegen. $\square$

Der schon eingangs erwähnte Zusammenhang zwischen Formklassen und Idealklassen des imaginär quadratischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{-N})$ macht es möglich, die Anzahl der Formklassen anhand der Idealklassenzahl $h(-N)$ zu bestimmen.

Satz 55. *Sei $D < 0$ eine von quadratischen Teilern freie ganze Zahl und $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Dann gibt es eine bijektive Korrespondenz zwischen Äquivalenzklassen von ursprünglichen positiven quadratischen Formen der Diskriminante D und den Äquivalenzklassen im engeren Sinne von Idealen von $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$.*

Mit Äquivalenz im engeren Sinne ist hier gemeint, daß die Ideale sich um ein Hauptideal mit positiver Norm unterscheiden. Im Falle eines imaginär quadratischen Zahlkörpers ist diese Bedingung allerdings für jedes Hauptideal erfüllt, da für $\zeta \in K$ die Konjugierte ζ' der komplex Konjugierten $\overline{\zeta}$ entspricht. Für die Norm gilt dann $N(\zeta) = \zeta\zeta' = \zeta\overline{\zeta} = |\zeta|^2 > 0$, für $\zeta \neq 0$.
Zum Beweis des Satzes siehe zum Beispiel D.B. Zagier in [16] S.87 ff.
Leider werden im Fall $D = -4N$ einige Zusatzüberlegungen nötig, da D nicht mehr quadratfrei ist, es gilt die Umrechnungsformel:

$$h(n^2 D) = h(D) \cdot n \cdot \tau \cdot \Pi(1 - \frac{(D, p)}{p})$$

Wobei hier τ ein Regulierungsfaktor für eventuell auftretende Einheiten ungleich $1, -1$ in dem Zahlkörper ist und das Produkt genommen wird über alle Primfaktoren von n. (D,p) stellt eine Art verallgemeinertes Legendresymbol dar:

$$(D,p) = \begin{cases} 0 & \text{falls } p|D \\ 1 & \text{falls } D \text{ quadratischer Rest mod } 4p \text{ ist} \\ -1 & \text{falls } D \text{ nicht quadratischer Rest mod } 4p \text{ ist} \end{cases}$$

Zum Beweis der Formel siehe z.B. R. Fricke in [7] S.121-S.134. Im Fall $D = -15$ gilt: $h(D) = 2$, für $h(-4 \cdot 15)$ gilt $\tau = 1,\ n = 2$ und $\Pi(1 - \frac{(D,p)}{p}) = \frac{1}{2}$ also folgt $h(-4 \cdot 15) = 2$. Im Fundamentalbereich von $\Gamma_0(15)$ liegen demnach vier Fixpunkte elliptischer Substitutionen der Ordnung 2 aus $\Gamma_0(15) \cdot W$.

Die Konstruktion der gewünschten Funktionen σ und τ, wie R. Fricke sie vorstellt, beruht zum Teil auf der Theorie der Modulformen, insbesondere auf Eigenschaften der speziellen Modulform Δ. Deshalb werde ich an dieser Stelle einen Exkurs zu Modulformen einschieben.

4.3 Modulformen

Definition 56. *Sei $h : S \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, wobei S definiert ist als $S := \{(x,y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid \frac{x}{y} \in \mathbb{H}\}$.*
h wird homogene Modulform von Gewicht *$-k \in \mathbb{Z}$ genannt, wenn gilt:*
1) $h(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-k} h(\omega_1, \omega_2)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.
2) $h(a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2) = h(\omega_1, \omega_2)$ für alle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$.
3) $h(\tau, 1)$ mit $\tau := \frac{\omega_1}{\omega_2}$ ist meromorph auf $\mathbb{H}$.
4) In einer Umgebung $U(i\infty)$ von $i\infty$ erlaubt $h(\tau,1)$ eine Fourierentwicklung:

$$h(\tau, 1) = \sum_{\nu \geq \nu_0} b_\nu (e^{2\pi i \tau})^\nu$$

Definition 57. *Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wird* inhomogene Modulform von Gewicht *$k \in \mathbb{Z}$ genannt, wenn ${\omega_2}^{-k} f(\frac{\omega_1}{\omega_2})$ eine homogene Modulform darstellt.*

Für inhomogene Modulformen folgt aus 1) und 2) von Definition 56

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k f(\tau) \text{ für alle } \begin{pmatrix} a\, b \\ c\, d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

Die Bedingung 4) in Definition 56 stellt eine Art Wachstumsbedingung in der Nähe von $i\infty$ dar. Der Fundamentalbereich von $SL_2(\mathbb{Z})$ in $\mathbb{H}$ ist gegeben durch:

$$\mathcal{F} = \left\{\omega \in \mathbb{H} | -\frac{1}{2} \leq Re(\omega) \leq 0, |\omega| \geq 1\right\} \cup \left\{\omega \in \mathbb{H} |\ 0 < Re(\omega) < \frac{1}{2},\ |\omega| > 1\right\}$$

(siehe Kapitel 2)
Innerhalb von $\mathcal{F}$ kann $\tau = \rho + i\sigma$ also nur gegen ∞ streben, wenn σ nach ∞ strebt, da ρ beschränkt bleibt. Damit strebt $e^{2\pi i\tau}$ dann nach 0. Die Reihe $h(\tau, 1) = \sum_{\nu \geq \nu_0} b_\nu e^{2\pi i\tau\nu}$ kann also als Potenzreihenentwicklung um $i\infty$ angesehen werden. Falls $h(\tau, 1)$ in $i\infty$ beschränkt ist, also in Teil 4) von Definition 56 $\nu_0 \geq 0$ gilt, wird h eine *ganze Modulform* genannt, falls sogar $\nu_0 \geq 1$ gilt, eine *Spitzenform.*

Beispiele für Modulformen

i) Sei $k \in \mathbb{N}$, $(\omega_1, \omega_2) \in S$. Die Eisensteinreihe G_{2k} ist definiert, als

$$G_{2k}(\omega_1, \omega_2) := \sum_{n,m\in\mathbb{Z}}{}' (m\omega_1 + n\omega_2)^{-2k}$$

Der Strich an der Summe bedeutet hier sowie bei den folgenden Summen, daß $(m, n) = (0, 0)$ von der Summation ausgeschlossen sind.

Satz 58. *Für $k > 1$ ist $G_{2k}(\omega_1, \omega_2)$ eine homogene Modulform von Gewicht $-2k$.*

Beweis. Zu 1) Offensichtlich gilt $G_{2k}(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-2k} G_{2k}(\omega_1, \omega_2)$ für $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Zu 2)

$$\begin{aligned} G_{2k}(\gamma(\omega_1, \omega_2)) &= \textstyle\sum'_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m(a\omega_1+b\omega_2)+n(c\omega_1+d\omega_2))^{2k}} \\ &= \textstyle\sum'_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{((ma+nc)\omega_1+(mb+nd)\omega_2)^{2k}} \\ &= \textstyle\sum'_{l,j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(l\omega_1+j\omega_2)^{2k}} \end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen ist dadurch gerechtfertigt, daß $ggT(a, c) = ggT(b, d) = 1$ gilt.

Zu 3) Holomorphie von $G_{2k}(\tau)$

Lemma 59. *Für $s > 2$, $\tau \in K \subset \mathbb{H}$, K kompakt gilt: $\sum'_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(m\tau+n)^s}$ ist absolut und gleichmäßig konvergent.*

Beweis. (*Lemma*)
Sei Π_τ das durch $\tau, 1$ aufgespannte Fundamentalparallelogramm, sei

$$\widetilde{\Pi}_\tau = \Pi_\tau \cup (-\tau + \Pi_\tau) \cup (-1 + \Pi_\tau) \cup (-\tau - 1 + \Pi_\tau)$$

die Vereinigung der vier um den Nullpunkt liegenden Translate von Π_τ. Der Abstand von K zum Nullpunkt sei mit d bezeichnet. Für alle z aus dem Rand von $\widetilde{\Pi}_\tau$ gilt die Abschätzung $|z| \geq d$. Betrachte $\sum'_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|m\tau+n|^s}$:

a) $n = 0 \;\Rightarrow\; \sum'_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|m\tau+n|^s} = \frac{1}{|\tau|^s}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|m|^s} = 2\frac{1}{|\tau|^s}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s} < \infty$

b) $m = 0 \;\Rightarrow\; \sum'_{m,n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{|m\tau+n|^s} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} < \infty$

c) $|m| \geq |n| > 0$: hier gilt: $|m\tau + n| = |m||\tau + \frac{n}{m}| \geq |m|d$ für die Summe folgt:

$$\sum_{|m|\geq|n|>0} \frac{1}{|m\tau+n|^s} \leq \frac{1}{d^s}\sum_{|m|\geq|n|>0}\frac{1}{|m|^s} = \frac{4}{d^s}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{m^s} = \frac{4}{d^s}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s-1}} < \infty$$

d) Für $|n| > |m| > 0$ ergibt sich analog zu c) auch nur ein endlicher Beitrag zur Gesamtsumme. □

Dh. G_{2k} ist holomorph auf $\mathbb{H}$.

Zu 4) Fourierkoeffizienten:

Lemma 60. *Sei $k > 1$, dann gilt:*

$$G_{2k}(\tau) = 2\zeta(2k) + \frac{2(2\pi i)^{2k}}{(k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)q^n$$

mit $q = e^{2\pi i\tau}$, $\zeta(k) = \sum_{m=1}^{\infty}(\frac{1}{m})^k$, $\sigma_l(n) = \sum_{d|n,d>0} d^l$.

Beweis. (*Lemma*)
Für $\tau \in \mathbb{H}$ gilt folgende Gleichung:

$$\pi\cot\pi\tau = \frac{1}{\tau} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\tau+m} + \frac{1}{\tau-m}\right) \tag{8}$$

(siehe hierzu zum Beispiel Busam Freitag in [5] Seite 183ff)
Sei $q = e^{2\pi i\tau}$ für $\tau \in \mathbb{H}$, d.h. $Im(\tau) > 0$ und $|q| < 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \pi cot\pi\tau &= \pi\frac{cos\pi\tau}{sin\pi\tau} = i\pi\frac{q+1}{q-1} = i\pi\left(1 - \frac{2}{1-q}\right) \\ &= i\pi - 2\pi i\sum_{d=0}^{\infty} q^d \end{aligned} \tag{9}$$

Die Gleichungen (8) und (9) ergeben zusammen:

$$\frac{1}{\tau} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\tau+m} + \frac{1}{\tau-m}\right) = i\pi - 2\pi i\sum_{d=0}^{\infty} q^d$$

Beide Seiten der Gleichung konvergieren gleichmäßig auf Kompakta, die Reihen können demnach gliedweise abgeleitet werden. $(2k-1)$-maliges Differenzieren nach τ ergibt:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\tau+m)^{2k}} = \frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{d=1}^{\infty} d^{2k-1}q^d \tag{10}$$

Für G_{2k} ergibt sich:

$$\begin{array}{rcl} G_{2k}(\tau) & = & \displaystyle\sum_{m,n\neq(0,0)} \frac{1}{(n\tau+m)^{2k}} \\ & = & \displaystyle 2\zeta(2k) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n\tau+m)^{2k}} \\ & \overset{n\tau \text{ für } \tau \text{ in } (10)}{=} & \displaystyle 2\zeta(2k) + \frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)q^n \end{array}$$

□

Hiermit ist auch der Satz bewiesen. □

Für $G_4(\tau)$ und $G_6(\tau)$ ergeben sich folgende Fourierentwicklungen:

$$\begin{array}{rcl} G_4(\tau) & = & \frac{\pi^4}{45} + \frac{(2\pi)^4}{3}(q + 9q^2 + 28q^3 + 73q^4 + \dots) \\ G_6(\tau) & = & \frac{2\pi^6}{3^3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{(2\pi)^6}{60}(q + 33q^2 + 244q^3 + 1057q^4 + \dots) \end{array}$$

(hier ist als bekannt vorausgesetzt: $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{3^3 \cdot 5 \cdot 7}$)

ii) Die Modulform Δ:

$$\Delta(\tau) = (60G_4(\tau))^3 - 27(140G_6(\tau))^2$$

Δ stellt eine Modulform von Gewicht -12 dar, da die Modulformen gleichen Gewichts einen $\mathbb{C}$-Vektorraum bilden. $(G_4(\tau))^3$ und $(G_6(\tau))^2$ sind Modulformen von Gewicht -12. Die Fourierentwicklung für $\Delta(\tau)$ lautet:

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12}(q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + \cdots)$$

Für Δ kann auch eine Produktentwicklung angegeben werden:

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} q \prod_{\nu=1}^{\infty}(1-q^\nu)^{24}$$

(Zum Beweis siehe A.W. Knapp in [9] S.235 ff.)
Die Produktform wird am Ende dieses Kapitels wichtig, da mit ihrer Hilfe Informationen über das Transformationsverhalten von $\sqrt[24]{\Delta}$ gewonnen werden können. R. Fricke benutzt allerdings die homogenen Schreibweise und statt $q = e^{2\pi i\tau}$ aus historischen Gründen $q = e^{\pi i\tau}$, damit ergibt sich:

$$\Delta(\omega_1, \omega_2) = (\frac{2\pi}{\omega_2})^{12} q^2 \prod_{\nu=1}^{\infty}(1-q^{2\nu})^{24}$$

Definition 61. *Modulformen von Gewicht* 0 *werden auch* Modulfunktionen *genannt.*

Satz 62. *Wenn f eine Modulfunktion ist, dann ist $\frac{df}{d\tau}$ eine Modulform von Gewicht -2.*

Beweis. Für f gilt $f(\gamma\tau) = f(\tau)$ für alle $\gamma \in SL_2(\mathbb{Z})$. Mit $\tau' = \gamma(\tau)$ folgt dann:

$$\frac{df(\tau')}{d\tau'} = \frac{df(\tau')}{d\tau}\frac{d\tau}{d\tau'} = (c\tau + d)^2 \frac{df(\tau)}{d\tau}$$

Die weiteren Eigenschaften ergeben sich daraus, daß f eine Modulfunktion ist. □

4.4 Die Konstruktion von τ und σ

Sei $\Delta_m(w_1, w_2) := \Delta(mw_1, w_2)$. Im folgenden wird das Verhalten von Δ_m unter den Transformationen von w_1, w_2 durch Elemente aus $\widehat{\Gamma_0(N)}$ betrachtet.

Lemma 63. $\Delta_m(\gamma(w_1, w_2)) = \Delta_m(w_1, w_2)$ *für alle* $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$ *mit* $N \equiv 0\ (m)$.

Beweis. (mw_1, w_2) kann auch dargestellt werden als $M(w_1, w_2)$ mit $M := \left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} M\gamma M^{-1} &= \frac{1}{m}\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{m}\begin{pmatrix} ma & m^2b \\ c & md \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & mb \\ \frac{c}{m} & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die letzte Matrix $\begin{pmatrix} a & mb \\ \frac{c}{m} & d \end{pmatrix}$ ist genau dann ein Element von $SL_2(\mathbb{Z})$, wenn $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ein Element von $\Gamma_0(N)$ ist, mit $N \equiv 0\ (m)$. Hiermit folgt für $\Delta_m(\gamma(w_1, w_2))$:
Sei $\gamma \in \Gamma_0(N)$ mit $N \equiv 0\ (m)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \Delta_m(\gamma(w_1, w_2)) &= \Delta(M(\gamma(w_1, w_2))) \\ &= \Delta(M\gamma M^{-1}M(w_1, w_2)) \\ &= \Delta(M(w_1, w_2)) \\ &= \Delta_m(w_1, w_2) \end{aligned}$$

□

Als nächstes soll Δ_m unter der Transformation $W_{15} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 15 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ betrachtet werden, wobei hier m die Werte $1, 3, 5, 15$ annehmen kann. Es gilt mit $N = km$:

$$\begin{aligned} \Delta_m(W(w_1, w_2)) &= \Delta(-mw_2, kmw_1) \\ &= m^{-12}\Delta(-w_2, kw_1) \\ &= m^{-12}\Delta(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)(-w_2, kw_1)) \\ &= m^{-12}\Delta(kw_1, w_2) \\ &= m^{-12}\Delta_k(w_1, w_2) \end{aligned}$$

Für die einzelnen Δ_m bedeutet das:

$$\begin{aligned} \Delta_3(W(w_1, w_2)) &= 3^{-12}\Delta_5(w_1, w_2) \\ \Delta_5(W(w_1, w_2)) &= 5^{-12}\Delta_3(w_1, w_2) \\ \Delta_1(W(w_1, w_2)) &= \Delta_{15}(w_1, w_2) \\ \Delta_{15}(W(w_1, w_2)) &= 15^{-12}\Delta_1(w_1, w_2) \end{aligned}$$

Die Funktion

$$\Theta(w_1, w_2) := \frac{\Delta_3\Delta_5}{\Delta_1\Delta_{15}}(w_1, w_2)$$

ist also invariant unter $\widehat{\Gamma_0(15)}$ und somit eine Funktion auf $\mathbb{H}^*/\widehat{\Gamma_0(15)} =: \widehat{X_0(15)}$. Um eine meromorphe Funktion auf $\widehat{X_0(15)}$ zu bekommen, die eine einblättrige Überlagerung der Zahlenkugel darstellt, muß der Grad von Θ bestimmt werden. Dafür werde ich an dieser Stelle einen Absatz zu Polen und Nullstellen der Modulform Δ einschieben.

Nullstellen und Pole von Δ

Daß Δ keine Pole in $\mathbb{H}$ haben kann, geht schon aus der Definition von Δ und den Eigenschaften von G_4 und G_6 hervor. Auf Nullstellen hin läßt sich Δ am besten untersuchen, wenn man Δ in Beziehung zur Theorie der elliptischen Funktionen und speziell zur Weierstraßschen $\wp$-Funktion setzt. Ich werde hier keine Beweise führen, sondern nur die Zusammenhänge erläutern, zu den Beweisen siehe z.B. K. Chandrasekharan in [1] Kapitel 3.

Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion ist definiert als:

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in L}{}' \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)$$

wobei L das von ω_1, ω_2, ($\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{H}$) aufgespannte Gitter ist, und die Summe über alle Gitterpunkte $(\omega_1, \omega_2) \neq (0, 0)$ genommen wird. Die obige Reihe ist auf allen Kompakta, die keinen Gitterpunkt enthalten, gleichmäßig konvergent. Daraus folgt, daß $\wp(z)$ eine meromorphe Funktion ist, die nur in den Gitterpunkten Pole der Ordnung zwei hat, außerdem ist $\wp$ eine gerade Funktion, da es keinen Unterschied macht, ob über die positiven oder negativen

Gitterpunkte summiert wird. Die Ableitung $\wp'(z)$ ist demnach eine ungerade Funktion der Ordnung drei und hat als solche mit Vielfachheit gezählt drei Nullstellen in $\frac{\omega_1}{2}, \frac{\omega_2}{2}, \frac{\omega_1+\omega_2}{2} =: \frac{\omega_3}{2}$. Für $\wp$ und $\wp'$ gilt folgende Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} \wp'(z)^2 &= 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3 \\ &= 4(\wp(z)-e_1)(\wp(z)-e_2)(\wp(z)-e_3) \end{aligned} \tag{11}$$

wobei hier gilt $g_2 = 60\sum_{m,n}\frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^4} = 60G_4$ und $g_3 = 140\sum_{m,n}\frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^6} = 140G_6$ mit G_4 und G_6 aus Teil 4.3). Die e_i müssen, wegen der obigen Bemerkung, zu den Nullstellen von $\wp'$, gleich $\wp(\frac{\omega_i}{2})$ sein. Wenn D die Diskriminante des Polynoms $4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3$ ist, dann ist Δ gerade $-\frac{27}{16}D$. Die Diskriminante verschwindet genau dann, wenn das zugehörige Polynom doppelte Nullstelen hat. Aus Gradgründen kann das hier aber nicht der Fall sein ($\wp$ hat nur einen Pol der Ordnung 2 mod L). Also gilt

$$\Delta \neq 0 \text{ für alle } \tau \in \mathbb{H}$$

Die Fourierentwicklung von Δ (siehe Abschnitt 4.3) ermöglicht die direkte Berechnung von Δ_i für $i = 1, 3, 5, 15$:

$$\begin{array}{lcl} \Delta_1 = \Delta(\tau) &=& (2\pi)^{12}(q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + \cdots) \\ \Delta_{15} = \Delta(15\tau) &=& (2\pi)^{12}(q^{15} - 24q^{30} + 252q^{45} - 1472q^{60} + \cdots) \\ \Delta_1 \cdot \Delta_{15} &=& (2\pi)^{24}(q^{16} - 24q^{17} + 252q^{18} - 1472q^{19} + \cdots) \\ \Delta_3 = \Delta(3\tau) &=& (2\pi)^{12}(q^3 - 24q^6 + 252q^9 - 1472q^{12} + \cdots) \\ \Delta_5 = \Delta(5\tau) &=& (2\pi)^{12}(q^5 - 24q^{10} + 252q^{15} - 1472q^{20} + \cdots) \\ \Delta_3 \cdot \Delta_5 &=& (2\pi)^{24}(q^8 - 24q^{11} - 24q^{13} + 252q^{14} + +24^2q^{16} + 252q^{18}\cdots) \end{array}$$

Es ergibt sich also für den Quotienten Θ:

$$\Theta = \frac{(1 - 24q^3 - 24q^5 + 252q^6 + 24^2q^8 + \cdots)}{(q^8 - 24q^9 + 252q^{10}\cdots)}$$

Woraus sich ablesen läßt, daß Θ in $i\infty$ einen Pol 8-ter Ordnung hat. Um den Grad von Θ bestimmen zu können, ist es jetzt noch nötig, Informationen zu den anderen Spitzen zu sammeln.

Bemerkung 64. *Im Fundamentalbereich von $\widehat{\Gamma_0(15)}$ bleiben nur die Spitzen ∞ und $-\frac{1}{3}$ erhalten.*

Beweis. Durch eine nochmalige Erweiterung der Gruppe $\widehat{\Gamma_0(15)}$ um die Spiegelung an der imaginären Achse:

$$\widetilde{\Gamma_0(15)} = \widehat{\Gamma_0(15)} + \widehat{\Gamma_0(15)} \cdot \overline{U}$$

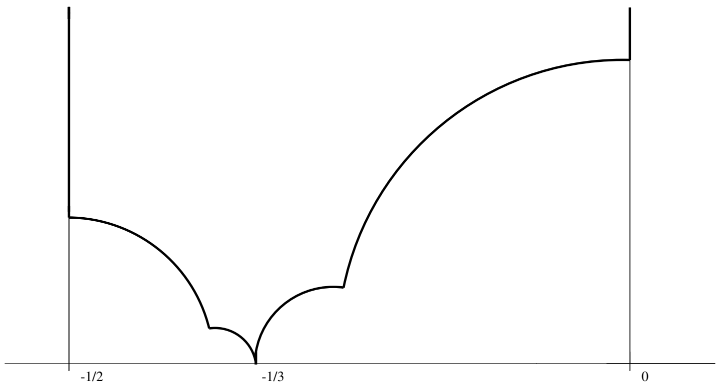
mit $\overline{U}(w) := -\overline{w}$, wird die Form des Fundamentalbereichs leichter zu erschließen. Ich werde den Fundamentalbereich von $\mathbb{H}^*/\widetilde{\Gamma_0(15)} =: \mathcal{F}_{\widetilde{\Gamma_0(15)}}$ nicht wirklich herleiten (siehe hierzu R. Fricke in [7] S.437). Für die obige Bemerkung ist es ausreichend die Randkurve von $\mathcal{F}_{\widetilde{\Gamma_0(15)}}$ zu betrachten, die wird $Re(z) = -\frac{1}{2}$, $Re(z) = 0$ und den unten beschriebenen Spiegelungskreisen gebildet. Um die Gleichung für die Spiegelungskreise zu erstellen bedient sich R. Fricke wieder des Zusammenhangs zwischen quadratischen Formen und elliptischen Punkten der Ordnung 2 und findet so vier Punkte, die die Nullstellen von quadratischen Formen sind, welche die vier Formklassen zu den Determinanten -15 und -60 repräsentieren. Da diese Punkte gleichzeitig Nullstellen elliptischer Substitutionen der Ordnung 2 sind (siehe hierzu Satz 54), liegen sie auf den begrenzenden Spiegelungskreisen. Die nähere Betrachtung ergibt:

$$\begin{array}{lrcll}
a) & \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -15 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}(\overline{U}(w)) = \begin{pmatrix} 15 & -7 \\ -30 & 15 \end{pmatrix}(\overline{U}(w)) & = & \frac{-15\overline{w}-7}{30\overline{w}+15} & \in \widehat{\Gamma_0(15)} \cdot \overline{U} \\
b) & \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ -30 & 11 \end{pmatrix}(\overline{U}(w)) & = & \frac{-11\overline{w}-4}{30\overline{w}+11} & \in \Gamma_0(15) \cdot \overline{U} \\
c) & \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -15 & 4 \end{pmatrix}(\overline{U}(w)) & = & \frac{-4\overline{w}-1}{15\overline{w}+4} & \in \Gamma_0(15) \cdot \overline{U} \\
d) & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}(\overline{U}(w)) & = & \frac{1}{15\overline{w}} & \in \widehat{\Gamma_0(15)} \cdot \overline{U}
\end{array}$$

Dies entspricht den Spiegelungskreisen:

$$\begin{array}{lrcl}
a) & (x+\frac{1}{2})^2 + y & = & \frac{1}{60} \\
b) & (x+\frac{11}{30})^2 + y^2 & = & \frac{1}{30^2} \\
c) & (x+\frac{4}{15})^2 y^2 & = & \frac{1}{15^2} \\
d) & x^2 + y^2 & = & \frac{1}{15}
\end{array}$$

Geometrisch stellen sich die Spiegelungskreise folgendermaßen dar:



Der Fundamentalbereich von $\widehat{\Gamma_0(15)}$ ist also enthalten in dem Bereich, der von $-\frac{1}{2} \leq Re(z) \leq \frac{1}{2}$ und den oben aufgeführten Spiegelungskreisen, sowie ihren Pendants auf der anderen Seite der imaginären Achse, begrenzt ist. Als Spitzen ragen nur noch ∞ und $\pm\frac{1}{3}$ an die reelle Achse. Die Spitzen $\pm\frac{1}{3}$ sind durch $\left(\begin{smallmatrix} 4 & -1 \\ -15 & 4 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(15)$ miteinander äquivalent. □

Da meromorphe Funktionen auf einer kompakten Riemannschen Fläche jeden Wert mit Vielfachheit gezählt gleich oft annehmen, folgt mit Bemerkung 64, daß Θ in $\frac{1}{3}$ eine Nullstelle achter Ordnung hat. Das Geschlecht von $\widehat{X_0(15)}$ läßt sich nun mit Hilfe von Θ berechnen. Θ stellt eine 8 blättrige Überlagerung der Zahlenkugel durch $\widehat{X_0(15)}$ dar, die Riemann-Hurwitzformel ergibt also für das Geschlecht p_0 von $\widehat{X_0(15)}$:

$$p_0 = -8 + 1 + \frac{b}{2}$$

Außerdem stellt Θ eine 16-blättrige Überlagerung durch $X_0(15)$ dar. Die zusätzliche Verzweigung ist durch die elliptischen Transformationen der Ordnung zwei in $\widehat{\Gamma_0(15)}$ gegeben und beträgt in diesem Fall $h(4\cdot 15)+h(15) = 4$. Da das Geschlecht p von $X_0(15)$ gleich eins ist, ergibt sich:

$$\begin{array}{rrcl} & p & = & -2\cdot 8 + b + \frac{1}{2}(h(4\cdot 15) + h(15)) + 1 \\ \Leftrightarrow & 1 & = & 2p_0 - 1 + 2 \\ \Leftrightarrow & p_0 & = & 0 \end{array}$$

D.h. das Geschlecht von $\widehat{X_0(15)}$ ist Null. Als Fläche von Geschlecht Null erlaubt $\widehat{X_0(15)}$ eine Darstellung als einblättrige Überlagerung der Zahlenkugel, sei u eine solche, für die gilt $u(i\infty) = \infty$ und $u(\frac{1}{3}) = 0$. Der Quotient

$$\frac{\Theta}{u^8} : \ \widehat{X_0(15)} \to \mathbb{P}_1$$

ist dann eine Funktion auf $X_0(15)$ ohne Nullstellen und Pole, also konstant. Deshalb ist die achte Wurzel aus Θ eine eindeutige Funktion auf $\widehat{X_0(15)}$. Dies ist eine der gesuchten Funktionen zweiten Grades auf $X_0(15)$, die später die Auffindung der algebraischen Gleichung möglich machen werden.

$$\tau := \sqrt[8]{\Theta} = \sqrt[8]{\frac{\Delta_3\Delta_5}{\Delta_1\Delta_{15}}}$$

Durch Diffentiation von τ mittels $(\omega, d\omega) := \omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1$ entsteht eine Modulform der Dimension -2, die ihre Nullstellen gerade in den Verzweigungspunkten von τ hat.

Also ist durch

$$v := -2\pi i \frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{(\omega, d\omega)} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)(1 - 3q^2 - 9q^4 - 3q^6 - 21q^8 - \cdots)$$

eine Modulform -2-ter Dimension mit Nullstellen in den Verzweigungspunkten von τ definiert. Diese Nullstellen sind genau die vier einfachen Nullstellen, die v hat, denn es gilt der Satz:

Satz 65. *Sei f eine ganze Modulform bzgl. $\Gamma_0(N)$ von Gewicht $-\delta$. Dann hat f im Fundamentalbereich $\mathcal{F}_{\Gamma_0(N)}$ von $\Gamma_0(N)$ Nullstellen der Gesamtordnung*

$$\frac{\delta}{12} \cdot \mu(N) = \#(\textit{Nullstellen von } f \textit{ in } \mathcal{F}_{\Gamma_0(N)})$$

wobei mit $\mu(N)$ der Index $[SL_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)]$ bezeichnet wird.

Beweis. Die 12-te Potenz von f, sowie Δ^δ haben das Gewicht -12δ, damit ist $g := \frac{f^{12}}{\Delta^\delta}$ eine Modulfunktion bzgl. $\Gamma_0(N)$. Als solche hat g gleich viele Pole und Nulstellen in $\mathcal{F}_{\Gamma_0(N)}$, also gleich viele Nullstellen in Zähler und Nenner. Da Δ genau $\psi(N)$ Nullstellen in den Spitzen von $\mathcal{F}_{\Gamma_0(N)}$ hat folgt die Aussage des Satzes. $\square$

Im Fall $\Gamma_0(15)$ ist $\mu(15) = 24$, eine Modulform zur Untergruppe $\Gamma_0(15)$ von Gewicht $-\delta$ hat also Nullstellen der Gesamtordnung -2δ.

Wie auch schon bei der Konstruktion von τ geht es jetzt darum, zu v eine Modulform des gleichen Gewichts zu finden, so daß der Quotient dieser beiden Formen eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{H}^*/\Gamma_0(15)$ ist. Hier muß allerdings noch darauf geachtet werden, daß die Nullstelleneigenschaften von v erhalten bleiben.
Die Funktion

$$z_1 := \sqrt[24]{\frac{(\Delta\Delta_{15})^2}{\Delta_5\Delta_3}}$$

ist unter Transformation des Gitters durch Matrizen aus $\Gamma_0(15)$ bis auf Änderung des Vorzeichens invariant und hat eine einfache Nullstelle in $i\infty$. Zunächst werde ich die Behauptung über das Nullstellenverhalten beweisen und danach das Transformationsverhalten unter $\Gamma_0(15)$.

Nullstellen von z_1:

Wie schon oben gezeigt wurde, sind $\Delta_1\Delta_{15}$ und $\Delta_3\Delta_5$ Modulformen von Gewicht -24, demnach sind $\sqrt[8]{\Delta_3\Delta_5}$ und $\sqrt[8]{\Delta_1\Delta_{15}}$ bis auf einen Multiplikator Modulformen der Dimension -3 und für die Ordnung der Nullstellen gilt:

	(Nullst. in i∞)	(Nullst. in $\frac{1}{3}$)
$\sqrt[8]{\Delta_3\Delta_5}$	1	2
$\sqrt[8]{\Delta_1\Delta_{15}}$	2	1
$\sqrt[8]{(\Delta_3\Delta_5)^2}$	2	4
$\sqrt[8]{(\Delta_1\Delta_{15})^2}$	4	2

also hat $\sqrt[8]{\frac{(\Delta_1\Delta_{15})^2}{\Delta_3\Delta_5}}$ als einzige Nullstelle eine der Ordnung drei in $i\infty$ und daher hat z_1 dort seine einzige, einfache Nullstelle.

Transformationverhalten von z_1:

Um das Transformationsverhalten der 24. Wurzel kontrollieren zu können, bedient sich R. Fricke der Weierstraßschen σ- Funktion. Diese Funktion ist dadurch charakterisiert, daß sie einfache Nullstellen in den Gitterpunkten des Gitters ω_1, ω_2 hat. Änderungen des Arguments um Vielfache der Perioden wirken sich folgendermaßen aus:

$$\sigma(u + m\omega_1 + n\omega_2) = (-1)^{mn+m+n} e^{(m\eta_1+n\eta_2)(u+\frac{m\omega_1+n\omega_1}{2})}\sigma(u)$$

(siehe R. Fricke in [6] S.209)
wobei η_1 und η_2 Funktionen von ω_1 und ω_2 sind. Es gilt:

$$\eta_1\omega_1 + \eta_2\omega_2 = 2\pi i$$

und damit für $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{array}{lcl} \omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 & \Rightarrow & \eta_1' = \alpha\eta_1 + \beta\eta_2 \\ \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 & \Rightarrow & \eta_1' = \gamma\eta_1 + \delta\eta_2 \end{array}$$

Im folgenden ist nur dieses Transformationsverhalten von η_1, η_2 von Bedeutung. Für $\sigma(u)$ leitet R. Fricke in [6] S.265 ff. eine Produktform her:

$$\sigma(u) = \frac{\omega_2}{\pi} e^{\frac{\eta_2 u^2}{2\omega_2}} sin(\frac{\pi u}{\omega_2}) \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 - 2q^{2\nu} cos(\frac{2\pi u}{\omega}) + q^{4\nu}}{(1-q^{2\nu})^2}$$

Hier ist $q := e^{\pi i \frac{\omega_1}{\omega_2}}$, q ist also fast genauso gebildet wie bei Erstellung der Fourierentwicklung um $i\infty$, aus historischen Gründen verwendet R. Fricke allerdings nicht q^2 als Variable, wie das in moderneren Büchern üblich ist.
Es ist nützlich eine leicht modifizierte σ-Funktion zu betrachten, da diese ein

leicht beschreibbares Verhalten unter der Transformation des Periodengitters zeigt.

$$\sigma_{gh}^{(n)} = e^{\frac{g\eta_1+h\eta_2}{n}\left(u-\frac{g\omega_1+h\omega_2}{2n}\right)}\sigma\left(u-\frac{g\omega_1+h\omega_2}{n}\right),\ g,h\in\mathbb{Z}$$

Für $\sigma_{gh}^{(n)}(0)$ wird auch kurz $\sigma_{gh}^{(n)}$ geschrieben. Für $\sigma_{0\mu}^{(n)}$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\sigma_{0\mu}^{(n)} &= e^{-\frac{\mu^2\eta_2\omega_2}{2n^2}}\sigma(-\tfrac{\mu\omega_2}{n}) \\
&= e^{-\frac{\mu^2\eta_2\omega_2}{2n^2}}\tfrac{\omega_2}{\pi}e^{\frac{\eta_2(-\frac{\mu\omega_2}{n})^2}{2\omega_2}}sin(\tfrac{\pi\mu\omega_2}{n\omega_2})\textstyle\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{1-2q^{2\nu}cos(\frac{2\pi u}{\omega})+q^{4\nu}}{(1-q^{2\nu})^2} \\
&= -\tfrac{\omega_2}{\pi}sin(\tfrac{\mu\pi}{n})\textstyle\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{\left(1-(e^{\frac{\pi i}{n}})^{\mu}q^{2\nu}\right)\left(1-(e^{\frac{\pi i}{n}})^{-\mu}q^{2\nu}\right)}{(1-q^{2\nu})^2}
\end{aligned}$$

Für ein ungerades $n\in\mathbb{N}$ gilt dann:

$$\prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}}\sigma_{0\mu}^{(n)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\omega_2}{\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}}\prod_{\nu=1}^{\infty}\prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}}sin(\frac{\mu\pi}{n})\frac{\left(1-(e^{\frac{\pi i}{n}})^{\mu}q^{2\nu}\right)\left(1-(e^{\frac{\pi i}{n}})^{-\mu}q^{2\nu}\right)}{(1-q^{2\nu})^2}$$

Das Sinusprodukt faßt sich zu $(\frac{1}{2})^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}$ zusammen und das letzte Produkt vereinfacht sich zu:

$$\begin{aligned}
\textstyle\prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{\left(1-(e^{\frac{\pi i}{n}})^{\mu}q^{2\nu}\right)\left(1-(e^{\frac{\pi i}{n}})^{-\mu}q^{2\nu}\right)}{(1-q^{2\nu})^2} &= \tfrac{(1+q^{2\nu}+q^{4\nu}+\cdots+q^{2(n-1)\nu})}{(1-q^{2\nu})^{n-1}} \\
&= \tfrac{(1-q^{2n\nu})}{(1-q^{2\nu})^n}
\end{aligned}$$

und es folgt:

$$\prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}}\sigma_{0\mu}^{(n)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{(1-q^{2n\nu})}{(1-q^{2\nu})^n}$$

Die Produktentwicklung von Δ ist:

$$\Delta(\omega_1,\omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12}q^2\left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})\right)^{24}$$

Führt man jetzt $\Delta' = \Delta(\omega_1,\frac{\omega_2}{n})$ ein und betrachtet den Quotienten $\frac{\Delta'}{\Delta^n}$, so ergibt sich:

$$\frac{\Delta'}{\Delta^n} = \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{12(n-1)}n^{12}\left(\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{(1-q^{2n\nu})}{(1-q^{2\nu})^n}\right)^{24}$$

Die 24. Wurzel läßt sich also in Verhältnis zu dem Produkt der $\sigma_{0\mu}^{(n)}$ setzen:

$$\sqrt[24]{\frac{\Delta'}{\Delta^n}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{\mu=1}^{\frac{n-1}{2}} \sigma_{0\mu}^{(n)}$$

Aus dem bekannten Transformationsverhalten von σ können die folgenden Regeln für $\sigma_{gh}^{(n)}$ hergeleitet werden, dabei ist jetzt σ als Funktion des Gitters geschrieben und wird im folgenden immer in der Stelle $u = 0$ betrachtet. Wenn die Argumente weggelassen sind ist immer ω_1, ω_2 als Gitter gemeint. Sei $\gamma_0 = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$, dann gilt:

$$\begin{aligned} &1) \quad \sigma_{gh}^{(n)} \gamma_0(\omega_1, \omega_2) = \sigma_{\alpha g+\beta h, \gamma g+\delta h}^{(n)}(\omega_1, \omega_2) \\ &2) \quad \sigma_{g+an, h+bn}^{(n)} = (-1)^{ab+a+b} e^{\frac{\pi i}{n}(ah-bg)} \sigma_{gh}^{(n)} \\ &3) \quad \sigma_{-g-h}^{(n)} = \sigma_{gh}^{(n)} \end{aligned}$$

Damit läßt sich nun das Transformationsverhalten der oben eingeführten Funktion $z_1 = \sqrt[24]{\frac{(\Delta\Delta_{15})^2}{\Delta_3\Delta_5}}$ untersuchen.

Für den Nenner gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt[24]{\tfrac{\Delta_3\Delta_5}{\Delta^8}} &= (-1)^3 \textstyle\prod_{\mu=1}^{1} \sigma_{0\mu}^{(3)} \prod_{\nu=1}^{2} \sigma_{0\nu}^{(5)} \\ \Leftrightarrow \quad \sqrt[24]{\Delta_3\Delta_5} &= -\sqrt[3]{\Delta}\sigma_{01}^{(3)} \sigma_{01}^{(5)} \sigma_{02}^{(5)} \end{aligned}$$

Die einzelnen Faktoren transformieren sich folgendermaßen unter $\gamma_0 \in \Gamma_0(15)$:

$$1) \quad \sqrt[3]{\Delta}(\gamma_0(\omega_1, \omega_2)) = \rho^\lambda \sqrt[3]{\Delta}(\omega_1, \omega_2)$$

mit $\lambda = (\alpha^2 + \gamma^2)(\alpha\beta + \gamma\delta)$ (siehe [6] S.455)

$$2) \quad \sigma_{01}^{(3)}(\gamma_0(\omega_1, \omega_2)) = \sigma_{\gamma\delta}^{(3)}(\omega_1, \omega_2)$$

Da $\gamma_0 \in \Gamma_0(15)$, gilt $\gamma = k \cdot 15$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, sei $\delta = r + s \cdot 15 = r_{(3)} + s_{(3)} \cdot 15 = r_{(5)} + s_{(5)} \cdot 15$. Regel 2) (Reduktion modulo 3) ergibt dann:

$$\sigma_{\gamma\delta}^{(3)} = (-1)^{5ks_{(3)}+5k+s_{(3)}} e^{\frac{\pi i}{3}(5kr_{(3)})} \sigma_{0r_{(3)}}^{(3)}$$

$r_{(3)}$ kann so gewählt werden, daß gilt: $r_{(3)} \in \{-1, 1\}$. Mit $\sigma_{-g-h}^{(3)} = \sigma_{gh}^{(3)}$ folgt, daß $\sigma_{0r_{(3)}}^{(3)}$ sich nur um ein Vorzeichen von $\sigma_{01}^{(3)}$ unterscheidet. Da ich eigentlich die Funktion ${z_1}^2$ betrachten möchte, unterlasse ich die Überlegungen zu den Vorzeichen. D.h. es gilt:

$$\sigma_{01}^{(3)}(\gamma_0(\omega_1, \omega_2)) = \pm e^{-\frac{\pi i}{3}(5kr_{(3)})} \sigma_{01}^{(3)}(\omega_1, \omega_2)$$

Ähnliche Überlegungen sind für $\sigma_{01}^{(5)}$ und $\sigma_{02}^{(5)}$ anzustellen, wobei hier zu beachten ist, daß die Reste $r_{(5)}, r_{(5)}^{(2)}$ mit $2\delta = r_{(5)}^{(2)} + s'_{(5)}5$ in verschiedene Restklassen von $\mathbb{Z}_5/\pm 1$ fallen. Es ergibt sich:

$$\sigma_{01}^{(5)}\sigma_{02}^{(5)}(\gamma_0(\omega_1,\omega_2)) = \pm e^{-\frac{\pi i}{5}(3kr_{(5)}+6kr_{(5)}^{(2)})}\sigma_{01}^{(5)}\sigma_{02}^{(5)}(\omega_1,\omega_2)$$

Insgesamt transformiert sich der Nenner unter einer Matrix aus $\Gamma_0(15)$ also folgendermaßen:

$$\sqrt[24]{\Delta_3\Delta_5}(\gamma_0(\omega_1,\omega_2)) = \pm\rho^{\lambda}e^{-\frac{\pi ik}{15}(25r_{(3)}+9r_{(5)}+18r_{(5)}^{(2)})}\sqrt[24]{\Delta_3\Delta_5}(\omega_1,\omega_2)$$

Für den Zähler gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt[24]{\tfrac{\Delta_{15}}{\Delta^{15}}} &= (-1)^7\textstyle\prod_{\mu=1}^{7}\sigma_{0\mu}^{(15)} \\ \Leftrightarrow\quad \sqrt[24]{\Delta\Delta_{15}} &= -(\sqrt[3]{\Delta})^2\textstyle\prod_{\mu=1}^{7}\sigma_{0\mu}^{(15)} \end{aligned}$$

Mit $\mu\delta = r_\mu + s_\mu 15$ und $\mu\gamma = \mu k15$ ergibt sich nach analogen Überlegungen wie oben:

$$\sqrt[24]{\Delta\Delta_{15}}(\gamma_0(\omega_1,\omega_2)) = \pm\rho^{2\lambda}e^{-\frac{\pi ik}{15}(\sum_{\mu=1}^{7}\mu r_\mu)}\sqrt[24]{\Delta\Delta_{15}}(\omega_1,\omega_2)$$

Für z_1 bedeutet das:

$$z_1(\gamma_0(\omega_1,\omega_2)) = \pm\rho^{3\lambda}e^{-\frac{\pi ik}{15}(2\sum_{\mu=1}^{7}\mu r_\mu-(25r_{(3)}+9r_{(5)}+18r_{(5)}^{(2)}))}z_1(\omega_1,\omega_2)$$

Da $ggT(\delta,15)=1$ gilt $r\in\{1,2,4,7,8,11,13,14\}$, die anderen im Exponenten auftauchenden Reste lassen sich aus r berechnen. Es ergibt sich:

r	$r_{(3)}$	$r_{(5)}$	$r_{(5)}^{(2)}$	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7
1	1	1	2	2	3	4	5	6	7
2	2	2	4	4	6	8	10	12	14
4	1	4	3	8	12	1	5	9	13
7	1	2	4	14	6	13	5	12	4
8	2	3	1	1	9	2	10	3	11
11	2	1	2	7	3	14	10	6	2
13	1	3	1	11	9	7	5	3	1
14	2	4	3	13	12	11	10	9	8

Einsetzen in die obige Formel ergibt in allen Fällen $z_1(\gamma_0(\omega_1,\omega_2)) = \pm z_1(\omega_1,\omega_2)$.
In $\sigma := \frac{v}{{z_1}^2}$ ist also eine meromorphe Funktion auf $X_0(15)$ gefunden, die ihre vier einfachen Nullstellen in den Verzweigungspunkten von τ hat. σ

kann keine einwertige meromorphe Funktion auf $X_0(15)$ sein, da $X_0(15)$ als Fläche vom Geschlecht 1 keine Darstellung als einblättrige Überlagerung der Zahlenkugel zuläßt. Die Potenzreihenentwicklungen für σ und τ ergeben:

$$\sigma^2 = \tau^4 - 10\tau^3 - 13\tau^2 + 10\tau + 1 \tag{12}$$

D.h. die zu dieser elliptischen Kurve gehörende Riemannsche Fläche ist im Sinne von Kapitel 2 gleich der anfangs konstruierten Fläche $X_0(15)$. Als kompakte Riemannsche Fläche von Geschlecht 2 stellt $X_0(15)$ eine elliptische Kurve dar. Der Übergang zur Minimalform wird in Ligozat [10] S.44 beschrieben und ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \sigma &= \tfrac{(2s+t+46)^2}{4(t-8)^2} - 2(t-8) - \tfrac{101}{4} \\ \tau &= \tfrac{(2s+t+46)}{2(t-8)} + \tfrac{5}{2} \end{aligned}$$

Gleichung (12) bekommt dann die Form:

$$s^2 + ts + s = t^3 + t^2 - 10t - 10$$

Eine weitere Transformation durch

$$\begin{aligned} t &= Y' - \tfrac{1}{2}X' \\ s &= X' + 1 \end{aligned}$$

ergibt:

$$\begin{aligned} Y'^2 &= X'(X'-4)(X'+\tfrac{9}{4}) \\ \Leftrightarrow\ 4^3Y'^2 &= 4X'(4X'-16)(4X'+9) \end{aligned}$$

wird jetzt noch Y' durch $\frac{1}{8}Y$ ersetzt und X' durch $\frac{1}{4}X$, so erhält man die gewünschte Form.

$$Y^2 = X(X-16)(X+9)$$

Literatur

[1] Chandrasekharan, K.
"Elliptic functions". Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1985

[2] H.Darmond, F.Diamond und R.Taylor
"Fermat's last theorem", erschienen in 'Current Developments in Mathematics 1995'. International Press Incorporation, Boston 1994

[3] Wolfgang, Fischer; Ingo Lieb
"Funktionentheorie". Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden 1994

[4] Forster, Otto
"Riemannsche Flächen". Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1977

[5] Freitag, Eberhard; Busam, Rolf
"Funktionentheorie". Springer Verlag, Berlin, Heidelberg 1993

[6] Fricke, Robert
"Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen", Band 1. BG Teubner, Leipzig & Berlin 1916

[7] Fricke, Robert
"Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen", Band 2. Johnson Reprint Corporation New York, London 1972

[8] Jost, Jürgen
"Compact Riemann surfaces". Springer Verlag, Berlin, Heidelberg 1997

[9] Knapp, Anthony W.
"Elliptic curves". Princeton University Press, Princeton 1992

[10] Ligozat, Gérard
"Courbes modulaires de genre 1". Bull. Soc. Math. France, Supplément, Memoire 43, 1975

[11] Murty, Kumar
"Introduction to AbelianVarieties". CRM Monograph series Vol.3 1993

[12] Kenneth.A.Ribet
"Galois representation and modular forms". Bulletin of the Aerican Math. Soc., Vol. No. 32, 1995

[13] Rubin, K; Silverberg, A.
"A report on Wiles' Cambridge lectures". Bull. of the American Math. Soc., Vol. 31 Nr.1, 1994

[14] Schoeneberg, B.
"Elliptic modular functions, an introduction". Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1974

[15] Shimura, Goro
"Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions". Princeton University Press, Princeton 1971

[16] Zagier,D.B.
"Zetafunktionen und quadratische Zahlkörper". Springer Verlag, Berlin, Heidelberg 1981