Fachbereich 03 – Mathematik Universität Bremen

Diplomarbeit

Der Satz von Ado für Super-Lie-Algebren

vorgelegt von
Gerrit Grenzebach

November 2008

Gutachter:
Prof. Dr. Eberhard Oeljeklaus
Dr. Ingolf Schäfer

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

1 Grundlegende Begriffe **3**

1.1 Graduierte Vektorräume 3
1.2 Graduierte Algebren 4
1.3 Lineare Abbildungen zwischen Γ-graduierten Vektorräumen 5
1.4 Lineare Operatoren in $\mathbb{Z}_2$-graduierten Vektorräumen 5

2 Super-Lie-Algebren **7**

2.1 Grundlegendes über Super-Lie-Algebren 7
2.1.1 Definition und Zusammenhang mit Superalgebren 7
2.1.2 Super-Lie-Unteralgebren, Ideale und Quotienten 9
2.1.3 Homomorphismen 11
2.1.4 Superderivationen und Darstellungen 12
2.1.5 Erweiterungen des Grundkörpers 13
2.2 Super-Lie-Algebren der Dimension 2 13
2.3 $\mathbb{Z}$-Graduierung und Filtrierungen 15
2.3.1 $\mathbb{Z}$-graduierte Super-Lie-Algebren 15
2.3.2 Filtrierungen 16
2.3.3 Die assoziierte $\mathbb{Z}$-graduierte Super-Lie-Algebra $\operatorname{Gr}\mathfrak{g}$ 19
2.3.4 Eigenschaften von $\operatorname{Gr}\mathfrak{g}$ bei einer bestimmten Filtrierung von $\mathfrak{g}$ 21
2.4 Auflösbare Super-Lie-Algebren 24
2.4.1 Definition und Grundlagen 24
2.4.2 Der Satz von Lie 27
2.4.3 Der Satz von Kac 28
2.5 Nilpotente Super-Lie-Algebren 34
2.5.1 Definition und Grundlagen 34
2.5.2 Das Nilradikal einer Super-Lie-Algebra 35
2.5.3 Der Satz von Engel 37

3 Die universelle einhüllende Superalgebra **41**

3.1 Vorbemerkungen über Superalgebren 41
3.2 Die Tensor-Superalgebra 42
3.2.1 Definition 42
3.2.2 Universelle Eigenschaft 43
3.3 Die supersymmetrische Algebra 44
3.3.1 Definition 44

3.3.2 Eine Vektorraumbasis der supersymmetrischen Algebra . . 45
3.4 Die universelle einhüllende Superalgebra 47
3.4.1 Definition 47
3.4.2 Co-Filtrierung und assoziierte $\mathbb{Z}$-graduierte Superalgebra . 47
3.4.3 Universelle Eigenschaft 49
3.5 Der Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt 51
3.5.1 Formulierung des Satzes 51
3.5.2 Konsequenzen 52
3.5.3 Beweis des Satzes von Poincaré-Birkhoff-Witt 56

4 Der Satz von Ado **67**
4.1 Induzierte Moduln 67
4.2 Der Satz von Ado für Super-Lie-Algebren 69
4.3 Ein Beispiel 71

5 Ausblick **73**

Literatur **74**

Einleitung

Die Theorie der Super-Lie-Algebren ist vergleichsweise jung; sie wurde in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts – vorwiegend in den sechziger und siebziger Jahren – entwickelt. Mathematisch handelt es sich bei Super-Lie-Algebren um eine Verallgemeinerung des Begriffs einer Lie-Algebra. Die wesentlichen Unterschiede bestehen dabei in dem zugrundeliegenden Vektorraum und der Kommutatorrelation: Für Super-Lie-Algebren wird stets ein $\mathbb{Z}_2$-graduierter Vektorraum $V = V_{[0]} \oplus V_{[1]}$ vorausgesetzt, auf dem eine Paritätsfunktion

$$\alpha\colon \big(V_{[0]} \cup V_{[1]}\big) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_2, \qquad \alpha(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in V_{[0]}, \\ 1, & \text{falls } x \in V_{[1]}. \end{cases}$$

definiert ist; eine auf V eingeführte bilineare Abbildung $[\cdot,\cdot]\colon V \times V \to V$ soll die Kommutatorrelation

$$[x, y] = -(-1)^{\alpha(x)\alpha(y)}[y, x] \quad \text{für } x, y \in V_{[0]} \cup V_{[1]}$$

erfüllen.

Die vielleicht wichtigste Anwendung von Super-Lie-Algebren findet man in der Physik. Dort werden sie zur Beschreibung des fundamentalen Konzepts der Supersymmetrie benötigt, welches in den siebziger Jahren des 20. Jahrhunderts entstanden ist, und von dieser Anwendung haben sie auch ihren Namen. Mit Hilfe der Supersymmetrie ist es möglich, zwei verschiedene Sorten von Teilchen – Bosonen und Fermionen – gleichzeitig zu behandeln.

Dieser Bezug von Super-Lie-Algebren zur Physik hat die Verbreitung dieser mathematischen Theorie und ihre weitere Entwicklung gefördert. In der Mathematik sind sie allerdings schon vorher bekannt gewesen; unter anderem treten sie dort in der Deformationstheorie auf.

Wir wollen auf die Anwendungen nicht weiter eingehen, sondern uns mit der Theorie der Super-Lie-Algebren beschäftigen. Unser Ziel ist der Satz von Ado, welcher besagt, daß jede endlichdimensionale Super-Lie-Algebra über einem Körper der Charakteristik 0 isomorph ist zu eine Super-Lie-Algebra von Matrizen; mit anderen Worten: Außer den Super-Lie-Algebren von Matrizen gibt es bis auf Isomorphie keine endlichdimensionalen Super-Lie-Algebren.

Dazu führen wir in Kapitel 1 zunächst den zentralen Begriff eines graduierten Vektorraumes ein. Aufbauend darauf erklären wir dann graduierte Algebren sowie lineare Abbildungen zwischen graduierten Vektorräumen.

Das Kapitel 2 ist dann der Einführung von Super-Lie-Algebren gewidmet. Dabei erläutern wir anfangs diverse grundlegende Begriffe wie graduierte Ideale und

Homomorphismen, bevor wir uns ausführlicher mit $\mathbb{Z}$-Graduierungen und Filtrierungen beschäftigen. Zum Abschluß befassen wir uns noch mit auflösbaren und nilpotenten Super-Lie-Algebren.

In Kapitel 3 erklären wir die Tensor-Superalgebra eines $\mathbb{Z}_2$-graduierten Vektorraumes, aus der wir dann die supersymmetrische Algebra sowie die universelle einhüllende Superalgebra einer Super-Lie-Algebra konstruieren. Den größten Teil dieses Kapitels nimmt der Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt ein, der eine Vektorraumbasis der universellen einhüllenden Superalgebra angibt.

Aufbauend auf einer Folgerung aus dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt beweisen wir dann in Kapitel 4 den Satz von Ado, indem wir für eine endlichdimensionale Super-Lie-Algebra eine geeignete Darstellung auf einem sogenannten induzierten Modul konstruieren.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. Eberhard Oeljeklaus und Herrn Dr. Ingolf Schäfer für die gute Betreuung danken. Herrn Dr. Ingolf Schäfer danke ich außerdem für die interessante Aufgabenstellung; bei Herrn Prof. Dr. Eberhard Oeljeklaus bedanke ich mich für die zur Verfügung gestellte Literatur.

Meinen Brüdern Arne und Claas Grenzebach danke ich für ihre Unterstützung: Arne hat mit vielen klärenden Gesprächen zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen; Claas hat die gesamte Arbeit gelesen und zahlreiche stilistische Verbesserungen vorgeschlagen. Meinen Eltern schließlich danke ich für die moralische Unterstützung sowie für die Finanzierung meines Studiums.

1 Grundlegende Begriffe

In diesem Kapitel ist K ein beliebiger Körper. Wir führen den zentralen Begriff eines graduierten K-Vektorraumes ein, den wir im weiteren Verlauf immer wieder gebrauchen werden. Außerdem behandeln wir graduierte Algebren sowie lineare Abbildungen zwischen graduierten Vektorräumen. Hauptsächlich haben wir uns dabei an den Büchern von Berezin (1987, Seite 90ff) und Scheunert (1979, Seite 6ff) orientiert.

1.1 Graduierte Vektorräume

Sei Γ einer der Ringe $\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Definition 1: *Ein Vektorraum V über einem Körper K heißt* **Γ-*graduiert***, *wenn es eine Familie $(V_i)_{i\in\Gamma}$ von Untervektorräumen gibt mit $V = \bigoplus_{i\in\Gamma} V_i$. Für jedes $i \in \Gamma$ heißen die Elemente von V_i* ***homogen vom Grad*** *i. Die Familie $(V_i)_{i\in\Gamma}$ wird als* **Γ-*Graduierung von*** *V bezeichnet.*

Beispiel: *Der Polynomring $K[X]$ in einer Unbestimmten ist ein $\mathbb{Z}$-graduierter Vektorraum mit $K[X]_i = \{0\}$ für $i < 0$. Für $i \geq 0$ ist $\dim K[X]_i = 1$ mit Basis $\{X^i\}$.*

Jedes Element x eines Γ-graduierten Vektorraumes $V = \bigoplus_{i\in\Gamma} V_i$ hat eine eindeutige Zerlegung in homogene Komponenten, d. h.

$$x = \sum_{i\in\Gamma} x_i \quad \text{mit } x_i \in V_i \text{ für alle } i \in \Gamma,\ x_i = 0 \text{ für fast alle } i \in \Gamma.$$

Eine Basis von $V = \bigoplus_{i\in\Gamma} V_i$ aus homogenen Elementen wird als *homogene Basis* bezeichnet.

Definition 2: *Ein Untervektorraum $U \subset V = \bigoplus_{i\in\Gamma} V_i$ heißt* **(Γ-)*graduiert***, *wenn U auch alle homogenen Komponenten seiner Elemente enthält, also wenn gilt:*

$$U = \bigoplus_{i\in\Gamma} \underbrace{(V_i \cap U)}_{=:U_i}.$$

Im folgenden gehen wir noch etwas detaillierter auf $\mathbb{Z}_2$-graduierte Vektorräume ein. Sei also $V = V_{[0]} \oplus V_{[1]}$ ein $\mathbb{Z}_2$-graduierter Vektorraum.* Die Elemente von $V_{[0]}$ werden dann auch *gerade* und die von $V_{[1]}$ *ungerade* genannt.

Für die homogenen Elemente von V läßt sich noch eine Parität festlegen. Dazu definieren wir eine Paritätsfunktion, die wir auch an späterer Stelle noch benötigen werden:

*Wir bezeichnen hier die Elemente von $\mathbb{Z}_2$ mit $[0]$ und $[1]$, um eventuellen Verwechselungen vorzubeugen.

Definition 3: *Für einen $\mathbb{Z}_2$-graduierten Vektorraum $V = V_{[0]} \oplus V_{[1]}$ ist eine **Paritätsfunktion** α gegeben durch:*

$$\alpha\colon \left(V_{[0]} \cup V_{[1]}\right) \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}_2, \qquad \alpha(x) := \begin{cases} 0, & \textit{falls } x \in V_{[0]} \quad (x \textit{ gerade}), \\ 1, & \textit{falls } x \in V_{[1]} \quad (x \textit{ ungerade}). \end{cases}$$

Außerdem setzen wir $\alpha(0) := 0$, um die 0 nicht gesondert betrachten zu müssen.

Im folgenden ist bei $\alpha(x)$ stets ein homogenes x gemeint.

Wenn V endlichdimensional ist mit $\dim V_{[0]} = m$, $\dim V_{[1]} = n$, so schreibt man $\dim V = (m, n)$. Eine homogene Basis $\{e_j\}_{1 \leq j \leq m+n}$ von V bezeichnet man als *Basis in Standardform*, wenn gilt:

$$e_j \in V_{[0]} \quad \text{für} \quad 1 \leq j \leq m \quad \text{und} \quad e_j \in V_{[1]} \quad \text{für} \quad m+1 \leq j \leq m+n.$$

Zu bemerken ist noch, daß jeder $\mathbb{Z}$-graduierte Vektorraum $W = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} W_i$ eine natürliche $\mathbb{Z}_2$-Graduierung besitzt, nämlich:

$$W_{[0]} = \bigoplus_{i \text{ gerade}} W_i, \qquad W_{[1]} = \bigoplus_{i \text{ ungerade}} W_i.$$

Außerdem läßt sich jeder beliebige Vektorraum U per $U \oplus \{0\}$ oder $\{0\} \oplus U$ als ein $\mathbb{Z}_2$-graduierter Vektorraum ansehen.

1.2 Graduierte Algebren

Wir erinnern kurz an die Definition einer Algebra: Darunter verstehen wir einen K-Vektorraum A mit einer assoziativen Multiplikation, für die die Distributivgesetze gelten. Eine Unteralgebra von A ist ein Untervektorraum, der unter dieser Multiplikation abgeschlossen ist. Ein rechtsseitiges Ideal $I \subset A$ ist ein Untervektorraum, so daß für jedes $x \in I$ und jedes $a \in A$ gilt: $xa \in I$; entsprechend werden linksseitiges und zweiseitiges Ideal definiert.

Definition 4: *Eine Algebra A heißt Γ-**graduiert**, wenn A als Vektorraum Γ-graduiert ist, d. h. $A = \bigoplus_{i \in \Gamma} A_i$, und wenn für alle $i, j \in \Gamma$ gilt: $A_i A_j \subset A_{i+j}$.*

Bemerkung: Die Komponente A_0 einer Γ-graduierten Algebra A ist damit stets eine Unteralgebra.

Definition 5: *Sei $A = \bigoplus_{i \in \Gamma} A_i$ eine Γ-graduierte Algebra, $B \subset A$ eine Unteralgebra, $I \subset A$ ein Ideal. Ist B als Untervektorraum Γ-graduiert, also $B = \bigoplus_{i \in \Gamma}(B \cap A_i)$, so heißt B **graduierte Unteralgebra** von A. Entsprechend heißt I ein **graduiertes Ideal**, wenn $I = \bigoplus_{i \in \Gamma}(I \cap A_i)$ als Untervektorraum graduiert ist.*

Definition 6: *Eine $\mathbb{Z}_2$-graduierte Algebra heißt **Superalgebra***.*

*Ursache dieser Bezeichnung ist der enge Zusammenhang zwischen Superalgebren und Super-Lie-Algebren, vgl. Abschnitt 2.1.1 auf Seite 7.

1.3 Lineare Abbildungen zwischen Γ-graduierten Vektorräumen

Definition 7: *Seien $V = \bigoplus_{i\in\Gamma} V_i$, $W = \bigoplus_{i\in\Gamma} W_i$ zwei Γ-graduierte Vektorräume. Eine lineare Abbildung $\phi\colon V \to W$ heißt **homogen vom Grad** k, wenn*

$$\phi(V_i) \subset W_{i+k} \quad \textit{für alle } i \in \Gamma.$$

Bemerkung: Die Nullabbildung ist homogen von jedem Grad $k \in \Gamma$. Jede nicht homogene lineare Abbildung läßt sich als Summe von homogenen linearen Abbildungen darstellen; diese Zerlegung ist aber im allgemeinen nicht eindeutig.

Den Vektorraum der linearen Abbildungen von V nach W bezeichnen wir mit $\mathrm{L}(V, W)$. Dieser ist ebenfalls Γ-graduiert mit

$$\mathrm{L}_i(V, W) = \{\phi \in \mathrm{L}(V, W) \mid \phi \text{ homogen vom Grad } i\}.$$

Falls $W = V$, schreiben wir kurz $\mathrm{L}(V)$. Mit der Komposition von Abbildungen als Multiplikation ist $\mathrm{L}(V)$ sogar eine Γ-graduierte Algebra.

Eine lineare Abbildung $\phi \in \mathrm{L}(V, W)$ zwischen Γ-graduierten Vektorräumen nennen wir einen *Homomorphismus*, wenn ϕ homogen vom Grad 0 ist. Wie gewohnt ist ein Isomorphismus ein bijektiver Homomorphismus und ein Automorphismus ein Isomorphismus in $\mathrm{L}(V)$.

Bemerkung: Für die Elemente von $\mathrm{L}(V)$ verwenden wir **nicht** die Bezeichnung *Endomorphismen*, um nicht den Eindruck zu erwecken, alle Elemente von $\mathrm{L}(V)$ seien homogen vom Grad 0.

1.4 Lineare Operatoren in $\mathbb{Z}_2$-graduierten Vektorräumen

Sei $V = V_{[0]} \oplus V_{[1]}$ ein $\mathbb{Z}_2$-graduierter K-Vektorraum, $\dim V = (m, n)$ endlich. Der Vektorraum $\mathrm{L}(V)$ der linearen Abbildungen von V auf sich ist dann eine Superalgebra mit:

- $\mathrm{L}_{[0]}(V) = \{\phi \in \mathrm{L}(V) \mid \phi(V_{[0]}) \subset V_{[0]} \text{ und } \phi(V_{[1]}) \subset V_{[1]}\}$,
- $\mathrm{L}_{[1]}(V) = \{\phi \in \mathrm{L}(V) \mid \phi(V_{[0]}) \subset V_{[1]} \text{ und } \phi(V_{[1]}) \subset V_{[0]}\}$.

Bemerkung: Besitzt V eine triviale $\mathbb{Z}_2$-Graduierung mit $V_{[0]} = \{0\}$ oder $V_{[1]} = \{0\}$, so ist $\mathrm{L}_{[1]}(V) = \{0\}$ und daher $\mathrm{L}(V) \cong \mathrm{L}_{[0]}(V)$.

Im folgenden wollen wir die Superalgebra $\mathrm{L}(V)$ der linearen Abbildungen etwas genauer betrachten.

Jedes $x \in V$ läßt sich in eindeutiger Weise schreiben* als $x = x_0 + x_1 \mathrel{\widehat{=}} (x_0, x_1)$, daher hat jeder lineare Operator $A \in \mathrm{L}(V)$ eine natürliche Darstellung

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{pmatrix}, \qquad Ax = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{00}x_0 + A_{01}x_1 \\ A_{10}x_0 + A_{11}x_1 \end{pmatrix}$$

mit:

$$\begin{aligned} A_{00} &\in \mathrm{L}(V_{[0]}, V_{[0]}), & A_{01} &\in \mathrm{L}(V_{[1]}, V_{[0]}), \\ A_{10} &\in \mathrm{L}(V_{[0]}, V_{[1]}), & A_{11} &\in \mathrm{L}(V_{[1]}, V_{[1]}). \end{aligned}$$

Bezüglich dieser Darstellung gilt:

- $\mathrm{L}_{[0]}(V) = \left\{ \begin{pmatrix} A_{00} & 0 \\ 0 & A_{11} \end{pmatrix} \;\middle|\; A_{00} \in \mathrm{L}(V_{[0]}) \text{ und } A_{11} \in \mathrm{L}(V_{[1]}) \right\}$,
- $\mathrm{L}_{[1]}(V) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A_{01} \\ A_{10} & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; A_{01} \in \mathrm{L}(V_{[1]}, V_{[0]}) \text{ und } A_{10} \in \mathrm{L}(V_{[0]}, V_{[1]}) \right\}$.

Wählt man eine feste Basis von V in Standardform, so läßt sich jeder lineare Operator A durch eine Matrix M_A beschreiben, die die Form einer Blockmatrix hat:

$$M_A = \begin{pmatrix} M_{00} & M_{01} \\ M_{10} & M_{11} \end{pmatrix} \in K^{(m+n, m+n)}.$$

Die Superalgebra dieser Matrizen bezeichnen wir mit $\mathrm{Mat}(m, n)$, die $\mathbb{Z}_2$-Graduierung überträgt sich dabei von $\mathrm{L}(V)$.

Bei der Abbildung $\mathrm{L}(V) \to \mathrm{Mat}(m, n)$, $A \mapsto M_A$ handelt es sich um einen Isomorphismus von Superalgebren.

*In einem $\mathbb{Z}_2$-graduierten Vektorraum V schreiben wir die homogenen Komponenten eines Elementes $x \in V$ aus Gründen der Übersichtlichkeit als x_0 bzw. x_1 anstelle von $x_{[0]}$ bzw. $x_{[1]}$.

2 Super-Lie-Algebren

In diesem Kapitel stellen wir den Begriff einer Super-Lie-Algebra* vor. Dabei legen wir stets einen Körper K mit $\mathrm{char}(K) = 0$ zugrunde; alle Vektorräume seien K-Vektorräume. Da die Definition einer Super-Lie-Algebra eine Verallgemeinerung der Definition einer Lie-Algebra darstellt, erinnern wir zunächst an letztere:

Definition 8: *Eine **Lie-Algebra** ist ein Vektorraum $\mathfrak{L}$ mit einer bilinearen Abbildung $[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$, $(x,y) \mapsto [x,y]$, so daß für alle $x,y,z \in \mathfrak{L}$ gilt:*

(a) $[x,y] = -[y,x]$,

(b) $\big[x,[y,z]\big] + \big[y,[z,x]\big] + \big[z,[x,y]\big] = 0.$
(Jacobi-Identität)

*Die bilineare Abbildung $[\cdot,\cdot]$ heißt **(Lie-)Klammer** oder **Kommutator**.*

Weiter gehen wir auf Lie-Algebren nicht ein, da viele Begriffe für diese genauso definiert sind wie für Super-Lie-Algebren.

Im folgenden führen wir zunächst diverse grundlegende Begriffe für Super-Lie-Algebren ein. Zum Abschluß behandeln wir noch auflösbare und nilpotente Super-Lie-Algebren.

2.1 Grundlegendes über Super-Lie-Algebren

2.1.1 Definition und Zusammenhang mit Superalgebren

Die Definition einer Super-Lie-Algebra weicht im Prinzip nicht sehr von der Definition einer Lie-Algebra ab. Ein wesentlicher Unterschied besteht darin, daß man für eine Super-Lie-Algebra stets einen $\mathbb{Z}_2$-graduierten Vektorraum $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]} \oplus \mathfrak{g}_{[1]}$ voraussetzt, auf dem eine Paritätsfunktion α wie in Definition 3 gegeben ist. Diese Paritätsfunktion beeinflußt eine auf $\mathfrak{g}$ definierte Klammer, die ähnlich wie bei einer Lie-Algebra gegeben ist:

Definition 9: *Ein $\mathbb{Z}_2$-graduierter Vektorraum $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]} \oplus \mathfrak{g}_{[1]}$ mit einer bilinearen Abbildung $[\cdot,\cdot]\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $(x,y) \mapsto [x,y]$ heißt **Super-Lie-Algebra**, wenn für homogene Elemente $x,y,z \in \mathfrak{g}$ gilt:*

*In der Literatur findet man für Super-Lie-Algebren meistens die Bezeichnung *Lie-Superalgebren*. Ein anderer Name, der vor allem in älterer Literatur verwendet wird, ist *($\mathbb{Z}_2$-)graduierte Lie-Algebra*, obwohl es sich nicht um Lie-Algebren handelt.

Die Bezeichnungen *Super-Lie-Algebra* und *Lie-Superalgebra* wurden von Physikern geprägt und gehen auf die Anwendung von Super-Lie-Algebren bei der Beschreibung der *Supersymmetrie* zurück.

(a) $[\mathfrak{g}_\nu, \mathfrak{g}_\mu] \subset \mathfrak{g}_{\nu+\mu}$ *für* $\nu,\ \mu \in \mathbb{Z}_2$,

(b) $[x,y] = -(-1)^{\alpha(x)\alpha(y)}[y,x]$,

(c) $(-1)^{\alpha(x)\alpha(z)}\big[x,[y,z]\big] + (-1)^{\alpha(y)\alpha(x)}\big[y,[z,x]\big] + (-1)^{\alpha(z)\alpha(y)}\big[z,[x,y]\big] = 0.$
(Jacobi-Identität)

Die bilineare Abbildung $[\cdot,\cdot]$ *wird als* ***Superkommutator*** *bezeichnet.*

Bemerkung: Mit dieser Definition ist der Unterraum $\mathfrak{g}_{[0]}$ eine Lie-Algebra.

Bemerkung: Jede Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist auch eine Super-Lie-Algebra via $\mathfrak{g} \oplus \{0\}$. Alle Aussagen über Super-Lie-Algebren gelten damit auch für Lie-Algebren.

Umgekehrt läßt sich eine Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]} \oplus \mathfrak{g}_{[1]}$ als eine Lie-Algebra ansehen, wenn $\big[\mathfrak{g}_{[1]}, \mathfrak{g}_{[1]}\big] = \{0\}$ ist. Der Superkommutator besitzt dann nämlich alle Eigenschaften eines gewöhnlichen Kommutators.

Daher stellen Super-Lie-Algebren eine Verallgemeinerung des Begriffs einer Lie-Algebra dar.

Die obige Definition einer Super-Lie-Algebra liefert zwei wichtige elementare Aussagen: Aus der Bedingung (a) folgt für die Paritätsfunktion:

$$\alpha\big([x,y]\big) = \alpha(x) + \alpha(y) \quad \text{für homogene } x,\ y \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}.$$

Daneben liefert die Jacobi-Identität (c) mit Hilfe der Bedingung (b) folgendes:

Lemma 1: *Für homogene Elemente* x, y, z *einer Super-Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ *gilt:*

$$\big[x,[y,z]\big] = (-1)^{\alpha(x)\alpha(y)}\big[y,[x,z]\big] + \big[[x,y],z\big].$$

Super-Lie-Algebren hängen mit den in Abschnitt 1.2 vorgestellten Superalgebren zusammen, denn jede Superalgebra wird durch Einführung einer geeigneten bilinearen Abbildung $[\cdot,\cdot]$ zu einer Super-Lie-Algebra. Für eine Superalgebra $A = A_{[0]} \oplus A_{[1]}$ setzen wir:

$$[x,y] := xy - (-1)^{\alpha(x)\alpha(y)}yx \quad \text{für homogene } x,y \in A. \tag{1}$$

Dieses bezeichnen wir im folgenden als *kanonischen Superkommutator*, denn elementares Nachrechnen mit Hilfe von Lemma 1 liefert:

Lemma 2: *Die bilineare Abbildung, die durch Gleichung* (1) *gegeben ist, erfüllt alle Eigenschaften eines Superkommutators in Definition 9.*

Der kanonische Superkommutator läßt sich insbesondere für die linearen Abbildungen eines $\mathbb{Z}_2$-graduierten Vektorraumes V definieren. Die Superalgebra $\mathrm{L}(V)$ dieser linearen Abbildungen wird damit zu einer Super-Lie-Algebra, welche wir mit $\mathfrak{gl}(V)$ bezeichnen.

Als Vektorraum V kann man auch speziell eine Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ wählen. Die linearen Abbildungen von $\mathfrak{g}$ bilden dann mit dem kanonischen Superkommutator die Super-Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Bemerkung: Bei trivialer $\mathbb{Z}_2$-Graduierung eines Vektorraumes V (d. h. $V_{[0]} = \{0\}$ oder $V_{[1]} = \{0\}$) ist stets $\mathrm{L}_{[1]}(V) = \big(\mathfrak{gl}(V)\big)_{[1]} = \{0\}$. Deswegen läßt sich dann die Super-Lie-Algebra $\mathfrak{gl}(V)$ als Lie-Algebra auffassen.

2.1.2 Super-Lie-Unteralgebren, Ideale und Quotienten

Definition 10: *Ein graduierter Untervektorraum $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{[0]} \oplus \mathfrak{h}_{[1]}$ einer Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt **Super-Lie-Unteralgebra**, wenn für beliebige $x, y \in \mathfrak{h}$ stets $[x, y] \in \mathfrak{h}$ gilt.*

Bemerkung: Nach dieser Definition ist eine eindimensionale Super-Lie-Unteralgebra $\mathfrak{h}$ stets homogen, d. h. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_{[0]}$ oder $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_{[1]}$.

Definition 11: *Ein beliebiger Untervektorraum $\mathfrak{h}$ einer Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist ein **Ideal**, falls für alle $g \in \mathfrak{g}$, $h \in \mathfrak{h}$ gilt: $[g, h] \in \mathfrak{h}$. Wenn $\mathfrak{h}$ zusätzlich ein graduierter Untervektorraum ist, also $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{[0]} \oplus \mathfrak{h}_{[1]}$, dann nennt man $\mathfrak{h}$ ein **graduiertes Ideal**.*

Für zwei Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ einer Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sind stets auch die folgenden Mengen Ideale:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} + \mathfrak{b} &:= \{a + b \mid a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}\}, \\ \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} &:= \{x \in \mathfrak{g} \mid x \in \mathfrak{a} \text{ und } x \in \mathfrak{b}\}, \\ [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] &:= \Big\{ \sum_i^{<\infty} [a_i, b_i] \;\Big|\; a_i \in \mathfrak{a}, b_i \in \mathfrak{b} \Big\}. \end{aligned}$$

Diese sind sogar graduierte Ideale, wenn die Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ jeweils graduiert sind.

Bemerkung: Ein graduiertes Ideal $\mathfrak{h}$ ist stets auch eine Super-Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ und wegen der Eigenschaften des Superkommutators immer ein zweiseitiges Ideal. Im folgenden werden wir stets, wenn von Idealen die Rede ist, graduierte Ideale meinen.

Beispiele für graduierte Ideale einer Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$:

- das Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) := \{z \in \mathfrak{g} \mid [z, g] = 0 \text{ für alle } g \in \mathfrak{g}\}$,
- das derivierte Ideal $\mathfrak{D}\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \Big\{ \sum_i^{<\infty} [x_i, y_i] \;\Big|\; x_i, y_i \in \mathfrak{g} \Big\}$.

Daß es sich um Ideale handelt, ist klar. Wir überprüfen explizit, daß diese Ideale auch graduiert sind:

ad $\mathfrak{D}\mathfrak{g}$*:* Es genügt, den Beweis für $z := [x, y]$ anzugeben. Seien also $x, y \in \mathfrak{g}$ mit $x = x_0 + x_1$, $y = y_0 + y_1$. Es gilt:

$$z = [x, y] = \underbrace{[x_0, y_0] + [x_1, y_1]}_{\in \mathfrak{g}_{[0]}} + \underbrace{[x_0, y_1] + [x_1, y_0]}_{\in \mathfrak{g}_{[1]}} = z_0 + z_1;$$

dabei sind $z_0 := [x_0, y_0] + [x_1, y_1]$ und $z_1 := [x_0, y_1] + [x_1, y_0]$ die homogenen Komponenten von z. Da $z_0 \in \mathfrak{D}\mathfrak{g}$ und $z_1 \in \mathfrak{D}\mathfrak{g}$, ist $\mathfrak{D}\mathfrak{g}$ ein graduiertes Ideal.

ad $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$*:* Sei $x \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, $x = x_0 + x_1$. Für $y_0 \in \mathfrak{g}_{[0]} \subset \mathfrak{g}$ ist dann:

$$0 = [x, y_0] = \underbrace{[x_0, y_0]}_{\in \mathfrak{g}_{[0]}} + \underbrace{[x_1, y_0]}_{\in \mathfrak{g}_{[1]}}.$$

Da ein $z_0 \in \mathfrak{g}_{[0]} \setminus \{0\}$ und ein $z_1 \in \mathfrak{g}_{[1]} \setminus \{0\}$ stets linear unabhängig sind, folgt:

$$[x_0, y_0] = 0 \text{ und } [x_1, y_0] = 0.$$

Analog erhält man für $y_1 \in \mathfrak{g}_{[1]} \subset \mathfrak{g}$: $[x_0, y_1] = 0 = [x_1, y_1]$. Insgesamt ergibt sich damit: $x_0 \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ und $x_1 \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. ∎

Definition 12: *Eine Super-Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ *heißt* ***abelsch*** *oder* ***kommutativ****, wenn gilt:* $\mathfrak{D}\mathfrak{g} = \{0\}$*, also* $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

Eine Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ *heißt* ***einfach****, wenn* $\mathfrak{g}$ *nicht kommutativ ist und keine echten Ideale außer dem Nullideal* $\langle 0 \rangle$ *besitzt.*

Für eine einfache Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ gilt also: $\mathfrak{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) = \langle 0 \rangle$.

Bemerkung: Eindimensionale Super-Lie-Algebren sind stets abelsch.

Mit Hilfe von graduierten Idealen lassen sich auch Quotienten-Algebren definieren. Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]} \oplus \mathfrak{g}_{[1]}$ eine Super-Lie-Algebra und $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ein graduiertes Ideal in $\mathfrak{g}$. Der Quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{a} := \{x + \mathfrak{a} \mid x \in \mathfrak{g}\}$ ist ein $\mathbb{Z}_2$-graduierter Vektorraum mit

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})_\nu = \{x + \mathfrak{a} \mid x + \mathfrak{a} \text{ hat einen Repräsentanten in } \mathfrak{g}_\nu\}, \; \nu \in \mathbb{Z}_2.$$

Denn außer der Nullklasse enthält keine Klasse homogene Repräsentanten aus $\mathfrak{g}_{[0]}$ und $\mathfrak{g}_{[1]}$. Auf dem Quotienten $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ definieren wir nun eine bilineare Abbildung $[\cdot, \cdot] \colon \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ durch

$$[x + \mathfrak{a}, y + \mathfrak{a}] := [x, y] + \mathfrak{a},$$

wobei $[x, y]$ durch den Superkommutator auf $\mathfrak{g}$ gegeben ist. Da sich dessen Eigenschaften auf die bilineare Abbildung $[\cdot, \cdot]$ übertragen, erhalten wir damit einen Superkommutator auf $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Die Wohldefiniertheit der Abbildung $[\cdot, \cdot]$ ergibt sich dabei aus der Definition des graduierten Ideals.

2.1.3 Homomorphismen

Definition 13: *Seien* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]} \oplus \mathfrak{g}_{[1]}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{[0]} \oplus \mathfrak{h}_{[1]}$ *Super-Lie-Algebren. Eine lineare Abbildung* $\phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *heißt* ***(Super-Lie-Algebren)-Homomorphismus****, wenn gilt:*

$$\phi(\mathfrak{g}_\nu) \subset \mathfrak{h}_\nu, \quad \nu \in \mathbb{Z}_2, \textit{ d. h. homogen vom Grad } [0],$$
$$\phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)] \quad \textit{für alle } x, y \in \mathfrak{g}.$$

Bemerkung: Der Kern $\operatorname{Ker}\phi$ des Homomorphismus ϕ ist ein Ideal in $\mathfrak{g}$, denn für $x \in \operatorname{Ker}\phi$ und beliebiges $y \in \mathfrak{g}$ folgt:

$$\phi([x,y]) = \big[\phi(x), \phi(y)\big] = \big[0, \phi(y)\big] = 0.$$

Es gilt sogar: $\operatorname{Ker}\phi$ ist ein graduiertes Ideal, denn für $x \in \operatorname{Ker}\phi$ mit $x = x_0 + x_1$ folgt:

$$0 = \phi(x) = \underbrace{\underbrace{\phi(x_0)}_{\in \mathfrak{h}_{[0]}} + \underbrace{\phi(x_1)}_{\in \mathfrak{h}_{[1]}}}_{\text{lin. unabh., falls beide} \neq 0} \implies \phi(x_0) = 0 \text{ und } \phi(x_1) = 0.$$

Beispiel: *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine Super-Lie-Algebra,* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ *ein graduiertes Ideal. Die kanonische Projektion* $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, $g \mapsto g + \mathfrak{a}$ *ist ein Homomorphismus.*

Wie in anderen algebraischen Theorien gelten auch hier der Homomorphiesatz und die Isomorphiesätze; die Beweise lassen sich analog führen und werden von uns daher übergangen.

Satz 1 (Homomorphiesatz)**:** *Seien* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ *zwei Super-Lie-Algebren,* $\phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *ein Homomorphismus. Sei* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ *ein graduiertes Ideal mit* $\mathfrak{a} \subset \operatorname{Ker}\phi$*. Sei* $\pi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ *die kanonische Projektion. Dann existiert ein eindeutiger Super-Lie-Algebren-Homomorphismus* $\psi\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \to \mathfrak{h}$*, so daß folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathfrak{h} \\
& \mathfrak{g}/\mathfrak{a} \arrow[ur, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Bemerkung: Insbesondere gilt stets: $\mathfrak{g}/\operatorname{Ker}\phi \cong \operatorname{Bild}\phi$.

Satz 2 (Isomorphiesatz)**:** *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine Super-Lie-Algebra.*

I: *Sind* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *graduierte Ideale in* $\mathfrak{g}$ *mit* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$*, dann ist* $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ *ein graduiertes Ideal von* $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$*, und* $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})/(\mathfrak{b}/\mathfrak{a})$ *ist isomorph zu* $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$*.*

II: *Sind* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *graduierte Ideale in* $\mathfrak{g}$*, dann ist* $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ *isomorph zu* $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$*.*

2.1.4 Superderivationen und Darstellungen

Definition 14: *Sei $\mathfrak{g}$ eine Super-Lie-Algebra. Eine lineare Abbildung $D \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ mit homogenen Komponenten D_0, D_1 heißt* ***Superderivation****, wenn für homogenes $x \in \mathfrak{g}$ und beliebiges $y \in \mathfrak{g}$ gilt:*

$$D_\nu([x,y]) = \big[D_\nu(x), y\big] + (-1)^{\alpha(x)\alpha(D_\nu)}\big[x, D_\nu(y)\big], \quad \nu \in \mathbb{Z}_2.$$

Der Untervektorraum der Superderivationen in $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ wird mit $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ bezeichnet.

$\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ ist sogar eine Super-Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, denn es gilt:

Lemma 3: *Seien A, B homogene Elemente in $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$. Dann ist*

$$\big[A, B\big] = AB - (-1)^{\alpha(A)\alpha(B)}BA \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}).$$

Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen.

Definition 15: *Sei $\mathfrak{g}$ eine Super-Lie-Algebra, V ein $\mathbb{Z}_2$-graduierter Vektorraum. Eine* ***Darstellung*** *von $\mathfrak{g}$ auf V ist ein Super-Lie-Algebren-Homomorphismus $\phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$. Ist ϕ injektiv, so heißt die Darstellung* ***treu****.*

Man bezeichnet dann V auch als $\mathfrak{g}$-*Modul*; und für die Operation von $\mathfrak{g}$ auf V schreiben wir $g.v := \phi(g)(v)$ mit $g \in \mathfrak{g}$, $v \in V$.

Ein $\mathbb{Z}_2$-graduierter Untervektorraum $U \subset V$, der bezüglich der Operation von $\mathfrak{g}$ abgeschlossen ist, heißt ein *Untermodul* von V. Besitzt V keine echten Untermoduln außer dem Nullmodul, so nennt man die Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf V *irreduzibel*.

Bemerkung: Ist V ein $\mathfrak{g}$-Modul mit trivialer $\mathbb{Z}_2$-Graduierung (d. h. $V_{[0]} = \{0\}$ oder $V_{[1]} = \{0\}$), so läßt sich $\mathfrak{gl}(V)$ wegen $(\mathfrak{gl}(V))_{[1]} = \{0\}$ als eine Lie-Algebra ansehen. Dann ist $\phi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(V)$ ebenfalls eine Lie-Algebra, und man hat $\phi(\mathfrak{g}_{[1]}) = \{0\}$.

Für ein festes $x \in \mathfrak{g}$ definieren wir nun eine lineare Abbildung $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ mit $\mathrm{ad}(x)(y) := [x, y]$ für alle $y \in \mathfrak{g}$.

Lemma 4: *Für die lineare Abbildung* ad *gilt*
I: ad *ist eine Darstellung;*
II: *für jedes $x \in \mathfrak{g}$ ist $\mathrm{ad}(x) \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.*

Beweis: ad I: Seien $x, y, z \in \mathfrak{g}$ homogen. Mit der Jacobi-Identität aus Lemma 1 folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}([x,y])(z) &= \big[[x,y],z\big] = \big[x,[y,z]\big] - (-1)^{\alpha(x)\alpha(y)}\big[y,[x,z]\big] \\ &= \Big(\mathrm{ad}(x)\mathrm{ad}(y) - (-1)^{\alpha(x)\alpha(y)}\mathrm{ad}(y)\mathrm{ad}(x)\Big)(z) \\ &= \big[\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y)\big](z). \end{aligned}$$

ad II: Für homogene $x, y, z \in \mathfrak{g}$ folgt wie eben mit Lemma 1:

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(x)([y,z]) &= \big[x,[y,z]\big] = \big[[x,y],z\big] + (-1)^{\alpha(x)\alpha(y)}\big[y,[x,z]\big] \\ &= \big[\mathrm{ad}(x)(y),z\big] + (-1)^{\alpha(\mathrm{ad}(x))\alpha(y)}\big[y,\mathrm{ad}(x)(z)\big]. \end{aligned}$$ ■

Die lineare Abbildung ad wird als *adjungierte Darstellung* bezeichnet. Superderivationen dieser Form werden *innere Superderivationen* genannt; sie bilden eine Super-Lie-Unteralgebra in der Super-Lie-Algebra $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ der Superderivationen, denn nach dem Beweis von Lemma 4 (I) gilt: $\big[\mathrm{ad}(x),\mathrm{ad}(y)\big] = \mathrm{ad}([x,y])$ für homogene $x, y \in \mathfrak{g}$.

Bemerkung: Der Kern von ad ist das Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ von $\mathfrak{g}$. Falls $\mathfrak{g}$ eine einfache Super-Lie-Algebra ist, ist ad also stets injektiv, d. h. ad ist dann eine treue Darstellung. Ist $\mathfrak{g}$ kommutativ, so ist $\mathrm{ad} \equiv 0$.

Wir werden später zeigen, daß jede endlichdimensionale Super-Lie-Algebra eine treue Darstellung hat (☞ Abschnitt 4.2 auf Seite 69).

2.1.5 Erweiterungen des Grundkörpers

Sei $L \supset K$ eine Körpererweiterung, V ein Vektorraum über K. Das Tensorprodukt $V_L := L \otimes_K V$ von L mit V wird zu einen L-Vektorraum, indem wir die Multiplikation mit L-Skalaren wie folgt definieren (vgl. Knapp, 2002, S. 34):

$$\text{Für } c \in L \text{ und } (\tilde{c} \otimes v) \in L \otimes_K V \text{ setzen wir:} \quad c \cdot (\tilde{c} \otimes v) := (c\tilde{c} \otimes v).$$

Ist V dabei ein $\mathbb{Z}_2$-graduierter Vektorraum mit $V = V_{[0]} \oplus V_{[1]}$, so ist auch V_L $\mathbb{Z}_2$-graduiert mit $(V_L)_\nu = L \otimes_K V_\nu = (V_\nu)_L$, $\nu \in \mathbb{Z}_2$.

Für eine Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ über K wird der L-Vektorraum $\mathfrak{g}_L = L \otimes_K \mathfrak{g}$ zu einer Super-Lie-Algebra, indem wir auf dem Tensorprodukt $L \otimes_K \mathfrak{g}$ folgende Klammer definieren:

$$[a \otimes g, b \otimes h] := ab \otimes [g,h] \quad \text{für alle } a, b \in L,\, g, h \in \mathfrak{g}.$$

Die Eigenschaften eines Superkommutators folgen dabei unmittelbar aus dem Superkommutator von $\mathfrak{g}$.

Falls $K = \mathbb{R}$ und $L = \mathbb{C}$, so nennt man $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ die *Komplexifizierung* von $\mathfrak{g}$.

2.2 Super-Lie-Algebren der Dimension 2

Um einen ersten Eindruck von Super-Lie-Algebren zu vermitteln, klassifizieren wir an dieser Stelle alle zweidimensionalen Super-Lie-Algebren. Später werden uns die hier behandelten Super-Lie-Algebren mehrfach wieder begegnen.

Sei also $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]} \oplus \mathfrak{g}_{[1]}$ eine zweidimensionale Super-Lie-Algebra. Es können dann die folgenden Fälle auftreten:

- $\dim \mathfrak{g}_{[0]} = 2, \dim \mathfrak{g}_{[1]} = 0$

  Wir sind reduziert auf den Lie-Algebra-Fall. Da dann für jedes $z \in \mathfrak{g}_{[0]}$ stets $[z, z] = 0$ ist, gibt es hier für die Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]}$ zwei Möglichkeiten: Entweder ist $\mathfrak{g}$ abelsch oder man kann eine Basis $\{x, y\}$ finden, für die $[x, y] = x$ ist.

- $\dim \mathfrak{g}_{[0]} = 0, \dim \mathfrak{g}_{[1]} = 2$

  Wegen $\left[\mathfrak{g}_{[1]}, \mathfrak{g}_{[1]}\right] \subset \mathfrak{g}_{[0]} = \{0\}$ erhalten wir in diesem Fall eine abelsche Super-Lie-Algebra. Da die besonderen Eigenschaften des Superkommutators dabei keine weitere Rolle spielen, können wir $\mathfrak{g}$ hier auch als eine abelsche Lie-Algebra auffassen.

- $\dim \mathfrak{g}_{[0]} = 1, \dim \mathfrak{g}_{[1]} = 1$

  Es gibt hier drei unterschiedliche Fälle:

  (I) $\mathfrak{g}$ abelsch, d. h. $\mathfrak{D}\mathfrak{g} = \langle 0 \rangle$;

  (II) $\mathfrak{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[1]}$;

  (III) $\mathfrak{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]}$.

  Denn sei $\{e_0, e_1\}$ eine homogene Basis von $\mathfrak{g}$ in Standardform. Es sei daran erinnert, daß stets $[e_0, e_0] = 0$ ist. Für die anderen Kommutatoren gelte:

  $$[e_0, e_1] = \mu \cdot e_1, \qquad [e_1, e_1] = \lambda \cdot e_0.$$

  Mit der Jacobi-Identität ergibt sich:

  $$0 = \left[e_1, [e_1, e_1]\right] = [e_1, \lambda \cdot e_0] = -\mu\lambda \cdot e_1.$$

  Damit verbleiben nur die folgenden Möglichkeiten:

  – Falls $\mu = 0$ und $\lambda = 0$, ist $\mathfrak{g}$ abelsch.
  – Mit $\mu \neq 0$ und $\lambda = 0$ erhält man den Fall (II): $\mathfrak{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[1]}$.
  – Aus $\mu = 0$ und $\lambda \neq 0$ folgt der Fall (III): $\mathfrak{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]}$.

  In den Fällen (I) und (II) ist jeweils $\left[\mathfrak{g}_{[1]}, \mathfrak{g}_{[1]}\right] = \{0\}$; wir können dann die Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auch als Lie-Algebra auffassen.

Für die beiden letzten Fälle geben wir noch jeweils eine nichttriviale Darstellung auf einem $\mathbb{Z}_2$-graduierten K-Vektorraum der Dimension $(1,1)$ an. Es reicht dafür, die Bilder der Basisvektoren e_0 und e_1 festzulegen:

(II) $\dim \mathfrak{g} = (1,1)$ mit $\mathfrak{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[1]}$:

$$e_0 \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} \frac{\mu}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix}; \qquad e_1 \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(III) $\dim \mathfrak{g} = (1,1)$ mit $\mathfrak{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]}$:

$$e_0 \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad e_1 \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Außer im letzten Fall ($\dim(\mathfrak{g}) = (1,1)$ und $\mathfrak{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]}$) läßt sich $\mathfrak{g}$ wegen $\left[\mathfrak{g}_{[1]}, \mathfrak{g}_{[1]}\right] = \{0\}$ auch als Lie-Algebra ansehen. Eine „echte“ zweidimensionale Super-Lie-Algebra erhalten wir also nur bei $\dim(\mathfrak{g}) = (1,1)$ und $\mathfrak{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]}$, denn für diese ist $[e_1, e_1] = \lambda \cdot e_0 \neq 0$.

2.3 $\mathbb{Z}$-Graduierung und Filtrierungen

Wir führen in diesem Abschnitt die Begriffe der $\mathbb{Z}$-Graduierung und der Filtrierung einer Super-Lie-Algebra ein. Beide Begriffe hängen eng miteinander zusammen, denn jede $\mathbb{Z}$-graduierte Super-Lie-Algebra besitzt eine kanonische Filtrierung, während man zu jeder filtrierten Super-Lie-Algebra auf natürliche Weise eine zugehörige $\mathbb{Z}$-graduierte Super-Lie-Algebra konstruieren kann. Die Ergebnisse dieses Abschnitts werden wir an späterer Stelle benötigen, um den Satz von Kac für auflösbare Super-Lie-Algebren zu zeigen (☞ Abschnitt 2.4.3 auf Seite 28). Als Grundlage dienen uns hier zwei Artikel von Kac (1977a, b) sowie ergänzend das Buch von Scheunert (1979).

2.3.1 $\mathbb{Z}$-graduierte Super-Lie-Algebren

Definition 16: *Eine Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt $\mathbb{Z}$-**graduiert**, wenn eine Familie $(\mathfrak{g}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ von $\mathbb{Z}_2$-graduierten Untervektorräumen $\mathfrak{g}_i$ existiert, so daß gilt:*

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i \qquad \text{und} \qquad [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j} \quad \text{für alle } i, j \in \mathbb{Z}.$$

*Die $\mathbb{Z}$-Graduierung von $\mathfrak{g}$ bezeichnet man als **konsistent** (mit der $\mathbb{Z}_2$-Graduierung), wenn $\mathfrak{g}_{[0]} = \bigoplus \mathfrak{g}_{2i}$ und $\mathfrak{g}_{[1]} = \bigoplus \mathfrak{g}_{2i+1}$ ist.*

Bemerkung: In einer $\mathbb{Z}$-graduierten Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$ ist damit $\mathfrak{g}_0$ eine Super-Lie-Unteralgebra. Wegen $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_i$ für alle i erhält man durch Einschränkung der adjungierten Darstellung ad auf $\mathfrak{g}_0$ eine Darstellung von $\mathfrak{g}_0$ auf den $\mathfrak{g}_i$.

Eine $\mathbb{Z}$-graduierte Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$ heißt:

- *irreduzibel*, wenn die Darstellung von $\mathfrak{g}_0$ auf $\mathfrak{g}_{-1}$ irreduzibel ist;
- *transitiv*, wenn für $a \in \mathfrak{g}_i$, $i \geq 0$, gilt:
$$[a, \mathfrak{g}_{-1}] = \{0\} \quad \Rightarrow \quad a = 0;$$
- *bitransitiv*, wenn $\mathfrak{g}$ transitiv ist und für $a \in \mathfrak{g}_i$, $i \leq 0$, zusätzlich gilt:
$$[a, \mathfrak{g}_1] = \{0\} \quad \Rightarrow \quad a = 0.$$

Unter den linearen Abbildungen zwischen $\mathbb{Z}$-graduierten Super-Lie-Algebren zeichnen sich diejenigen aus, die sowohl die $\mathbb{Z}_2$- als auch die $\mathbb{Z}$-Graduierung erhalten, also $\mathbb{Z}_2$-homogen vom Grad $[0]$ und $\mathbb{Z}$-homogen vom Grad 0 sind. Wir setzen daher:

Definition 17: *Seien $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{h}_i$ zwei $\mathbb{Z}$-graduierte Super-Lie-Algebren. Ein Super-Lie-Algebren-Homomorphismus $\phi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ heißt ein **Homomorphismus zwischen $\mathbb{Z}$-graduierten Super-Lie-Algebren**, wenn er zusätzlich $\mathbb{Z}$-homogen vom Grad 0 ist, also wenn für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt: $\phi(\mathfrak{g}_i) \subset \mathfrak{h}_i$.*

Ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{Z}$-graduierten Super-Lie-Algebren ist dann ein Super-Lie-Algebren-Isomorphismus, der $\mathbb{Z}$-homogen vom Grad 0 ist. Unter einem Isomorphismus zwischen $\mathbb{Z}$-graduierten Super-Lie-Algebren übertragen sich die oben genannten Eigenschaften *irreduzibel*, *transitiv* und *bitransitiv*.

2.3.2 Filtrierungen

Definition 18: *Sei $\mathfrak{g}$ eine Super-Lie-Algebra. Eine Familie $(\mathfrak{h}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ von $\mathbb{Z}_2$-graduierten Untervektorräumen von $\mathfrak{g}$ heißt **Filtrierung**, wenn gilt:*

(F1) $\mathfrak{h}_i \supset \mathfrak{h}_{i+1}$ *für alle* $i \in \mathbb{Z}$,

(F2) $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{g}$ *für alle* $i \leq -1$,

(F3) $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_j] \subset \mathfrak{h}_{i+j}$,

(F4) $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{h}_i = \{0\}$.

Bemerkung: Aus (F1) und (F3) folgt, daß die Unterräume $\mathfrak{h}_i$ einer Filtrierung stets Super-Lie-Unteralgebren von $\mathfrak{g}$ sind. Ebenso erhält man: Jedes $\mathfrak{h}_i$ mit $i \geq 0$ ist ein graduiertes Ideal in allen $\mathfrak{h}_k$ mit $0 \leq k \leq i$. Es gilt außerdem stets:

$$\left[\mathfrak{h}_{i+1}, \mathfrak{g}\right] = \left[\mathfrak{h}_{i+1}, \mathfrak{h}_{-1}\right] \subset \mathfrak{h}_i. \tag{2}$$

Definition 19: *Eine Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit Filtrierung $(\mathfrak{h}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ heißt **transitiv**, wenn für jedes $a \in \mathfrak{h}_i \setminus \mathfrak{h}_{i+1}$, $i \geq 0$, ein $g \in \mathfrak{g}$ existiert, so daß gilt: $[a, g] \notin \mathfrak{h}_i$. Die Filtrierung von $\mathfrak{g}$ nennen wir dann ebenfalls **transitiv**.*

Wie der Begriff einer *transitiven* filtrierten Super-Lie-Algebra mit dem einer *transitiven* $\mathbb{Z}$-graduierten Super-Lie-Algebra zusammenhängt, werden wir später darlegen (☞ Lemma 8 auf Seite 20).

Eine transitive Filtrierung läßt sich auch auf andere Weise beschreiben; das folgende Lemma liefert eine äquivalente Aussage:

Lemma 5: *Für eine filtrierte Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit Filtrierung $(\mathfrak{h}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ gilt:*

$$\mathfrak{g} \textit{ transitiv} \iff \mathfrak{h}_{i+1} = \{a \in \mathfrak{h}_i \mid [a, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}_i\} \textit{ für alle } i \geq 0.$$

Beweis: „$\Rightarrow$“: Nach obiger Bemerkung ist jedenfalls $\mathfrak{h}_{i+1} \subset \{a \in \mathfrak{h}_i \mid [a, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}_i\}$. Falls diese Inklusion echt ist, gibt es ein $a \in \mathfrak{h}_i \setminus \mathfrak{h}_{i+1}$ mit $[a, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}_i$. Nach Definition einer transitiven Filtrierung existiert aber ein $g \in \mathfrak{g}$, so daß $[a, g] \notin \mathfrak{h}_i$. $\lightning$

Damit gilt: $\mathfrak{h}_{i+1} = \{a \in \mathfrak{h}_i \mid [a, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}_i\}$.

„$\Leftarrow$“: Sei $a \in \mathfrak{h}_i \setminus \mathfrak{h}_{i+1}$ für ein $i \geq 0$. Dann ist $[a, \mathfrak{g}] \not\subset \mathfrak{h}_i$, d. h. es gibt ein $g \in \mathfrak{g}$ mit $[a, g] \notin \mathfrak{h}_i$. Also ist $\mathfrak{g}$ transitiv. ■

Mit Hilfe des Lemmas 5 lassen sich nun transitive Filtrierungen konstruieren:

Lemma 6: *Sei $\mathfrak{g}$ eine Super-Lie-Algebra, $\mathfrak{h}_0$ eine Super-Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, die keine Ideale von $\mathfrak{g}$ außer $\langle 0 \rangle$ enthält. Dann wird durch*

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{i+1} &:= \{a \in \mathfrak{h}_i \mid [a, g] \in \mathfrak{h}_i \textit{ für alle } g \in \mathfrak{g}\}, \quad i \geq 0, \\ \mathfrak{h}_i &:= \mathfrak{g}, \quad i \leq -1, \end{aligned}$$

eine transitive Filtrierung von $\mathfrak{g}$ definiert. Diese ist eindeutig und heißt die transitive Filtrierung von $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0)$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß die Familie $(\mathfrak{h}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ eine Filtrierung der Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist. Die Eigenschaften (F1) und (F2) sind klar, nach Definition gilt nämlich:

$$\ldots = \underbrace{\mathfrak{h}_{-2}}_{=\mathfrak{g}} = \underbrace{\mathfrak{h}_{-1}}_{=\mathfrak{g}} \supset \mathfrak{h}_0 \supset \mathfrak{h}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{h}_i \supset \mathfrak{h}_{i+1} \supset \ldots$$

Wir zeigen nun (F3): $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_j] \subset \mathfrak{h}_{i+j}$ für alle $i, j \in \mathbb{Z}$. Dieses gilt auf jeden Fall für $i \in \mathbb{Z}$ und $j \leq -1$, denn nach Gleichung (2) folgt: $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_j] = [\mathfrak{h}_i, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}_{i-1} \subset \mathfrak{h}_{i+j}$.

Für $j \geq -1$ zeigen wir (F3) induktiv. Den Fall $j = -1$ haben wir bereits behandelt, daher machen wir folgende Induktionsannahme:

$$\text{Für alle } -1 \leq \ell \leq j \text{ gelte: } [\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_\ell] \subset \mathfrak{h}_{i+\ell} \text{ für alle } i \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Zu zeigen ist: Für $\mathfrak{h}_{j+1}$ gilt: $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_{j+1}] \subset \mathfrak{h}_{i+j+1}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

Dieses ist jedenfalls klar für $i \leq -1$, denn: $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_{j+1}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_{j+1}] \subset \mathfrak{h}_j \subset \mathfrak{h}_{j+i}$. Für $i \geq -1$ führen wir eine weitere Induktion durch, für die wir folgende Voraussetzung verwenden:

$$\text{Für alle } -1 \leq k \leq i \text{ gelte: } [\mathfrak{h}_k, \mathfrak{h}_{j+1}] \subset \mathfrak{h}_{k+j+1}. \tag{4}$$

Zeige also: $[\mathfrak{h}_{i+1}, \mathfrak{h}_{j+1}] \subset \mathfrak{h}_{i+j+2}$.

Wegen der Definition der h_k reicht es dazu, $\big[\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}_{i+1}, \mathfrak{h}_{j+1}]\big] \subset \mathfrak{h}_{i+j+1}$ zu zeigen.

Seien $x \in \mathfrak{h}_{i+1}$, $y \in \mathfrak{h}_{j+1}$, $g \in \mathfrak{g}$ alle homogen. Mit der Jacobi-Identität folgt:

$$-(-1)^{\alpha(g)\alpha(y)}\big[g, [x,y]\big] = (-1)^{\alpha(x)\alpha(g)} \underbrace{[x, \overbrace{[y,g]}^{\in \mathfrak{h}_j}]}_{\in \mathfrak{h}_{i+j+1} \text{ wg. } (3)} + (-1)^{\alpha(y)\alpha(x)} \underbrace{[y, \overbrace{[g,x]}^{\in \mathfrak{h}_i}]}_{\in \mathfrak{h}_{i+j+1} \text{ wg. } (4)}.$$

Also gilt: $[\mathfrak{h}_{i+1}, \mathfrak{h}_{j+1}] \subset \mathfrak{h}_{i+j+2}$. Per Induktion folgt daraus: $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_{j+1}] \subset \mathfrak{h}_{i+j+1}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Die erste Induktion gibt damit: $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_j] \subset \mathfrak{h}_{i+j}$ für alle $i, j \in \mathbb{Z}$. Damit ist (F3) gezeigt.

Nun zu (F4): Für $a \in \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{h}_i$ und $g \in \mathfrak{g}$ folgt mit (F3): $[a, g] \in \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{h}_i$. Also ist $\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{h}_i$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Da $\bigcap \mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{h}_0$, folgt $\bigcap \mathfrak{h}_i = \{0\}$.

Die Transitivität der Filtrierung ergibt sich direkt aus Lemma 5.

Die so definierte transitive Filtrierung $(\mathfrak{h}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ von $\mathfrak{g}$ ist eindeutig. Denn für jede transitive Filtrierung $(\widehat{\mathfrak{h}}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ von $\mathfrak{g}$ mit $\widehat{\mathfrak{h}}_0 = \mathfrak{h}_0$ ist nach Lemma 5 stets $\widehat{\mathfrak{h}}_i = \mathfrak{h}_i$. ■

Bemerkung: Für die transitive Filtrierung in Lemma 6 gilt für alle $i \geq -1$:

$$\mathfrak{h}_i / \mathfrak{h}_{i+1} \neq \{0\} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{h}_i = \{0\}.$$

Denn ist $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}_{i+1}$ für ein i, so gilt: $[a, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}_i$ für alle $a \in \mathfrak{h}_i$. Es ist dann $\mathfrak{h}_i$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Wegen $\mathfrak{h}_i \subset \mathfrak{h}_0$ folgt $\mathfrak{h}_i = \{0\}$.

2.3.3 Die assoziierte $\mathbb{Z}$-graduierte Super-Lie-Algebra $\operatorname{Gr}\mathfrak{g}$

Zu einer filtrierten Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit Filtrierung $(\mathfrak{h}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ gehört stets eine korrespondierende $\mathbb{Z}$-graduierte Super-Lie-Algebra

$$\operatorname{Gr}\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{Gr}_i \mathfrak{g} \quad \text{mit} \quad \operatorname{Gr}_i \mathfrak{g} = {}^{\mathfrak{h}_i}\!\big/_{\mathfrak{h}_{i+1}}.$$

Da $\operatorname{Gr}_i \mathfrak{g} = \{0\}$ für $i \leq -2$, schreiben wir hierfür auch $\operatorname{Gr}\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\geq -1} \operatorname{Gr}_i \mathfrak{g}$.

Die $\mathbb{Z}_2$-Graduierung von $\operatorname{Gr}\mathfrak{g}$ ist gegeben durch $(\operatorname{Gr}\mathfrak{g})_\nu = \bigoplus_i (\operatorname{Gr}_i \mathfrak{g})_\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}_2$; im allgemeinen ist die $\mathbb{Z}$-Graduierung daher nicht konsistent.

Der Superkommutator in $\operatorname{Gr}\mathfrak{g}$ ist für $(x_i + \mathfrak{h}_{i+1}) \in \operatorname{Gr}_i \mathfrak{g}$ und $(y_j + \mathfrak{h}_{j+1}) \in \operatorname{Gr}_j \mathfrak{g}$ definiert als

$$\big[(x_i + \mathfrak{h}_{i+1}), (y_j + \mathfrak{h}_{j+1})\big] := [x_i, y_j] + \mathfrak{h}_{i+j+1} \in \operatorname{Gr}_{i+j} \mathfrak{g},$$

insbesondere gilt also auch $[\operatorname{Gr}_{-1}\mathfrak{g}, \operatorname{Gr}_{-1}\mathfrak{g}] \subset \operatorname{Gr}_{-2}\mathfrak{g} = \{0\}$. Die Eigenschaften des Superkommutators auf $\mathfrak{g}$ übertragen sich dabei auf den Superkommutator auf $\operatorname{Gr}\mathfrak{g}$; zu prüfen ist lediglich die Unabhängigkeit vom Repräsentanten durch eine Standardrechnung.

Bemerkung: Die $\mathbb{Z}$-graduierte Super-Lie-Algebra $\operatorname{Gr}\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\geq -1} \operatorname{Gr}_i \mathfrak{g}$ hat eine kanonische Filtrierung

$$\tilde{\mathfrak{h}}_s := \bigoplus_{i\geq s} \operatorname{Gr}_i \mathfrak{g}, \quad s \in \mathbb{Z}.$$

Es stellt sich damit die Frage, ob $\operatorname{Gr}\mathfrak{g}$ genau dann transitiv als $\mathbb{Z}$-graduierte Super-Lie-Algebra ist, wenn sie transitiv ist als filtrierte Super-Lie-Algebra mit der kanonischen Filtrierung. Wir werden diese Frage positiv beantworten; dafür benötigen wir aber die folgenden beiden Lemmata:

Lemma 7: *Für die $\mathbb{Z}$-graduierte Super-Lie-Algebra* $\operatorname{Gr}\mathfrak{g}$ *einer filtrierten Super-Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ *gilt:* $\operatorname{Gr}(\operatorname{Gr}\mathfrak{g}) \cong \operatorname{Gr}\mathfrak{g}$, *d. h.* $\operatorname{Gr}(\operatorname{Gr}\mathfrak{g})$ *und* $\operatorname{Gr}\mathfrak{g}$ *sind isomorph als $\mathbb{Z}$-graduierte Super-Lie-Algebren.*

Beweis: Mit der kanonischen Filtrierung $\tilde{\mathfrak{h}}_s := \bigoplus_{i\geq s} \operatorname{Gr}_i \mathfrak{g}$ von $\operatorname{Gr}\mathfrak{g}$ folgt für den Vektorraum $\tilde{\mathfrak{h}}_s/\tilde{\mathfrak{h}}_{s+1}$:

$$ {}^{\tilde{\mathfrak{h}}_s}\!\big/_{\tilde{\mathfrak{h}}_{s+1}} = {}^{\bigoplus_{i\geq s} \operatorname{Gr}_i \mathfrak{g}}\!\Big/_{\bigoplus_{i\geq s+1} \operatorname{Gr}_i \mathfrak{g}} \cong \operatorname{Gr}_s \mathfrak{g},$$

d. h. es existiert eine natürliche bijektive lineare Abbildung π_s zwischen $\operatorname{Gr}_s \mathfrak{g}$ und $\tilde{\mathfrak{h}}_s/\tilde{\mathfrak{h}}_{s+1}$, die für $x_s \in \operatorname{Gr}_s \mathfrak{g}$ gegeben ist durch $\pi(x_s) := (x_s + \tilde{\mathfrak{h}}_{s+1}) \in \tilde{\mathfrak{h}}_s/\tilde{\mathfrak{h}}_{s+1}$.

Dieses π_s ist sogar $\mathbb{Z}_2$-homogen vom Grad $[0]$, denn es gilt für $\nu \in \mathbb{Z}_2$:

$$\begin{aligned}(\mathrm{Gr}_s\,\mathfrak{g})_\nu &\cong \left\{x + \tilde{\mathfrak{h}}_{s+1} \mid x \in (\mathrm{Gr}_s\,\mathfrak{g})_\nu\right\} \\ &= \left\{x + \tilde{\mathfrak{h}}_{s+1} \mid x \in (\tilde{\mathfrak{h}}_s)_\nu\right\} = \left(\tilde{\mathfrak{h}}_s/\tilde{\mathfrak{h}}_{s+1}\right)_\nu .\end{aligned}$$

Damit ist π_s ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{Z}_2$-graduierten Vektorräumen.

Da $\mathrm{Gr}(\mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}) = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} \tilde{\mathfrak{h}}_s/\tilde{\mathfrak{h}}_{s+1}$ ist, liefern alle π_s zusammen einen Isomorphismus $\pi\colon \mathrm{Gr}\,\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gr}(\mathrm{Gr}\,\mathfrak{g})$ zwischen $\mathbb{Z}_2$-graduierten Vektorräumen.

Für $x_i \in \mathrm{Gr}_i\,\mathfrak{g}$ und $x_j \in \mathrm{Gr}_j\,\mathfrak{g}$ ergibt sich nach Definition der Multiplikation:

$$\left[\pi(x_i), \pi(x_j)\right] = \left[(x_i + \tilde{\mathfrak{h}}_{i+1}), (x_j + \tilde{\mathfrak{h}}_{j+1})\right] = \underbrace{[x_i, x_j]}_{\in \mathrm{Gr}_{i+j}\,\mathfrak{g}} + \tilde{\mathfrak{h}}_{i+j+1} = \pi\big([x_i, x_j]\big),$$

also ist π sogar ein Isomorphismus zwischen Super-Lie-Algebren.

Außerdem ist π noch $\mathbb{Z}$-homogen vom Grad 0, also ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{Z}$-graduierten Super-Lie-Algebren, denn nach Definition gilt:

$$\pi(\mathrm{Gr}_s\,\mathfrak{g}) = \tilde{\mathfrak{h}}_s/\tilde{\mathfrak{h}}_{s+1} = \mathrm{Gr}_s(\mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}) \quad \text{für alle } s \in \mathbb{Z}. \qquad \blacksquare$$

Lemma 8: *Für eine filtrierte Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ mit Filtrierung $(\mathfrak{h}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ gilt:*

$$\mathfrak{g} \textit{ transitiv} \iff \mathrm{Gr}\,\mathfrak{g} \textit{ transitiv als } \mathbb{Z}\textit{-graduierte Super-Lie-Algebra.}$$

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei $\mathfrak{g}$ transitiv. Für beliebiges $i \geq 0$ sei $(a + \mathfrak{h}_{i+1}) \in \mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_{i+1} = \mathrm{Gr}_i\,\mathfrak{g}$ so gewählt, daß gilt:

$$\underbrace{\left[(a + \mathfrak{h}_{i+1}), (g + \mathfrak{h}_0)\right]}_{=[a,g]+\mathfrak{h}_i} = 0 \quad \text{für alle } (g + \mathfrak{h}_0) \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}_0 = \mathrm{Gr}_{-1}\,\mathfrak{g}.$$

Wegen der Unabhängigkeit des Superkommutators vom Repräsentanten folgt damit: $[a, g] \in \mathfrak{h}_i$ für alle $g \in \mathfrak{g}$. Da $\mathfrak{g}$ transitiv ist, ist $\mathfrak{h}_{i+1} = \{a \in \mathfrak{h}_i \mid [a, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}_i\}$. Das bedeutet $a \in \mathfrak{h}_{i+1}$, d. h. $(a + \mathfrak{h}_{i+1}) \equiv 0$. Damit ist Gr $\mathfrak{g}$ transitiv.

„$\Leftarrow$“: Sei Gr $\mathfrak{g}$ transitiv, d. h. für $(a + \mathfrak{h}_{i+1}) \in \mathrm{Gr}_i\,\mathfrak{g}$, $i \geq 0$, gelte:

$$\begin{aligned}\left[(a + \mathfrak{h}_{i+1}), (g + \mathfrak{h}_0)\right] = 0 \quad \forall (g + \mathfrak{h}_0) \in \mathrm{Gr}_{-1}\,\mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad & a + \mathfrak{h}_{i+1} \equiv 0, \\ & \text{also } a \in \mathfrak{h}_{i+1}.\end{aligned}$$

Nach Definition des Kommutators folgt für ein $a \in \mathfrak{h}_{i+1}$:

$$0 = \left[(a + \mathfrak{h}_{i+1}), (g + \mathfrak{h}_0)\right] = [a, g] + \mathfrak{h}_i \quad \text{für alle } g \in \mathfrak{g},$$

d. h. für alle $g \in \mathfrak{g}$ ist $[a,g] \in \mathfrak{h}_i$. Das gibt bereits: $\mathfrak{h}_{i+1} \subset \{a \in \mathfrak{h}_i \mid [a,\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}_i\}$. Gleichheit folgt aus der Transitivität von $\mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}$, denn für ein $(a+\mathfrak{h}_{i+1}) \not\equiv 0$ gibt es ein $(g+\mathfrak{h}_0) \in \mathrm{Gr}_{-1}\,\mathfrak{g}$ mit:

$$0 \neq \big[(a+\mathfrak{h}_{i+1}),(g+\mathfrak{h}_0)\big] = [a,g] + \mathfrak{h}_i,$$

d. h. für ein $a \in \mathfrak{h}_i \setminus \mathfrak{h}_{i+1}$ existiert ein $g \in \mathfrak{g}$ mit $[a,g] \notin \mathfrak{h}_i$.

Also ist $\mathfrak{h}_{i+1} = \{a \in \mathfrak{h}_i \mid [a,\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}_i\}$. Nach Lemma 5 ist $\mathfrak{g}$ dann transitiv. ■

Korollar: *Sei* $\mathfrak{g}$ *eine filtrierte Super-Lie-Algebra mit Filtrierung* $(\mathfrak{h}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ *und* $\mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}$ *die zugehörige* $\mathbb{Z}$*-graduierte Super-Lie-Algebra. Es gilt:* $\mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}$ *ist genau dann transitiv als* $\mathbb{Z}$*-graduierte Super-Lie-Algebra, wenn sie als filtrierte Super-Lie-Algebra transitiv ist.*

Beweis: Nach Lemma 8 gilt:

$$\begin{gathered}\mathrm{Gr}\,\mathfrak{g} \text{ transitiv als filtrierte Super-Lie-Algebra}\\ \Longleftrightarrow\\ \mathrm{Gr}(\mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}) \text{ transitiv als } \mathbb{Z}\text{-graduierte Super-Lie-Algebra}\end{gathered}$$

Nach Lemma 7 sind $\mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}$ und $\mathrm{Gr}(\mathrm{Gr}\,\mathfrak{g})$ isomorph als $\mathbb{Z}$-graduierte Super-Lie-Algebren; den Isomorphismus $\pi\colon \mathrm{Gr}\,\mathfrak{g} \to \mathrm{Gr}(\mathrm{Gr}\,\mathfrak{g})$ haben wir im Beweis dieses Lemmas konstruiert. Unter π^{-1} überträgt sich die Eigenschaft „transitiv als $\mathbb{Z}$-graduierte Super-Lie-Algebra“ von $\mathrm{Gr}(\mathrm{Gr}\,\mathfrak{g})$ auf $\mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}$. ■

2.3.4 Eigenschaften von $\mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}$ bei einer bestimmten Filtrierung von $\mathfrak{g}$

In diesem Abschnitt werden wir einige Vorarbeiten für den Beweis des Satzes von Kac (Satz 4 auf Seite 28) vornehmen.

Es sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]} \oplus \mathfrak{g}_{[1]}$ eine endlichdimensionale Super-Lie-Algebra, $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{g}$ eine maximale echte Super-Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{g}_{[0]} \subset \mathfrak{h}_0$. Es enthalte $\mathfrak{h}_0$ keine Ideale von $\mathfrak{g}$ außer dem Nullideal $\langle 0\rangle$.

Nach Lemma 6 erhalten wir eine transitive Filtrierung von $(\mathfrak{g},\mathfrak{h}_0)$ durch:

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_{i+1} &:= \{a \in \mathfrak{h}_i \mid [a,\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}_i\}, \quad i \geq 0,\\ \mathfrak{h}_i &:= \mathfrak{g}, \quad i \leq -1.\end{aligned}$$

Es sei $\mathrm{Gr}\,\mathfrak{g} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Gr}_i\,\mathfrak{g}$ die dazu gehörende $\mathbb{Z}$-graduierte Super-Lie-Algebra.

Lemma 9 (Kac)**:** $\mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}$ *hat folgende Eigenschaften:*

I: $\mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}$ *ist transitiv;*
II: *die* $\mathbb{Z}$*-Graduierung von* $\mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}$ *ist konsistent mit der* $\mathbb{Z}_2$*-Graduierung;*
III: $\mathrm{Gr}\,\mathfrak{g}$ *ist irreduzibel;*
IV: *wenn die Darstellung von* $\mathfrak{g}_{[0]}$ *auf* $\mathfrak{g}_{[1]}$ *nicht irreduzibel ist, ist* $\mathrm{Gr}_1\,\mathfrak{g} \neq \{0\}$.

Beweis: I: Folgt aus Lemma 8, da $\mathfrak{g}$ eine transitive Filtrierung hat.

II: Zu zeigen ist:

$$(\operatorname{Gr}\mathfrak{g})_{[0]} = \bigoplus_{i \text{ gerade}} \operatorname{Gr}_i \mathfrak{g}, \qquad (\operatorname{Gr}\mathfrak{g})_{[1]} = \bigoplus_{i \text{ ungerade}} \operatorname{Gr}_i \mathfrak{g}.$$

Es genügt dabei zu zeigen:

$$\operatorname{Gr}_i \mathfrak{g} = \begin{cases} (\operatorname{Gr}_i \mathfrak{g})_{[0]}, & \text{falls } i \text{ gerade,} \\ (\operatorname{Gr}_i \mathfrak{g})_{[1]}, & \text{falls } i \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Für $i \leq -2$ ist wegen $\operatorname{Gr}_i \mathfrak{g} = \{0\}$ nichts zu tun. Für $i \geq -1$ zeigen wir die Behauptung per Induktion nach i.

Wir betrachten zunächst $i = -1$. Es ist $\operatorname{Gr}_{-1} \mathfrak{g} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}_0$. Da $\mathfrak{g}_{[0]} \subset \mathfrak{h}_0$, enthält jede Klasse in $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_0$ einen Repräsentanten in $\mathfrak{g}_{[1]}$, d. h. $\operatorname{Gr}_{-1} \mathfrak{g} = (\operatorname{Gr}_{-1} \mathfrak{g})_{[1]}$.

Induktionsannahme: Für alle $-1 \leq j \leq i$ sei $\operatorname{Gr}_j \mathfrak{g} = (\operatorname{Gr}_j \mathfrak{g})_{[0]}$ für gerades j bzw. $\operatorname{Gr}_j \mathfrak{g} = (\operatorname{Gr}_j \mathfrak{g})_{[1]}$ für ungerades j.

Wir betrachten nun $\operatorname{Gr}_{i+1} \mathfrak{g} = \mathfrak{h}_{i+1}/\mathfrak{h}_{i+2}$.

Falls $\mathfrak{h}_{i+2} = \mathfrak{h}_{i+1}$ gilt, ist $\operatorname{Gr}_{i+1} \mathfrak{g} = \{0\}$, und wir sind fertig.

Sei also $\mathfrak{h}_{i+2} \neq \mathfrak{h}_{i+1}$. Dann existiert ein $x \in \mathfrak{h}_{i+1} \setminus \mathfrak{h}_{i+2}$, für dieses ist also $\operatorname{Gr}_{i+1} \mathfrak{g} \ni (x + \mathfrak{h}_{i+2}) \not\equiv 0$. Da $\mathfrak{g}$ transitiv, gibt es ein $g \in \mathfrak{g}$, so daß $[x, g] \notin \mathfrak{h}_{i+1}$. Für $(g + \mathfrak{h}_0) \in \operatorname{Gr}_{-1} \mathfrak{g}$ folgt dann:

$$\big[(x + \mathfrak{h}_{i+2}), (g + \mathfrak{h}_0)\big] = [x, g] + \mathfrak{h}_{i+1} \not\equiv 0.$$

Wegen $\operatorname{Gr}_{-1} \mathfrak{g} = (\operatorname{Gr}_{-1} \mathfrak{g})_{[1]}$ gibt es ein $g_1 \in \mathfrak{g}_{[1]}$ mit $g \equiv g_1 \pmod{\mathfrak{h}_0}$. Damit:

$$0 \not\equiv \big[(x + \mathfrak{h}_{i+2}), (g + \mathfrak{h}_0)\big] = \big[(x + \mathfrak{h}_{i+2}), (g_1 + \mathfrak{h}_0)\big] = [x, g_1] + \mathfrak{h}_{i+1} \in \operatorname{Gr}_i \mathfrak{g}.$$

Wir nehmen jetzt o. B. d. A. an, daß $x \neq 0$ ein homogenes Element in $\mathfrak{h}_{i+1}$ ist, und unterscheiden zwei Fälle:

- i gerade, d. h. $\operatorname{Gr}_i \mathfrak{g} \subset (\operatorname{Gr}\mathfrak{g})_{[0]}$.
  Dann hat in $\operatorname{Gr}_i \mathfrak{g}$ keine Klasse außer der Nullklasse $(0 + \mathfrak{h}_{i+1})$ einen ungeraden Repräsentanten. Wäre $x \in \mathfrak{h}_{i+1}$ gerade, so wäre $[x, g_1]$ ungerade und damit $\big[(x + \mathfrak{h}_{i+2}), (g_1 + \mathfrak{h}_0)\big] \equiv 0$. $\lightning$
  Also folgt: $x \in \mathfrak{g}_{[1]}$.

- i ungerade, d. h. $\mathrm{Gr}_i\,\mathfrak{g} \subset (\mathrm{Gr}\,\mathfrak{g})_{[1]}$.
  Analog zum geraden Fall folgt hier: $x \in \mathfrak{g}_{[0]}$.

In beiden Fällen sind die homogenen Repräsentanten von Klassen $\neq 0$ in $\mathrm{Gr}_{i+1}\,\mathfrak{g}$ entweder alle ungerade bzw. alle gerade. Damit hat für gerades (ungerades) i *jede* Klasse in $\mathrm{Gr}_{i+1}\,\mathfrak{g}$ einen ungeraden (geraden) Repräsentanten, und es folgt:

$$\mathrm{Gr}_{i+1}\,\mathfrak{g} = \begin{cases} (\mathrm{Gr}_{i+1}\,\mathfrak{g})_{[0]} & \text{falls } i \text{ ungerade,} \\ (\mathrm{Gr}_{i+1}\,\mathfrak{g})_{[1]} & \text{falls } i \text{ gerade.} \end{cases}$$

III: Nach Abschnitt 2.3.1 ist zu zeigen, daß die Darstellung von $\mathrm{Gr}_0\,\mathfrak{g}$ auf $\mathrm{Gr}_{-1}\,\mathfrak{g}$ irreduzibel ist.

Den Beweis führen wir indirekt und nehmen daher an, daß die Darstellung nicht irreduzibel ist. Dann gibt es einen $\mathbb{Z}_2$-graduierten Untervektorraum $\{0\} \neq U \subsetneq \mathrm{Gr}_{-1}\,\mathfrak{g}$, so daß gilt: $\left[\mathrm{Gr}_0\,\mathfrak{g}, U\right] \subset U$.

Da $\mathrm{Gr}_{-1}\,\mathfrak{g} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}_0$, existiert damit ein $\mathbb{Z}_2$-graduierter Untervektorraum $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{u}$ und $U = \mathfrak{u}/\mathfrak{h}_0$. Wir zeigen nun: $\mathfrak{u}$ ist eine Super-Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$.

Wegen $U = \mathfrak{u}/\mathfrak{h}_0$ läßt sich der Vektorraum $\mathfrak{u}$ als direkte Summe $\mathfrak{u} = \mathfrak{h}_0 \oplus V$ schreiben mit $V \cong U$. Für jedes $u \in \mathfrak{u}$ gibt es dann eindeutig ein $h \in \mathfrak{h}_0$ und ein $v \in V$ mit $u = h + v$. Damit folgt für $u_1, u_2 \in \mathfrak{u}$:

$$[u_1, u_2] = [h_1 + v_1, h_2 + v_2] = \underbrace{[h_1, h_2]}_{\in \mathfrak{h}_0} + [h_1, v_2] + [v_1, h_2] + [v_1, v_2]. \tag{5}$$

Für $h \in \mathfrak{h}_0$ und $u \in \mathfrak{u}$ ist stets $[h, u] \in \mathfrak{u}$. Denn für $(h + \mathfrak{h}_1) \in \mathrm{Gr}_0\,\mathfrak{g}$ und $(u + \mathfrak{h}_0) \in U$ gilt wegen $\left[\mathrm{Gr}_0\,\mathfrak{g}, U\right] \subset U$:

$$U \ni \left[(h + \mathfrak{h}_1), (u + \mathfrak{h}_0)\right] = [h, u] + \mathfrak{h}_0.$$

Damit ist $[\mathfrak{h}_0, \mathfrak{u}] \subset \mathfrak{u}$, und in Gleichung (5) gilt: $[v_1, h_2] \in \mathfrak{u}$ und $[h_1, v_2] \in \mathfrak{u}$.

Wegen $\mathfrak{g}_{[0]} \subset \mathfrak{h}_0$ ist $V \subset \mathfrak{g}_{[1]}$. Damit ergibt sich aber:

$$[v_1, v_2] \in \left[\mathfrak{g}_{[1]}, \mathfrak{g}_{[1]}\right] \subset \mathfrak{g}_{[0]} \subset \mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{u}.$$

Insgesamt folgt damit: $[u_1, u_2] \in \mathfrak{u}$. Also ist $\mathfrak{u}$ eine Super-Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{u}$. $\lightning$ Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{h}_0$.

IV: Wir beweisen die umgekehrte Aussage. Es sei $\{0\} = \mathrm{Gr}_1\,\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_2$, also $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_1$. Nach Definition von $\mathfrak{h}_2$ ist damit $\mathfrak{h}_1$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Wegen $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_0$ ist also $\mathfrak{h}_1 = \{0\}$.

Es ist folglich $\mathrm{Gr}_0\,\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_0/\{0\} \cong \mathfrak{h}_0$. Nach II enthält $\mathrm{Gr}_0\,\mathfrak{g}$ nur gerade Elemente. Damit ist $\mathrm{Gr}_0\,\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_{[0]}$, da $\mathfrak{g}_{[0]} \subset \mathfrak{h}_0$.

Daher ist $\mathrm{Gr}_{-1}\,\mathfrak{g} = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{[0]} \cong \mathfrak{g}_{[1]}$.

Nach III ist die Darstellung von $\mathrm{Gr}_0\,\mathfrak{g}$ auf $\mathrm{Gr}_{-1}\,\mathfrak{g}$ irreduzibel; also ist dann auch die Darstellung von $\mathfrak{g}_{[0]}$ auf $\mathfrak{g}_{[1]}$ irreduzibel. ■

Bemerkung: Die obigen Beweise der Aussagen I und II des Lemmas 9 lassen sich unmittelbar auf den Fall einer unendlichdimensionalen Super-Lie-Algebra übertragen. Für den Beweis der Aussage III trifft dieses nicht zu, da ein unendlichdimensionaler Vektorraum nicht unbedingt als direkte Summe von Untervektorräumen geschrieben werden kann; die Gültigkeit der Aussagen III und IV für den unendlichdimensionalen Fall bleibt offen.

2.4 Auflösbare Super-Lie-Algebren

2.4.1 Definition und Grundlagen

Für eine Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ läßt sich eine Kette von graduierten Idealen wie folgt rekursiv definieren:

$$\mathfrak{D}^0\mathfrak{g} := \mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{D}^{i+1}\mathfrak{g} := \left[\mathfrak{D}^i\mathfrak{g}, \mathfrak{D}^i\mathfrak{g}\right] \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Man bezeichnet diese Kette als *derivierte Reihe* von $\mathfrak{g}$; dabei gilt stets $\mathfrak{D}^i\mathfrak{g} \supset \mathfrak{D}^{i+1}\mathfrak{g}$. Insbesondere ist $\mathfrak{D}^1\mathfrak{g} = \left[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}\right] = \mathfrak{D}\mathfrak{g}$.

Definition 20: *Eine Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt **auflösbar**, wenn $\mathfrak{D}^i\mathfrak{g} = \{0\}$ ist für ein $i \in \mathbb{N}$.*

Beispiele:

- Kommutative Super-Lie-Algebren sind auflösbar, also insbesondere Super-Lie-Algebren der Dimension 1.
- Zweidimensionale Super-Lie-Algebren (☞ Abschnitt 2.2 auf Seite 13) sind stets auflösbar.

  Das ist klar für alle Super-Lie-Algebren, die als Lie-Algebra angesehen werden können. Es ist also noch ein Fall zu überprüfen, nämlich $\dim \mathfrak{g} = (1,1)$ mit $\mathfrak{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]}$. Da $\dim \mathfrak{g}_{[0]} = 1$, ist aber $\mathfrak{D}^2\mathfrak{g} = \left[\mathfrak{g}_{[0]}, \mathfrak{g}_{[0]}\right] = \{0\}$.
- Für einfache Super-Lie-Algebren ist $\mathfrak{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$, sie sind daher nicht auflösbar.

Auflösbarkeit läßt sich auch ohne die derivierte Reihe definieren. Das folgende Lemma liefert gleichwertige Aussagen:

Lemma 10: *Für eine endlichdimensionale Super-Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ *mit* $\dim \mathfrak{g} = \ell$ *sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

I: $\mathfrak{g}$ *auflösbar.*

II: *Es gibt eine (endliche) Kette* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_0 \supset \mathfrak{h}_1 \supset \mathfrak{h}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{h}_k = \{0\}$ *von Super-Lie-Unteralgebren* $\mathfrak{h}_i$*, für die gilt:*
- *Für jedes* i *ist* $\mathfrak{h}_{i+1}$ *ein graduiertes Ideal in* $\mathfrak{h}_i$*,*
- $\mathfrak{h}_i / \mathfrak{h}_{i+1}$ *ist abelsch.*

III: *Es gibt eine Kette* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_0 \supsetneq \mathfrak{h}_1 \supsetneq \mathfrak{h}_2 \supsetneq \ldots \supsetneq \mathfrak{h}_\ell = \{0\}$ *von Super-Lie-Unteralgebren* $\mathfrak{h}_i$*, für die gilt:*
- *Für jedes* i *ist* $\mathfrak{h}_{i+1}$ *ein graduiertes Ideal in* $\mathfrak{h}_i$*,*
- $\dim(\mathfrak{h}_i / \mathfrak{h}_{i+1}) = 1$.

Beweis: „I ⇒ II": Sei $\mathfrak{g}$ auflösbar. Dann bricht die derivierte Reihe von $\mathfrak{g}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ab:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{D}^0(\mathfrak{g}) \supset \mathfrak{D}^1(\mathfrak{g}) \supset \ldots \supset \mathfrak{D}^n(\mathfrak{g}) = \{0\}.$$

Nach Definition ist $\mathfrak{D}^{i+1}(\mathfrak{g})$ ein Ideal in $\mathfrak{D}^i(\mathfrak{g})$ und $\mathfrak{D}^i(\mathfrak{g})/\mathfrak{D}^{i+1}(\mathfrak{g})$ abelsch.

„II ⇒ III": Aus einer Kette $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_0 \supset \mathfrak{h}_1 \supset \mathfrak{h}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{h}_k = \{0\}$ läßt sich stets eine Kette $\mathfrak{g} = \widetilde{\mathfrak{h}}_0 \supsetneq \widetilde{\mathfrak{h}}_1 \supsetneq \widetilde{\mathfrak{h}}_2 \supsetneq \ldots \supsetneq \widetilde{\mathfrak{h}}_\ell = \{0\}$ konstruieren, indem man die $\mathfrak{h}_i$ ausläßt, für die $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}_{i-1}$ ist. Daher gelte o. B. d. A. stets $\mathfrak{h}_i \neq \mathfrak{h}_{i+1}$ für die gegebene Kette.

Für jedes i ist $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_i] \subset \mathfrak{h}_{i+1}$, da $\mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_{i+1}$ abelsch ist. Wir wählen nun ein beliebiges homogenes $x \in \mathfrak{h}_i \setminus \mathfrak{h}_{i+1}$. Der Vektorraum $(\mathfrak{h}_{i+1} + Kx)$ ist dann ein Ideal in $\mathfrak{h}_i$, denn es ist $[\mathfrak{h}_i, (\mathfrak{h}_{i+1} + Kx)] \subset [\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_i] \subset \mathfrak{h}_{i+1} \subset (\mathfrak{h}_{i+1} + Kx)$; außerdem ist $\dim(\mathfrak{h}_i + Kx) = \dim \mathfrak{h}_i + 1$. Durch rekursive Fortsetzung dieser Konstruktion erhält man eine Kette von Super-Lie-Unteralgebren von $\mathfrak{g}$ mit den gewünschten Eigenschaften.

„III ⇒ II": Klar: eindimensionale Super-Lie-Algebren sind abelsch.

„II ⇒ I": Da $\mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_{i+1}$ stets abelsch, ist $\mathfrak{D}^i(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{h}_i$. Also ist $\mathfrak{D}^k(\mathfrak{g}) = \{0\}$ für ein k, d. h. $\mathfrak{g}$ ist auflösbar. ∎

Bemerkung: Die Beweise der Richtungen „I ⇒ II" und „II ⇒ I" gelten auch, wenn $\mathfrak{g}$ eine unendlichdimensionale Super-Lie-Algebra ist.

Das nächste Lemma liefert einige nützliche Aussagen über Auflösbarkeit (vgl. Humphreys, 1972, Seite 11):

Lemma 11: *Sei $\mathfrak{g}$ eine Super-Lie-Algebra. Dann gilt:*

I: $\mathfrak{g}$ *auflösbar* $\Rightarrow$ *alle Super-Lie-Unteralgebren und alle homomorphen Bilder von* $\mathfrak{g}$ *sind auflösbar.*

II: *Ist* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ *ein auflösbares Ideal in* $\mathfrak{g}$ *und ist* $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ *auflösbar, dann ist auch* $\mathfrak{g}$ *auflösbar.*

III: *Sind* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *zwei auflösbare Ideale in* $\mathfrak{g}$, *so ist auch* $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ *ein auflösbares Ideal.*

Beweis: I: Für eine Super-Lie-Unteralgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ ist stets $\mathfrak{D}^i\mathfrak{h} \subset \mathfrak{D}^i\mathfrak{g}$. Daher ist mit $\mathfrak{g}$ auch $\mathfrak{h}$ auflösbar.

Sei nun $\tilde{\mathfrak{g}}$ eine weitere Super-Lie-Algebra und $\gamma\colon \mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}$ ein Homomorphismus. Wir zeigen per Induktion nach i, daß stets $\mathfrak{D}^i\big(\gamma(\mathfrak{g})\big) = \gamma(\mathfrak{D}^i\mathfrak{g})$ gilt:

Für $i = 0$ ist alles klar: $\mathfrak{D}^0\big(\gamma(\mathfrak{g})\big) = \gamma(\mathfrak{g}) = \gamma(\mathfrak{D}^0\mathfrak{g})$.

Für i sei nun $\mathfrak{D}^i(\gamma\mathfrak{g}) = \gamma(\mathfrak{D}^i\mathfrak{g})$. Man erhält:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}^{i+1}(\gamma\mathfrak{g}) = \big[\mathfrak{D}^i(\gamma\mathfrak{g}), \mathfrak{D}^i(\gamma\mathfrak{g})\big] &= \big[\gamma(\mathfrak{D}^i\mathfrak{g}), \gamma(\mathfrak{D}^i\mathfrak{g})\big] \\ &= \gamma([\mathfrak{D}^i\mathfrak{g}, \mathfrak{D}^i\mathfrak{g}]) = \gamma(\mathfrak{D}^{i+1}\mathfrak{g}).\end{aligned}$$

Damit folgt: $\gamma(\mathfrak{g})$ ist eine auflösbare Super-Lie-Unteralgebra von $\tilde{\mathfrak{g}}$.

II: Da $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ auflösbar, ist $\mathfrak{D}^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) \equiv \{0\}$ für ein i, d. h. $\mathfrak{D}^i\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}$ für ein i. Da $\mathfrak{a}$ auflösbar, gibt es ein j mit $\mathfrak{D}^j\mathfrak{a} = \{0\}$. Also ist $\mathfrak{D}^{i+j}\mathfrak{g} = \{0\}$.

III: Nach dem Isomorphiesatz (Satz 2) gilt:

$$\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\big/_{\mathfrak{b}} \cong \mathfrak{a}\big/_{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}}.$$

Die rechte Seite davon ist als homomorphes Bild von $\mathfrak{a}$ auflösbar, also ist auch $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ auflösbar. Da $\mathfrak{b}$ auflösbar, ist nach (II) auch $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ auflösbar. ∎

Korollar: *Eine endlichdimensionale Super-Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ *hat ein eindeutiges maximales auflösbares graduiertes Ideal, welches alle auflösbaren graduierten Ideale enthält.*

Beweis: Indirekt: Sei $\mathfrak{a}$ ein maximales auflösbares Ideal in $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{b}$ ein auflösbares Ideal mit $\mathfrak{b} \not\subset \mathfrak{a}$. Dann ist nach Lemma 11 auch $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ ein auflösbares Ideal mit $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{b}$. ↯ Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{a}$. ∎

Definition 21: *Das maximale auflösbare graduierte Ideal einer endlichdimensionalen Super-Lie-Algebra* $\mathfrak{g}$ *heißt* ***(auflösbares) Radikal****. Es wird mit* $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ *bezeichnet.*

Wir werfen jetzt noch einen Blick auf die Auflösbarkeit von Super-Lie-Algebren bei einer Erweiterung des Grundkörpers (☞ Abschnitt 2.1.5). Es gilt folgendes:

Lemma 12: *Sei $L \supset K$ eine Körpererweiterung, $\mathfrak{g}$ eine Super-Lie-Algebra über K und $\mathfrak{g}_L = L \otimes_K \mathfrak{g}$ die zugehörige Super-Lie-Algebra über L. Dann gilt:*

$$\mathfrak{g} \text{ auflösbar} \iff \mathfrak{g}_L \text{ auflösbar}.$$

Beweis: Nach Definition des Superkommutators auf $\mathfrak{g}_L$ gilt für die derivierten Reihen von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_L$:

$$\mathfrak{D}^i(\mathfrak{g}_L) = \mathfrak{D}^i(L \otimes_K \mathfrak{g}) = L \otimes_K \mathfrak{D}^i(\mathfrak{g}) \quad \text{für jedes } i \in \mathbb{N}.$$

■

2.4.2 Der Satz von Lie

Für auflösbare Lie-Algebren gilt der Satz von Lie*:

Satz 3: *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper C und $\mathfrak{g}$ eine auflösbare Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Dann gibt es eine Basis von V, bezüglich der jedes $x \in \mathfrak{g}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.*

Eine mögliche Formulierung dieses Satzes im Kontext von Super-Lie-Algebren wäre die folgende:

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{Z}_2$-graduierter Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper C und $\mathfrak{g}$ eine auflösbare Super-Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$. Dann gibt es eine homogene Basis von V, bezüglich der jedes $x \in \mathfrak{g}$ obere Dreiecksmatrix ist.

Diese übertragene Aussage gilt im allgemeinen jedoch nicht für auflösbare Super-Lie-Algebren, die keine Lie-Algebren sind. Es handelt sich dabei um eine Konsequenz der $\mathbb{Z}_2$-Graduierung. Wir werden dazu noch ein Gegenbeispiel anführen.

Bemerkung: Falls $V = V_{[0]} \oplus V_{[1]}$ eine triviale $\mathbb{Z}_2$-Graduierung hat mit $V_{[0]} = \{0\}$ oder $V_{[1]} = \{0\}$, so ist $\mathfrak{gl}(V)$ eine Lie-Algebra wegen $(\mathfrak{gl}(V))_{[1]} = \{0\}$. Jede Super-Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$ ist dann schon eine Lie-Unteralgebra, d. h. wir sind reduziert auf den Satz von Lie für Lie-Algebren.

Verschärft man die Voraussetzungen der übertragenen Aussage dahingehend, daß $\mathfrak{g} \subset (\mathfrak{gl}(V))_{[0]}$ eine auflösbare Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(V)$ ist, dann kann man tatsächlich folgern: Es gibt eine homogene Basis von V, so daß alle $x \in \mathfrak{g}$ obere Dreiecksmatrizen sind. Denn wegen $\mathfrak{g} \subset (\mathfrak{gl}(V))_{[0]}$ ist $x(V_{[0]}) \subset V_{[0]}$ und

*In der Literatur findet man den Satz von Lie beispielsweise an folgenden Stellen: Hilgert u. Neeb (1991), Seite 116; Humphreys (1972), Seite 16; Jacobson (1966), Seite 50; Knapp (2002), Seite 44.

$x(V_{[1]}) \subset V_{[1]}$ für jedes $x \in \mathfrak{g}$, d. h. x hat die Gestalt einer Blockmatrix $\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$. Diese Blockmatrixform für x bleibt auch beim Übergang zu einer anderen homogenen Basis von V erhalten. Wendet man den Satz von Lie für Lie-Algebren einmal für $V_{[0]}$ und einmal für $V_{[1]}$ an, so erhält man die Blockmatrix in oberer Dreiecksgestalt.

Kommen wir nun zu dem angekündigten Gegenbeispiel für die auf Super-Lie-Algebren übertragene Aussage: Wir betrachten dazu die zweidimensionale Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]} \oplus \mathfrak{g}_{[1]}$ aus Abschnitt 2.2 mit $\dim \mathfrak{g}_{[0]} = 1$, $\dim \mathfrak{g}_{[1]} = 1$ und $\mathfrak{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]}$; diese ist bis auf Isomorphie die einzige zweidimensionale, die nilpotent, aber nicht abelsch ist. Eine homogene Basis $\{e_0, e_1\}$ von $\mathfrak{g}$ in Standardform sei o. B. d. A. so gewählt, daß die folgenden Regeln gelten:

$$[e_0, e_0] = 0, \qquad [e_0, e_1] = 0, \qquad [e_1, e_1] = 2e_0.$$

Nach Abschnitt 2.2 hat man eine Darstellung ϕ von $\mathfrak{g}$ auf einen $\mathbb{Z}_2$-graduierten Vektorraum V mit $\dim V = (1, 1)$, die gegeben ist durch:

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist also $\phi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{gl}(V)$ eine auflösbare Super-Lie-Algebra. Bei einem Wechsel der Basis von $V = V_{[0]} \oplus V_{[1]}$ dürfen wir jetzt die gegebene $\mathbb{Z}_2$-Graduierung nicht zerstören, d. h. ein Basiswechsel kann nur innerhalb von jeder Komponente V_i stattfinden. Mit anderen Worten heißt das, daß bei einem Basiswechsel jedes V_i in sich selbst übergeführt wird und keine „Mischung“ vorkommt.

In diesem Fall haben wir $\dim V_{[0]} = 1$ und $\dim V_{[1]} = 1$. Es ist damit offensichtlich, daß man keine homogene Basis von V finden kann, so daß die Matrix von e_1 eine obere Dreiecksmatrix wird.

2.4.3 Der Satz von Kac

In diesem Abschnitt sei C stets ein algebraisch abgeschlossener Körper. Unser Ziel ist der Beweis des folgenden Satzes:

Satz 4 (Kac, 1977a, S. 25)**:** *Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]} \oplus \mathfrak{g}_{[1]}$ eine endlichdimensionale Super-Lie-Algebra über C. Es gilt:*

$$\mathfrak{g} \textit{ auflösbar} \iff \mathfrak{g}_{[0]} \textit{ auflösbar}.$$

Dafür sind einige Vorbereitungen notwendig. Insbesondere werden wir die Ergebnisse des Abschnitts 2.3.4 verwenden, die wir hier noch einmal kurz zusammenfassen:

Wir betrachten eine Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]} \oplus \mathfrak{g}_{[1]}$ und darin eine maximale Super-Lie-Unteralgebra $\mathfrak{h}_0$ mit $\mathfrak{g}_{[0]} \subset \mathfrak{h}_0$. Wenn $\mathfrak{h}_0$ keine Ideale von $\mathfrak{g}$ außer $\langle 0 \rangle$ enthält, erhalten wir die transitive Filtrierung von $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0)$ durch:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{i+1} &:= \{a \in \mathfrak{h}_i \mid [a, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}_i\}, \quad i \geq 0, \\ \mathfrak{h}_i &:= \mathfrak{g}, \quad i \leq -1. \end{aligned}$$

Die zugehörige $\mathbb{Z}$-graduierte Super-Lie-Algebra ist:

$$\mathrm{Gr}\ \mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Gr}_i\ \mathfrak{g} \quad \text{mit} \quad \mathrm{Gr}_i\ \mathfrak{g} = {}^{\mathfrak{h}_i}\!\big/_{\mathfrak{h}_{i+1}};$$

diese hat nach Lemma 9 folgende Eigenschaften:

I. Gr $\mathfrak{g}$ ist transitiv: Für $(a + \mathfrak{h}_{i+1}) \in \mathrm{Gr}_i\ \mathfrak{g}$, $i \geq 0$, gilt:

$$\big[(a + \mathfrak{h}_{i+1}), \mathrm{Gr}_{-1}\ \mathfrak{g}\big] = \{0\} \quad \Rightarrow \quad a \equiv 0.$$

II. Die $\mathbb{Z}$-Graduierung von Gr $\mathfrak{g}$ ist konsistent mit der $\mathbb{Z}_2$-Graduierung:

$$(\mathrm{Gr}\ \mathfrak{g})_{[0]} = \bigoplus_{i \text{ gerade}} \mathrm{Gr}_i\ \mathfrak{g} \quad \text{und} \quad (\mathrm{Gr}\ \mathfrak{g})_{[1]} = \bigoplus_{i \text{ ungerade}} \mathrm{Gr}_i\ \mathfrak{g}.$$

III. Gr $\mathfrak{g}$ ist irreduzibel, d. h. die Darstellung von $\mathrm{Gr}_0\ \mathfrak{g}$ auf $\mathrm{Gr}_{-1}\ \mathfrak{g}$ ist irreduzibel.

Diese Eigenschaften werden wir beim Beweis der beiden folgenden Lemmata ausnutzen.

Lemma 13: *Es sei* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]} \oplus \mathfrak{g}_{[1]}$ *eine endlichdimensionale Super-Lie-Algebra. Sei* $\mathfrak{h}_0 \subsetneq \mathfrak{g}$ *eine maximale Super-Lie-Unteralgebra von* $\mathfrak{g}$ *mit* $\mathfrak{g}_{[0]} \subset \mathfrak{h}_0$*, die keine Ideale von* $\mathfrak{g}$ *außer* $\langle 0 \rangle$ *enthält. Es sei* $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{h}_0 + 1$*. Dann gilt:* $\dim \mathfrak{g} = 1$ *oder* $\dim \mathfrak{g} = 2$.

Beweis: Wir erhalten die transitive Filtrierung $(\mathfrak{h}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ von $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0)$ wie oben beschrieben. Diese Filtrierung $(\mathfrak{h}_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ liefert eine Kette $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_{-1} \supsetneq \mathfrak{h}_0 \supset \mathfrak{h}_1 \supset \ldots$ von Super-Lie-Unteralgebren von $\mathfrak{g}$, wobei für alle $i \geq 0$ gilt: $\mathfrak{h}_{i+1}$ ist ein Ideal in $\mathfrak{h}_i$.

Behauptung: $\dim \mathfrak{h}_i / \mathfrak{h}_{i+1} = 1$ *oder* $\mathfrak{h}_i = \{0\}$ *für alle* $i \geq -1$.

Beweis durch Induktion nach i: Für $i = -1$ ist $\dim \mathfrak{g} / \mathfrak{h}_0 = 1$ nach Voraussetzung.

Für ein i sei nun $\dim \mathfrak{h}_i / \mathfrak{h}_{i+1} = 1$. Falls $\mathfrak{h}_{i+1} = \{0\}$, haben wir nichts mehr zu tun. Sei also $\mathfrak{h}_{i+1} \neq \{0\}$. Es ist dann $\mathfrak{h}_{i+1} \neq \mathfrak{h}_{i+2}$, denn andernfalls wäre $\mathfrak{h}_{i+1}$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$ und folglich $\mathfrak{h}_{i+1} = \{0\}$ $\lightning$ (☞ Abschnitt 2.3.2). Insbesondere ist also $\mathfrak{h}_{i+1} / \mathfrak{h}_{i+2} \neq \{0\}$.

Wir verwenden nun die $\mathbb{Z}$-graduierte Super-Lie-Algebra

$$\operatorname{Gr}\mathfrak{g} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{Gr}_k \mathfrak{g} = \bigoplus_{k\geq -1} \mathfrak{h}_k/\mathfrak{h}_{k+1}.$$

Da diese zur transitiven Filtrierung von $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0)$ gehört, hat sie die oben genannten Eigenschaften. Insbesondere ist $\operatorname{Gr}\mathfrak{g}$ transitiv.
Nach Definition des Superkommutators in $\operatorname{Gr}\mathfrak{g}$ gilt:

$$\left[\left(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_0\right), \left(\mathfrak{h}_{i+1}/\mathfrak{h}_{i+2}\right)\right] \subset \mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_{i+1}.$$

Es sei nun $\{v_1, \ldots, v_m\}$ eine Vektorraumbasis von $\mathfrak{h}_{i+1}/\mathfrak{h}_{i+2} = \operatorname{Gr}_{i+1}\mathfrak{g}$, $\{g\}$ Basis von $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_0 = \operatorname{Gr}_{-1}\mathfrak{g}$ und $\{h\}$ Basis von $\mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_{i+1} = \operatorname{Gr}_i\mathfrak{g}$. Dann gilt für alle $\mu \in \{1, \ldots, m\}$: $[v_\mu, g] = \lambda_\mu \cdot h$ mit $\lambda_\mu \in K$. Aus der Transitivität von $\operatorname{Gr}\mathfrak{g}$ folgt:

- $\lambda_\mu \neq 0$ für alle μ.
  Denn sonst wäre wegen der Transitivität schon $v_\mu = 0$. $\lightning$
- $\dim \mathfrak{h}_{i+1}/\mathfrak{h}_{i+2} = 1$.
  Denn andernfalls hätte man unabhängige Basisvektoren v_ν, v_μ mit $[v_\nu, g] = \lambda_\nu \cdot h$ und $[v_\mu, g] = \lambda_\mu \cdot h$. Das gäbe:

  $$\left[\left(\tfrac{1}{\lambda_\nu}v_\nu - \tfrac{1}{\lambda_\mu}v_\mu\right), g\right] = h - h = 0.$$

  Wegen der Transitivität wäre dann schon $\frac{1}{\lambda_\nu}v_\nu - \frac{1}{\lambda_\mu}v_\mu = 0$. $\lightning$

Insgesamt folgt: $\dim \mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_{i+1} = 1$ oder $\mathfrak{h}_i = \{0\}$ für alle $i \geq -1$. □

Sei $n := \dim\mathfrak{g} - 1 \in \mathbb{N}$. Dann ist also $\mathfrak{h}_n = \{0\}$. Wir wählen nun eine homogene Basis $\{x, e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ von $\mathfrak{g}$, so daß gilt:

$$x + \mathfrak{h}_0 \text{ ist eine Basis von } \mathfrak{g}/\mathfrak{h}_0 \quad \text{und} \quad e_i + \mathfrak{h}_{i+1} \text{ ist eine Basis von } \mathfrak{h}_i/\mathfrak{h}_{i+1}.$$

Für jedes $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ ist dann $\mathfrak{h}_i = \operatorname{span}\{e_i, \ldots, e_{n-1}\}$. Da die $\mathbb{Z}$-graduierte Super-Lie-Algebra $\operatorname{Gr}\mathfrak{g}$ eine konsistente $\mathbb{Z}_2$-Graduierung besitzt, gilt:

$$x \in \mathfrak{g}_{[1]} \quad \text{und} \quad e_i \in \begin{cases} \mathfrak{g}_{[0]}, & \text{falls } i \text{ gerade,} \\ \mathfrak{g}_{[1]}, & \text{falls } i \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Wir werden nun ausnutzen, daß die Filtrierung $(\mathfrak{h}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ der Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ transitiv ist. Nach Lemma 5 folgt dann:

$$\mathfrak{h}_{i+1} = \{a \in \mathfrak{h}_i \mid [a, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}_i\} \text{ für alle } i \geq 0.$$

In unserem Fall haben wir $\mathfrak{h}_i = Ke_i \oplus \mathfrak{h}_{i+1}$ für alle $i \geq 0$ sowie $\mathfrak{g} = Kx \oplus \mathfrak{h}_0$. Für alle $i \geq 1$ gilt also: $[x, e_i] \in \mathfrak{h}_{i-1}$, und es ist $[x, e_0] \in \mathfrak{g}$.

Die Jacobi-Identität liefert:

$$0 = \big[e_1, [x, x]\big] + \big[x, [x, e_1]\big] + \big[x, [e_1, x]\big]. \tag{6}$$

Wegen $x \in \mathfrak{g}_{[1]}$ und $e_1 \in \mathfrak{g}_{[1]}$ ist $[x, e_1] \in \mathfrak{g}_{[0]} \subset \mathfrak{h}_0$, und wir erhalten eine Linearkombination in $\mathfrak{h}_0$:

$$[x, e_1] = be_0 + \sum_{i \text{ gerade}, i \neq 0} d_i e_i = [e_1, x] \qquad \text{mit } b \in K \text{ und } d_i \in K. \tag{7}$$

Des weiteren ist auch $[x, x] \in \mathfrak{g}_{[0]} \subset \mathfrak{h}_0$; wir erhalten damit:

$$[x, x] = \sum_{i \text{ gerade}} k_i e_i \qquad \text{mit } k_i \in K. \tag{8}$$

Einsetzen der Gleichungen (7) und (8) in Gleichung (6) gibt:

$$\begin{aligned} 0 &= \Big[e_1, \Big(\sum_{i \text{ gerade}} k_i e_i\Big)\Big] + 2\Big[x, \Big(be_0 + \sum_{i \text{ gerade}, i \neq 0} d_i e_i\Big)\Big] \\ &= 2b\big[x, e_0\big] + \sum_{i \text{ gerade}} k_i [e_1, e_i] + 2 \sum_{i \text{ gerade}, i \neq 0} d_i [x, e_i] \end{aligned}$$

Wegen $x \in \mathfrak{g}_{[1]}$ und $e_0 \in \mathfrak{g}_{[0]}$ ist $[x, e_0] \in \mathfrak{g}_{[1]}$, und wir erhalten eine Linearkombination der Form:

$$[x, e_0] = ax + \sum_{i \text{ ungerade}} c_i e_i = -[e_0, x] \qquad \text{mit } a \in K \text{ und } c_i \in K; \tag{9}$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= 2b\Big(ax + \sum_{i \text{ ungerade}} c_i e_i\Big) + \sum_{i \text{ gerade}} k_i [e_1, e_i] + 2 \sum_{i \text{ gerade}, i \neq 0} d_i [x, e_i] \\ &= 2abx + 2b \sum_{i \text{ ungerade}} c_i e_i + \sum_{i \text{ gerade}} k_i \underbrace{[e_1, e_i]}_{\in \mathfrak{h}_0} + 2 \sum_{i \text{ gerade}, i \neq 0} d_i [x, e_i] \end{aligned}$$

Für $i \geq 2$ gilt stets: $[x, e_i] \in \mathfrak{h}_{i-1} \subset \mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_0$. Deswegen folgt mit geeigneten $\lambda_i \in K$:

$$0 = 2abx + \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i e_i.$$

Weil $\{x, e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ eine homogene Basis von $\mathfrak{g}$ ist, gilt: $2ab = 0$. Es liegt also einer der beiden folgenden Fälle vor:

- $a = 0$: Dann ist $[x, e_0] \in \mathfrak{h}_0$ nach Gleichung (9). Da für $i \geq 1$ stets $[x, e_i] \in \mathfrak{h}_0$ gilt, ist also $\left[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_0\right] \subset \mathfrak{h}_0$. Demnach ist $\mathfrak{h}_0$ ein Ideal in $\mathfrak{g}$. Da $\mathfrak{h}_0$ nach Voraussetzung keine Ideale von $\mathfrak{g}$ außer $\langle 0 \rangle$ enthält, ist folglich $\mathfrak{h}_0 = \langle 0 \rangle$. Also gilt:

$$\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{h}_0 + 1 = 0 + 1 = 1.$$

- $b = 0$: Nach Gleichung (7) ist dann $[x, e_1] \in \mathfrak{h}_1$. Außerdem ist $[x, e_i] \in \mathfrak{h}_1$ für alle $i \geq 2$, d. h. $\left[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_1\right] \subset \mathfrak{h}_1$. Daher ist $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_0$ ein Ideal von $\mathfrak{g}$; wie eben ergibt sich dann $\mathfrak{h}_1 = \langle 0 \rangle$. Es folgt:

$$\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{h}_0 + 1 = \dim \mathfrak{h}_1 + 2 = 0 + 2 = 2. \qquad \blacksquare$$

Lemma 14: *Es sei* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]} \oplus \mathfrak{g}_{[1]}$ *eine endlichdimensionale Super-Lie-Algebra über C,* $\mathfrak{g}_{[0]}$ *auflösbar. Sei* $\mathfrak{h}_0 \subsetneq \mathfrak{g}$ *eine maximale Super-Lie-Unteralgebra von* $\mathfrak{g}$ *mit* $\mathfrak{g}_{[0]} \subset \mathfrak{h}_0$*. Falls* $\mathfrak{h}_0$ *keine Ideale von* $\mathfrak{g}$ *außer* $\langle 0 \rangle$ *enthält, gilt:* $\dim \mathfrak{g} = 1$ *oder* $\dim \mathfrak{g} = 2$.

Beweis: Da $\mathfrak{h}_0$ keine Ideale von $\mathfrak{g}$ außer $\langle 0 \rangle$ enthält, läßt sich wie oben durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{i+1} &:= \{a \in \mathfrak{h}_i \mid [a, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}_i\}, \quad i \geq 0. \\ \mathfrak{h}_i &:= \mathfrak{g}, \quad i \leq -1 \end{aligned}$$

eine transitive Filtrierung von $\mathfrak{g}$ festlegen. Die zugehörige $\mathbb{Z}$-graduierte Super-Lie-Algebra ist:

$$\mathrm{Gr}\ \mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Gr}_i\ \mathfrak{g} \quad \text{mit} \quad \mathrm{Gr}_i\ \mathfrak{g} = {}^{\mathfrak{h}_i}\!/_{\mathfrak{h}_{i+1}};$$

diese erfüllt die oben aufgeführten Eigenschaften:

I. Gr $\mathfrak{g}$ ist transitiv.

II. Die $\mathbb{Z}$-Graduierung von Gr $\mathfrak{g}$ ist konsistent mit der $\mathbb{Z}_2$-Graduierung.

III. Gr $\mathfrak{g}$ ist irreduzibel.

Wir erinnern an dieser Stelle nochmal daran, daß $\mathrm{Gr}_0\ \mathfrak{g}$ eine Super-Lie-Unteralgebra in Gr $\mathfrak{g}$ ist.

Da die $\mathbb{Z}$-Graduierung von Gr $\mathfrak{g}$ konsistent ist, ist $\mathfrak{h}_0/\mathfrak{h}_1 = \mathrm{Gr}_0\ \mathfrak{g} \subset (\mathrm{Gr}\ \mathfrak{g})_{[0]}$, also $\mathfrak{h}_0/\mathfrak{h}_1 = (\mathfrak{h}_0/\mathfrak{h}_1)_{[0]}$. Jede Klasse von $\mathfrak{h}_0/\mathfrak{h}_1$ enthält folglich einen Repräsentanten aus $(\mathfrak{h}_0)_{[0]} = \mathfrak{g}_{[0]}$. Die Abbildung $\mathfrak{g}_{[0]} \hookrightarrow \mathfrak{h}_0 \twoheadrightarrow \mathfrak{h}_0/\mathfrak{h}_1$ von $\mathfrak{g}_{[0]}$ nach $\mathfrak{h}_0/\mathfrak{h}_1$ ist demnach ein surjektiver Homomorphismus von Super-Lie-Algebren. Nach Lemma 11 (I) ist damit $\mathfrak{h}_0/\mathfrak{h}_1 = \mathrm{Gr}_0\ \mathfrak{g}$ auflösbar.

Die Darstellung von $\mathrm{Gr}_0\ \mathfrak{g}$ auf $\mathrm{Gr}_{-1}\ \mathfrak{g}$ ist durch die adjungierte Darstellung ad gegeben; dabei bezeichnen wir das Bild von $\mathrm{Gr}_0\ \mathfrak{g}$ unter ad in $\mathfrak{gl}(\mathrm{Gr}_{-1}\ \mathfrak{g})$ mit

$\mathrm{ad}(\mathrm{Gr}_0\ \mathfrak{g})\big|_{\mathrm{Gr}_{-1}\ \mathfrak{g}}$. Als homomorphes Bild von $\mathrm{Gr}_0\ \mathfrak{g}$ ist $\mathrm{ad}(\mathrm{Gr}_0\ \mathfrak{g})\big|_{\mathrm{Gr}_{-1}\ \mathfrak{g}}$ eine auflösbare Super-Lie-Algebra in $\mathfrak{gl}(\mathrm{Gr}_{-1}\ \mathfrak{g})$ (☞ Lemma 11 (I)). Außerdem läßt sich $\mathrm{ad}(\mathrm{Gr}_0\ \mathfrak{g})\big|_{\mathrm{Gr}_{-1}\ \mathfrak{g}}$ wegen $\mathrm{Gr}_0\ \mathfrak{g} = (\mathrm{Gr}_0\ \mathfrak{g})_{[0]}$ auch als eine Lie-Algebra ansehen. Nach dem Satz von Lie (☞ Satz 3) gibt es damit eine Basis* von $\mathrm{Gr}_{-1}\ \mathfrak{g}$, bezüglich der für jedes $h + \mathfrak{h}_1 \in \mathrm{Gr}_0\ \mathfrak{g}$ gilt:

$$\mathrm{ad}(h + \mathfrak{h}_1)\big|_{\mathrm{Gr}_{-1}\ \mathfrak{g}} \text{ ist obere Dreiecksmatrix.}$$

Falls $\dim(\mathrm{Gr}_{-1}\ \mathfrak{g}) > 1$, existiert dann ein echter $(\mathrm{Gr}_0\ \mathfrak{g})$-Untermodul $\neq \{0\}$ von $\mathrm{Gr}_{-1}\ \mathfrak{g}$. Weil hier die Darstellung von $\mathrm{Gr}_0\ \mathfrak{g}$ auf $\mathrm{Gr}_{-1}\ \mathfrak{g}$ irreduzibel ist, folgt also: $\dim(\mathrm{Gr}_{-1}\ \mathfrak{g}) = 0$ oder $\dim(\mathrm{Gr}_{-1}\ \mathfrak{g}) = 1$.

Wäre $\dim(\mathrm{Gr}_{-1}\ \mathfrak{g}) = 0$, so wäre $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{g}$. ↯ Also ist $\dim(\mathrm{Gr}_{-1}\ \mathfrak{g}) = 1$, das heißt, $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{h}_0 + 1$. Nach Lemma 13 gilt dann: $\dim \mathfrak{g} = 1$ oder $\dim \mathfrak{g} = 2$. ■

Wir können nun den Satz von Kac beweisen:

Beweis (Satz 4): „$\Rightarrow$“: Klar nach Lemma 11, da $\mathfrak{g}_{[0]} \subset \mathfrak{g}$ Super-Lie-Unteralgebra.

„$\Leftarrow$“: Wir führen eine Induktion nach $\dim \mathfrak{g}$ durch. Falls $\dim \mathfrak{g} \in \{0, 1, 2\}$, ist $\mathfrak{g}$ stets auflösbar (☞ Abschnitt 2.4.1).

Sei nun $\dim \mathfrak{g} = n > 2$ und $\mathfrak{g}_{[0]}$ auflösbar. Falls $\mathfrak{g}_{[0]} = \{0\}$ ist, ist $\mathfrak{g}$ abelsch und damit auflösbar. Es gilt dann nämlich: $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}_{[1]}, \mathfrak{g}_{[1]}] \subset \mathfrak{g}_{[0]} = \{0\}$.

Sei also $\mathfrak{g}_{[0]} \neq \{0\}$. Es sei $\mathfrak{h}_0 \subsetneq \mathfrak{g}$ eine maximale Super-Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{g}_{[0]} \subset \mathfrak{h}_0$. Aus Dimensionsgründen muß $\mathfrak{h}_0$ nach Lemma 14 ein Ideal $\mathfrak{a} \neq \langle 0 \rangle$ enthalten. O. B. d. A. sei $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{h}_0$ maximal, d. h. in $\mathfrak{h}_0$ existiere kein Ideal von $\mathfrak{g}$, das $\mathfrak{a}$ echt enthält. In $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ ist dann $\mathfrak{h}_0/\mathfrak{a}$ eine maximale Super-Lie-Unteralgebra, welche keine Ideale von $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ außer $\langle 0 \rangle$ enthält. Da $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})_{[0]} \subset \mathfrak{h}_0/\mathfrak{a}$ als homomorphes Bild von $\mathfrak{g}_{[0]}$ auflösbar ist, folgt mit Lemma 14: $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{a} = 1$ oder $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{a} = 2$. Demnach ist $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ auflösbar. Nach Induktion ist $\mathfrak{a}$ auflösbar (denn wegen $\mathfrak{a}_{[0]} \subset \mathfrak{g}_{[0]}$ ist $\mathfrak{a}_{[0]}$ auflösbar). Nach Lemma 11 (II) ist dann $\mathfrak{g}$ auflösbar. ■

Korollar: *Für eine endlichdimensionale Super-Lie-Algebra* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]} \oplus \mathfrak{g}_{[1]}$ *über einem beliebigen Körper* K *mit* $\mathrm{char}(K) = 0$ *gilt:*

$$\mathfrak{g} \textit{ auflösbar} \iff \mathfrak{g}_{[0]} \textit{ auflösbar}.$$

Beweis: Es sei C der algebraische Abschluß von K. Aus Lemma 12 und dem Satz von Kac (Satz 4) folgt:

$$\mathfrak{g} \text{ auflösbar} \Leftrightarrow \mathfrak{g}_C \text{ auflösbar} \Leftrightarrow (\mathfrak{g}_C)_{[0]} \text{ auflösbar} \Leftrightarrow \mathfrak{g}_{[0]} \text{ auflösbar.} \qquad ■$$

*Man beachte: Wegen der Konsistenz der $\mathbb{Z}$-Graduierung von $\mathrm{Gr}\ \mathfrak{g}$ ist $\mathrm{Gr}_{-1}\ \mathfrak{g} = (\mathrm{Gr}_{-1}\ \mathfrak{g})_{[1]}$. Ein Basiswechsel in $\mathrm{Gr}_{-1}\ \mathfrak{g}$ ist daher ohne Probleme möglich.

2.5 Nilpotente Super-Lie-Algebren

2.5.1 Definition und Grundlagen

Sei $\mathfrak{g}$ eine Super-Lie-Algebra. Die *absteigende Zentralreihe* von $\mathfrak{g}$ ist eine Kette von graduierten Idealen $\mathfrak{C}^i\mathfrak{g}$, $i \in \mathbb{N}$, die wie folgt rekursiv definiert ist:

$$\mathfrak{C}^0\mathfrak{g} := \mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{C}^{i+1}\mathfrak{g} := \left[\mathfrak{g}, \mathfrak{C}^i\mathfrak{g}\right] \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Es ist stets $\mathfrak{C}^i \supset \mathfrak{C}^{i+1}$, und insbesondere gilt: $\mathfrak{C}^1\mathfrak{g} = \left[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}\right] = \mathfrak{D}\mathfrak{g}$.

Definition 22: *Eine Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt **nilpotent**, wenn $\mathfrak{C}^i\mathfrak{g} = \{0\}$ ist für ein $i \in \mathbb{N}$.*

Bemerkung: Es ist stets $\mathfrak{D}^i\mathfrak{g} \subset \mathfrak{C}^i\mathfrak{g}$. Eine nilpotente Super-Lie-Algebra ist also insbesondere auflösbar.

Beispiele:

- Kommutative Super-Lie-Algebren sind nilpotent, also insbesondere Super-Lie-Algebren der Dimension 1.
- Die zweidimensionale Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]} \oplus \mathfrak{g}_{[1]}$, für die $\dim \mathfrak{g}_{[0]} = 1$, $\dim \mathfrak{g}_{[1]} = 1$ und $\mathfrak{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]}$ gilt, ist nilpotent, denn:

  $$\mathfrak{C}^2\mathfrak{g} = \left[\mathfrak{g}, \mathfrak{D}\mathfrak{g}\right] = \left[\mathfrak{g}_{[0]}, \mathfrak{g}_{[0]}\right] + \left[\mathfrak{g}_{[1]}, \mathfrak{g}_{[0]}\right] = \{0\}.$$

  Es handelt sich dabei um die einzige zweidimensionale Super-Lie-Algebra, welche nilpotent, aber nicht abelsch ist (☞ Abschnitt 2.2 auf Seite 13).
- Einfache Super-Lie-Algebren sind nicht auflösbar, also auch nicht nilpotent.

Man kommt bei der Definition von nilpotenten Super-Lie-Algebren auch ohne die absteigende Zentralreihe aus. Das folgende Lemma liefert eine gleichwertige Aussage:

Lemma 15: *Für eine Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*
I: *$\mathfrak{g}$ nilpotent.*
II: *Es gibt eine endliche Kette $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_1 \supset \mathfrak{a}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{a}_k = \{0\}$ von graduierten Idealen $\mathfrak{a}_i$, für die gilt: $\left[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_i\right] \subset \mathfrak{a}_{i+1}$.*

Beweis: „I ⇒ II“: Sei $\mathfrak{g}$ nilpotent. Dann bricht die absteigende Zentralreihe von $\mathfrak{g}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ab, d. h. $\mathfrak{C}^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Jedes $\mathfrak{C}^i(\mathfrak{g})$ ist ein graduiertes Ideal in $\mathfrak{g}$; und nach Definition gilt stets: $\left[\mathfrak{g}, \mathfrak{C}^i(\mathfrak{g})\right] = \mathfrak{C}^{i+1}(\mathfrak{g})$.

„II ⇒ I“: Per Induktion folgt: Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist $\mathfrak{C}^i(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{a}_i$. Da $\mathfrak{a}_k = \{0\}$ für ein k, ist $\mathfrak{C}^k(\mathfrak{g}) = \{0\}$ und $\mathfrak{g}$ also nilpotent. ■

Im folgenden Lemma sind einige Aussagen über nilpotente Super-Lie-Algebren zusammengefaßt (vgl. Humphreys, 1972, Seite 12):

Lemma 16: *Sei $\mathfrak{g}$ eine Super-Lie-Algebra. Dann gilt:*

I: *$\mathfrak{g}$ nilpotent $\Rightarrow$ alle Super-Lie-Unteralgebren und alle homomorphen Bilder von $\mathfrak{g}$ sind nilpotent.*

II: *Ist $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ ein graduiertes Ideal in $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ nilpotent, so ist $\mathfrak{g}$ nilpotent.*

III: *Ist $\mathfrak{g} \neq \{0\}$ eine nilpotente Super-Lie-Algebra, so ist $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$.*

Beweis: I: Analog zum auflösbaren Fall (☞ Lemma 11).

II: Für ein i ist $\mathfrak{C}^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = \{0\}$, also $\mathfrak{C}^i\mathfrak{g} \subset \mathfrak{a}$. Da $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, folgt:

$$\mathfrak{C}^{i+1}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{C}^i\mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})] = \{0\}.$$

III: Da $\mathfrak{g}$ nilpotent ist und $\mathfrak{g} \neq \{0\}$, gibt es ein kleinstes $i > 0$, für welches gilt: $\{0\} = \mathfrak{C}^i\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{C}^{i-1}\mathfrak{g}]$. Also ist $\{0\} \neq \mathfrak{C}^{i-1}\mathfrak{g} \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, d. h. $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$. ■

2.5.2 Das Nilradikal einer Super-Lie-Algebra

Neben dem auflösbaren Radikal $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ – dem eindeutigen maximalen auflösbaren Ideal – verfügt jede endlichdimensionale Super-Lie-Algebra auch über ein eindeutiges maximales nilpotentes Ideal. Um Existenz und Eindeutigkeit davon zu zeigen, benötigen wir allerdings etwas mehr Aufwand.

Unser Ziel ist es, folgende Aussage zu zeigen:

Lemma 17: *$\mathfrak{g}$ sei eine endlichdimensionale Super-Lie-Algebra; $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ seien nilpotente graduierte Ideale in $\mathfrak{g}$. Dann ist auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ein nilpotentes graduiertes Ideal in $\mathfrak{g}$.*

Bevor wir dieses Lemma beweisen, betrachten wir zunächst einen speziellen Fall:

Lemma 18: *Es sei $\mathfrak{g}$ eine Super-Lie-Algebra, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ seien nilpotente graduierte Ideale in $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \{0\}$. Dann ist auch das graduierte Ideal $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ nilpotent.*

Beweis: Wir zeigen per Induktion nach i:

$$\mathfrak{C}^i(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \mathfrak{C}^i\mathfrak{a} + \mathfrak{C}^i\mathfrak{b} \qquad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Für $i = 0$ ist nichts zu tun.

Die obige Behauptung sei nun für ein i erfüllt. Dann folgt für $i+1$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}^{i+1}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) &= \big[\mathfrak{a}+\mathfrak{b}, \mathfrak{C}^{i}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\big] \\
&= \big[\mathfrak{a}+\mathfrak{b}, \mathfrak{C}^{i}\mathfrak{a}+\mathfrak{C}^{i}\mathfrak{b}\big] \qquad \text{nach Induktion} \\
&= \big[\mathfrak{a}, \mathfrak{C}^{i}\mathfrak{a}\big] + \big[\mathfrak{b}, \mathfrak{C}^{i}\mathfrak{b}\big] \qquad \text{wegen } [a,b]=0 \text{ für } a\in\mathfrak{a} \text{ und } b\in\mathfrak{b} \\
&= \mathfrak{C}^{i+1}\mathfrak{a}+\mathfrak{C}^{i+1}\mathfrak{b}.
\end{aligned}$$

Falls $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beide nilpotent, gibt es also ein k, so daß $\mathfrak{C}^k\mathfrak{a} = \{0\}$ und $\mathfrak{C}^k\mathfrak{b} = \{0\}$. Dann ist auch $\mathfrak{C}^k(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \{0\}$, d. h. $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ nilpotent. ∎

Beweis (Lemma 17): Seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ zwei nilpotente graduierte Ideale einer Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$; dabei sei o. B. d. A. stets $\dim\mathfrak{b} \leq \dim\mathfrak{a}$.

Für $\mathfrak{b} = \{0\}$ ist nichts zu zeigen: Dann ist $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, also nilpotent.

Im folgenden sei $\mathfrak{a} \neq \{0\}$ und $\mathfrak{b} \neq \{0\}$, also $1 \leq \dim\mathfrak{b} \leq \dim\mathfrak{a}$. Nach Lemma 16 (III) ist dann $\mathfrak{Z}(\mathfrak{a}) \neq \{0\}$ und $\mathfrak{Z}(\mathfrak{b}) \neq \{0\}$.

Wir führen nun Induktion nach $\dim\mathfrak{a}$ durch:

- $\dim\mathfrak{a} = 1$: Dann ist auch $\dim\mathfrak{b} = 1$. Es gibt nun zwei Fälle:
  - $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$: Dann ist $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, also nilpotent
  - $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b} = \{0\}$: Dann ist $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ nilpotent nach Lemma 18.
- Die Aussage von Lemma 17 sei wahr für $n = \dim\mathfrak{a} \geq \dim\mathfrak{b} \geq 1$.

  Sei nun $n+1 = \dim\mathfrak{a} \geq \dim\mathfrak{b}$. Da $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beide nilpotent, gilt nach Lemma 16 (I):
  $$\mathrm{ad}(\mathfrak{a}) \text{ und } \mathrm{ad}(\mathfrak{b}) \text{ sind beide nilpotent.}$$
  Dabei sind $\mathrm{ad}(\mathfrak{a})$ und $\mathrm{ad}(\mathfrak{b})$ jeweils wieder graduierte Ideale in $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$. Wegen $\mathrm{ad}(\mathfrak{a}) \cong \mathfrak{a}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{a})$ ist $\dim\big(\mathrm{ad}(\mathfrak{a})\big) < \dim(\mathfrak{a})$; entsprechendes gilt für $\mathrm{ad}(\mathfrak{b})$. Damit gilt nach Induktion:
  $$\big(\mathrm{ad}(\mathfrak{a})+\mathrm{ad}(\mathfrak{b})\big) \text{ ist nilpotentes Ideal in } \mathrm{ad}(\mathfrak{g}).$$
  Wegen der Linearität von ad ist $\mathrm{ad}(\mathfrak{a})+\mathrm{ad}(\mathfrak{b}) \cong \mathrm{ad}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$. Damit folgt:
  $$\left.\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\middle/\mathfrak{Z}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\right. \cong \mathrm{ad}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \text{ ist nilpotent.}$$
  Nach Lemma 16 (II) ist also $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ nilpotent. ∎

Korollar: *Eine endlichdimensionale Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ hat ein eindeutiges maximales nilpotentes graduiertes Ideal, welches alle nilpotenten Ideale enthält.*

Beweis: Analog zum auflösbaren Fall (☞ Korollar zu Lemma 11 auf Seite 26). ∎

Definition 23: *Das maximale nilpotente graduierte Ideal einer endlichdimensioanlen Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ heißt **Nilradikal**. Es wird mit $\mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ bezeichnet.*

Bemerkung: Ein nilpotentes Ideal ist auch auflösbar, damit gilt stets: $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$.

2.5.3 Der Satz von Engel

Im Unterschied zum Satz von Lie gilt der Satz von Engel auch für nilpotente Super-Lie-Algebren*. Wir formulieren den Satz hier etwas schärfer als in der Literatur, indem wir die Existenz eines *homogenen* simultanen Eigenvektors v zum Eigenwert 0 behaupten:

Satz 5 (Engel)**:** *Sei $V \neq \{0\}$ ein $\mathbb{Z}_2$-graduierter Vektorraum,* $\dim V < \infty$*. Sei $\mathfrak{g}$ eine Super-Lie-Algebra und $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ eine Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf V. Falls $\rho(x)$ für jedes homogene $x \in \mathfrak{g}$ eine nilpotente lineare Abbildung ist, gibt es ein homogenes $0 \neq v \in V$ mit $\rho(x)(v) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$.*

Bevor wir diesen Satz beweisen, betrachten wir zunächst ein Lemma:

Lemma 19: *Sei V ein $\mathbb{Z}_2$-graduierter Vektorraum. Sei $x \in \mathfrak{gl}(V)$ eine $\mathbb{Z}_2$-homogene nilpotente lineare Abbildung $V \to V$. Dann ist $\mathrm{ad}(x) \in \mathfrak{gl}\big(\mathfrak{gl}(V)\big)$ ebenfalls nilpotent.*

Beweis: Für ein homogenes $y \in \mathfrak{gl}(V)$ gilt

$$\mathrm{ad}(x)(y) = [x, y] = xy - (-1)^{\alpha(x)\alpha(y)} yx.$$

Da x nilpotent, ist $x^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Durch $(2n-1)$-fache Anwendung von $\mathrm{ad}(x)$ erhält man:

$$\big(\mathrm{ad}(x)\big)^{2n-1}(y) = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k \cdot x^k y x^{2n-1-k}$$

mit Koeffizienten $a_k \in K$. Dabei ist stets $k \geq n$ oder $2n-1-k \geq n$, d. h. für jedes k ist $x^k = 0$ oder $x^{2n-1-k} = 0$. Also ist $\big(\mathrm{ad}(x)\big)^{2n-1} \equiv 0$, d. h. $\mathrm{ad}(x)$ ist nilpotent. ∎

Für den Beweis des Satzes von Engel orientieren wir uns an Humphreys (1972, Seite 12f). Wir benötigen dabei den Normalisator einer Super-Lie-Unteralgebra:

*Notiert ist der Satz von Engel für Super-Lie-Algebren beispielsweise an folgenden Stellen, allerdings ohne Beweis: Kac (1977a), Seite 18; Kac (1977b), Seite 37; Scheunert (1979), Seite 236.

Definition 24: *Sei $\mathfrak{g}$ eine Super-Lie-Algebra und $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$ eine Super-Lie-Unteralgebra. Der* ***Normalisator von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$*** *ist*

$$\mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \big\{ x \in \mathfrak{g} \,\big|\, [x,h] \in \mathfrak{h} \text{ für alle } h \in \mathfrak{h} \big\}.$$

Man prüft leicht nach, daß der Normalisator eine Super-Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist mit $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Bei dem Normalisator $\mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ handelt es sich um die größte Super-Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, in der $\mathfrak{h}$ ein graduiertes Ideal ist.

Beweis (Satz 5 – Engel): Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir $\mathfrak{g}$ statt $\rho(\mathfrak{g})$ und dementsprechend x anstelle von $\rho(x)$. Für den Beweis führen wir eine Induktion nach $\dim \mathfrak{g}$; hierbei ist für $\dim \mathfrak{g} = 0$ nichts zu tun.

Für $\dim \mathfrak{g} = 1$ ist $\mathfrak{g} \subset \big(\mathfrak{gl}(V)\big)_{[0]}$ oder $\mathfrak{g} \subset \big(\mathfrak{gl}(V)\big)_{[1]}$. Für ein $x \in \mathfrak{g}$ sei $n \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit $x^n = 0$. Wegen $x^{n-1} \neq 0$ gibt es damit ein $v = v_0 + v_1 \in V \setminus \{0\}$ mit homogenen Komponenten $v_0 \in V_{[0]}$ und $v_1 \in V_{[1]}$, so daß gilt:

$$0 \neq x^{n-1}(v) = x^{n-1}(v_0) + x^{n-1}(v_1).$$

Da die lineare Abbildung x homogen vom Grad $[0]$ oder homogen vom Grad $[1]$ ist, sind $x^{n-1}(v_0)$ und $x^{n-1}(v_1)$ die homogenen Komponenten von $x^{n-1}(v)$. Da $x^{n-1}(v) \neq 0$, sei ohne Einschränkung $x^{n-1}(v_0) \neq 0$. Es ist dann $x^n(v_0) = 0$; wegen $\mathfrak{g} = Kx$ ist also $g\big(x^{n-1}(v_0)\big) = 0$ für alle $g \in \mathfrak{g}$.

Sei nun $\dim \mathfrak{g} > 1$. Es sei $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{g}$ eine maximale Super-Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$, für diese gilt dann: $\dim \mathfrak{h} \geq 1$. Wegen $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ sind alle homogenen Elemente von $\mathfrak{h}$ nilpotent; nach Lemma 19 ist dann für jedes homogene $h \in \mathfrak{h}$ auch $\mathrm{ad}(h)$ eine nilpotente Abbildung. Da $\mathrm{ad}(h)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$, operiert $\mathfrak{h}$ auch auf dem Quotientenvektorraum $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ via:

$$h.(g + \mathfrak{h}) := \mathrm{ad}(h)(g) + \mathfrak{h} = [h,g] + \mathfrak{h} \quad \text{für } h \in \mathfrak{h},\ g + \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}.$$

Da $\dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g}$, gibt es nach Induktionsvoraussetzung ein homogenes Element $x + \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ mit $x + \mathfrak{h} \not\equiv 0$, so daß gilt:

$$h.(x + \mathfrak{h}) \equiv 0 \quad \text{für alle } h \in \mathfrak{h},$$

d. h. es ist $[h,x] \in \mathfrak{h}$ für alle $h \in \mathfrak{h}$. Demnach ist x ein Element des Normalisators $\mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$; wegen $x \notin \mathfrak{h}$ ist also $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Da der Normalisator eine Super-Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ ist, folgt $\mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{g}$ wegen der Maximalität von $\mathfrak{h}$. Also ist $\mathfrak{h}$ ein graduiertes Ideal in $\mathfrak{g}$.

Nach Abschnitt 2.1.2 ist der Quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ eine Super-Lie-Algebra. Außerdem ist $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} = 1$. Dieses zeigen wir indirekt. Sei also $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h} > 1$. Es gibt dann in $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ eine echte Super-Lie-Unteralgebra $\mathfrak{e}$ der Dimension 1; denn für $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})_{[0]} \neq \{0\}$ ist jeder eindimensionale Unterraum von $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})_{[0]}$ eine Super-Lie-Unteralgebra, andernfalls gilt dieses für jeden eindimensionalen Unterraum von $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})_{[1]}$. Das Urbild von $\mathfrak{e}$ unter der Quotientenabbildung $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ ist eine echte Super-Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{h} \subsetneq \mathfrak{e}$. $\lightning$ Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{h}$.

Damit folgt: $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = K(x + \mathfrak{h})$ mit dem oben eingeführten $x \in \mathfrak{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$. Da das Element $x + \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ homogen ist, sei o. B. d. A. schon $x \in \mathfrak{g}$ ein homogener Repräsentant. Es ist dann $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + Kx$.

Wir betrachten nun den Vektorraum

$$W := \operatorname{span}\big\{v \in V_{[0]} \cup V_{[1]} \;\big|\; h(v) = 0 \text{ für alle } h \in \mathfrak{h}\big\}.$$

Nach Konstruktion ist W ein $\mathbb{Z}_2$-graduierter Vektorraum, da er von homogenen Elementen erzeugt wird. Da $\dim \mathfrak{h} < \dim \mathfrak{g}$, ist nach Induktionsvoraussetzung $W \neq \{0\}$.

Für ein homogenes $g \in \mathfrak{g}$ und ein homogenes $w \in W$ ist $g(w) \in V_{[0]} \cup V_{[1]}$. Da $\mathfrak{h} \in \mathfrak{g}$ ein Ideal ist, folgt für ein homogenes $h \in \mathfrak{h}$ mit der Jacobi-Identität:

$$h\big(g(w)\big) = (-1)^{\alpha(h)\alpha(g)} g\big(\underbrace{h(w)}_{=0}\big) + \underbrace{\overbrace{[h,g]}^{\in\mathfrak{h}}(w)}_{=0} = 0.$$

Also ist $g(w) \in W$, d. h. der Vektorraum W ist unter $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + Kx$ stabil.

Da das Element $x \in \mathfrak{g}$ homogen ist, ist es nach Voraussetzung nilpotent. Wie im Fall „$\dim \mathfrak{g} = 1$“ zeigt man, daß ein homogenes $v \in W$ existiert mit $x(v) = 0$. Für dieses homogene v ist also $g(v) = 0$ für alle $g \in \mathfrak{g}$. ∎

Für die Formulierung des folgendes Korollars benötigen wir den Begriff einer *graduierten Fahne* in V; darunter verstehen wir eine Kette

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

von $\mathbb{Z}_2$-graduierten Untervektorräumen V_i von V mit $\dim V_i = i$.

Korollar: *Unter den Voraussetzungen von Satz 5 hat der $\mathbb{Z}_2$-graduierte Vektorraum V eine graduierte Fahne von $\mathbb{Z}_2$-graduierten Untervektorräumen V_i, so daß für alle $x \in \mathfrak{g}$ gilt: $\rho(x)(V_i) \subset V_{i-1}$ für alle $i \geq 1$. Mit anderen Worten: Es gibt eine homogene Basis von V, bezüglich der für jedes $x \in \mathfrak{g}$ die lineare Abbildung $\rho(x)$ durch eine strikte obere Dreiecksmatrix gegeben ist.*

Beweis: Wir zeigen das Korollar durch Induktion nach $\dim V > 0$; dabei sind wir für $\dim V = 1$ fertig nach Satz 5.

Sei nun $\dim V \geq 2$. Nach Satz 5 existiert ein homogenes Element $v \in V$, so daß $\rho(x)(v) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{g}$. Auf dem $\mathbb{Z}_2$-graduierten Vektorraum $V/(Kv)$ definieren wir eine Darstellung $\widehat{\rho}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V/(Kv))$ von $\mathfrak{g}$ durch

$$\widehat{\rho}(g)(w + Kv) := \rho(g)(w) + Kv \quad \text{für alle } g \in \mathfrak{g},\ w + Kv \in {}^{V}\!/_{Kv}.$$

Diese Darstellung ist wohldefiniert, und für jedes homogene $x \in \mathfrak{g}$ ist $\widehat{\rho}(x)$ eine nilpotente Abbildung. Da $\dim V/(Kv) < \dim V$, existiert nach Induktionsvoraussetzung eine graduierte Fahne

$$\{0\} = \widehat{V}_0 \subset \widehat{V}_1 \subset \ldots \subset \widehat{V}_{n-1} = {}^{V}\!/_{(Kv)}$$

von $\mathbb{Z}_2$-graduierten Untervektorräumen $\widehat{V}_i$ von $V/(Kv)$, so daß stets $\widehat{\rho}\big(\widehat{V}_i\big) \subset V_{i-1}$. Diese graduierte Fahne liftet zu einer graduierten Fahne

$$\{0\} = V_0 \subset V_1 = Kv \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = V$$

von V mit $V_i/(Kv) = \widehat{V}_{i-1}$ für $i \geq 1$.

Für ein $v_i \in V_i$ mit $i \geq 1$ ist also $v_i + Kv \in \widehat{V}_{i-1}$. Für dieses gilt:

$$\widehat{\rho}(v_i + Kv) = \rho(v_i) + Kv \in \widehat{V}_{i-2}.$$

Folglich ist $\rho(v_i) \in V_{i-1}$, d. h. $\rho(V_i) \subset V_{i-1}$ für alle $i \geq 1$. ■

Korollar: *Für eine Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ gilt:*

$$\mathfrak{g} \textit{ nilpotent } \iff \mathrm{ad}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \textit{ ist nilpotente lineare Abbildung}$$
$$\textit{für jedes homogene } x \in \mathfrak{g}.$$

Beweis: „$\Rightarrow$“: Für ein $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathfrak{C}^n\mathfrak{g} = \{0\}$, da $\mathfrak{g}$ nilpotent ist. Sei $x \in \mathfrak{g}_{[0]} \cup \mathfrak{g}_{[1]}$, also homogen. Es genügt, $\mathrm{ad}(x)$ auf ein beliebiges homogenes $y \in \mathfrak{g}$ anzuwenden. Dabei ist $\mathrm{ad}(x)(y) = [x,y] \in \mathfrak{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{C}^1\mathfrak{g}$ und allgemein $(\mathrm{ad}(x))^i(y) \in \mathfrak{C}^i\mathfrak{g}$. Insbesondere gilt $(\mathrm{ad}(x))^n(y) \in \mathfrak{C}^n\mathfrak{g} = \{0\}$; also ist $\mathrm{ad}(x)$ nilpotent.

„$\Leftarrow$“: Wir führen Induktion nach $\dim \mathfrak{g}$ durch. Falls $\dim \mathfrak{g} = 0$, ist nichts zu tun. Sei also $\dim \mathfrak{g} \geq 1$. Da für jedes homogene $x \in \mathfrak{g}$ die Abbildung $\mathrm{ad}(x) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ nilpotent ist, existiert nach Satz 5 ein homogenes Element $0 \neq z \in \mathfrak{g}$, so daß $\mathrm{ad}(x)(z) = [x,z] = 0$ ist für alle $x \in \mathfrak{g}$. Demnach ist $z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, und es gilt: $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) < \dim \mathfrak{g}$. Außerdem ist für alle homogenen Elemente $x + \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ die Abbildung $\mathrm{ad}(x + \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})) \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}))$ nilpotent. Nach Induktionsvoraussetzung ist damit $\mathfrak{g}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ eine nilpotente Super-Lie-Algebra, d. h. $\mathfrak{g}$ ist nilpotent nach Lemma 16 (II). ■

3 Die universelle einhüllende Superalgebra

In diesem Kapitel werden wir die universelle einhüllende Superalgebra einer Super-Lie-Algebra konstruieren sowie einige ihrer Eigenschaften vorstellen. Wichtigstes Ergebnis ist der Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt, der eine Vektorraumbasis der universellen einhüllenden Superalgebra angibt. Wir werden eine Folgerung aus diesem Satz benötigen, um in Kapitel 4 den Satz von Ado zu beweisen.

In der Literatur orientieren wir uns hier vorwiegend an Scheunert (1979) und Knapp (2002). Dabei legen wir im folgenden stets einen Körper K der Charakteristik 0 zugrunde.

3.1 Vorbemerkungen über Superalgebren

Wir erinnern daran, daß eine Superalgebra eine $\mathbb{Z}_2$-graduierte Algebra ist. Im folgenden werden wir insbesondere den Begriff eines Superalgebren-Homomorphismus benötigen. Die Definition ist analog zum Homomorphismus zwischen Super-Lie-Algebren (☞ Abschnitt 2.1.3):

Definition 25: *Seien $A = A_{[0]} \oplus A_{[1]}$, $B = B_{[0]} \oplus B_{[1]}$ Superalgebren. Eine lineare Abbildung $\phi\colon A \to B$ heißt **Superalgebren-Homomorphismus**, wenn gilt:*

$$\begin{aligned} &\phi(A_\nu) \subset B_\nu, \quad \nu \in \mathbb{Z}_2, \\ &\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y) \quad \text{für alle } x, y \in A. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Ein Superalgebren-Homomorphismus ist ein Algebren-Homomorphismus, der zusätzlich homogen vom Grad $[0]$ ist, d. h. die $\mathbb{Z}_2$-Graduierung respektiert. Der Kern $\operatorname{Ker} \phi$ ist dabei – genauso wie bei Super-Lie-Algebren – ein graduiertes Ideal in A.

Außerdem werden wir noch Co-Filtrierungen von Superalgebren verwenden:

Definition 26: *Sei A eine Superalgebra und $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie von $\mathbb{Z}_2$-graduierten Untervektorräumen von A. Wir nennen die Familie $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine **Co-Filtrierung***, wenn gilt:*

(C1) $U_i \subset U_{i+1}$ *für alle* $i \in \mathbb{N}$,

(C2) $U_i U_j \subset U_{i+j}$,

(C3) $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i = A$.

*In der Literatur findet man hierfür ebenfalls den Begriff *Filtrierung*, vgl. beispielsweise: Bourbaki (1975), Seite 17; Humphreys (1972), Seite 91; Jacobson (1966), Seite 164; Knapp (2002), Seite 654ff; Scheunert (1979), Seite 25. Wir haben den Begriff *Co-Filtrierung* gewählt, weil die Räume U_i aufsteigend sind – im Gegensatz zu unserer Definition einer Filtrierung, vgl. Abschnitt 2.3.2 auf Seite 16.

3.2 Die Tensor-Superalgebra

3.2.1 Definition

Für einen $\mathbb{Z}_2$-graduierten K-Vektorraum V definieren wir Vektorräume T^iV wie folgt:

$$T^0V := K, \quad T^1V := V, \quad T^2V := V \otimes V, \quad T^3V := V \otimes V \otimes V, \dots$$
$$T^nV := V \otimes \ldots \otimes V \quad (n\text{-faches Tensorprodukt von } V).$$

Auf T^2V legen wir dabei eine $\mathbb{Z}_2$-Graduierung fest durch:

$$(V \otimes V)_{[0]} := \left\{ \sum_i^{<\infty} (x_i \otimes y_i) \,\middle|\, \forall i\colon x_i, y_i \in V_{[0]} \text{ oder } x_i, y_i \in V_{[1]} \right\},$$
$$(V \otimes V)_{[1]} := \left\{ \sum_i^{<\infty} (x_i \otimes y_i) \,\middle|\, \forall i\colon x_i \in V_{[0]}, y_i \in V_{[1]} \text{ oder } x_i \in V_{[1]}, y_i \in V_{[0]} \right\}.$$

Daraus läßt sich die $\mathbb{Z}_2$-Graduierung von jedem T^nV, $n \geq 2$, rekursiv konstruieren. Es gilt die folgende Aussage:

Lemma 20: *In T^nV gilt für $n \geq 2$:*
- *$(T^nV)_{[0]}$ enthält alle endlichen Summen von Elementen der Form $\bigotimes_{i=1}^n x_i$, für die gilt: Die Anzahl der $x_i \in V_{[1]}$ ist gerade.*
- *$(T^nV)_{[1]}$ enthält alle endlichen Summen von Elementen der Form $\bigotimes_{i=1}^n x_i$, für die gilt: Die Anzahl der $x_i \in V_{[1]}$ ist ungerade.*

Bemerkung: Für die Parität von $0 \neq \bigotimes_{i=1}^n x_i \in T^nV$ gilt mit der Paritätsfunktion α: $\alpha(\bigotimes_{i=1}^n x_i) = \sum_{i=1}^n \alpha(x_i) \in \mathbb{Z}_2$.

Wir setzen nun $\mathcal{T}(V) := \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} T^iV$; das ist ebenfalls ein $\mathbb{Z}_2$-graduierter Vektorraum mit $\mathcal{T}(V)_\nu = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} (T^iV)_\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}_2$. Auf $\mathcal{T}(V)$ definieren wir eine assoziative Multiplikation $T^nV \times T^mV \to T^{n+m}V$ durch:

$$(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) \cdot (y_1 \otimes \ldots \otimes y_m) := x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_m \quad \text{für } n, m \neq 0.$$

Für $n = 0$ oder $m = 0$ erhalten wir die übliche Vielfachenbildung mit Skalaren aus dem Körper K; diese ist verträglich mit der obigen Multiplikation.

Es gilt $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$, daher werden wir die Symbole $\otimes$ später weglassen. Um eine bessere Übersicht zu erhalten, werden wir manchmal x_ix_j schreiben anstelle von $x_i \cdot x_j$.

Man sieht leicht, daß bei dieser Multiplikation $\mathcal{T}(V)_\nu \cdot \mathcal{T}(V)_\mu \subset \mathcal{T}(V)_{\nu+\mu}$ mit $\nu, \mu \in \mathbb{Z}_2$ erfüllt ist. Also ist $\mathcal{T}(V)$ eine *Superalgebra*.

Definition 27: *Die Superalgebra $\mathcal{T}(V)$ heißt* ***Tensor-Superalgebra*** *von V.*

Bemerkung: Für einen nicht graduierten Vektorraum V läßt sich analog die sogenannte Tensoralgebra definieren, vgl. hierzu beispielsweise Hilgert u. Neeb (1991), Seite 166; Humphreys (1972), Seite 89; Knapp (2002), Seite 643f.

Die Tensor-Superalgebra $\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} T^iV$ läßt sich auch als eine $\mathbb{Z}$-graduierte Superalgebra ansehen, indem wir $T^kV := \{0\}$ setzen für $k < 0$. Wir erhalten dann $\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} T^iV \cong \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} T^iV$.

Wenn wir im folgenden bei einer Superalgebra $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_i$ von einer $\mathbb{Z}$-Graduierung sprechen, so meinen wir implizit die isomorphe Superalgebra $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ mit $A_i = \{0\}$ für $i < 0$.

Für $\mathcal{T}(V)$ existiert eine natürliche Co-Filtrierung $(T_n(V))_{n\in\mathbb{N}}$, welche wie folgt gegeben ist:

$$T_n(V) := \bigoplus_{i=0}^{n} T^iV, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.2.2 Universelle Eigenschaft

Die Tensor-Superalgebra hat folgende universelle Abbildungseigenschaft*:

Satz 6: *Sei V ein $\mathbb{Z}_2$-graduierter Vektorraum und $\epsilon\colon V \hookrightarrow \mathcal{T}(V)$ die kanonische Einbettung von V in die Tensor-Superalgebra via $\epsilon(V) = T^1V$. Sei A eine assoziative Algebra mit Eins. Sei $\varphi\colon V \to A$ eine lineare Abbildung. Dann gibt es einen eindeutigen Algebren-Homomorphismus $\widetilde{\varphi}\colon \mathcal{T}(V) \to A$ mit $\widetilde{\varphi}(1) = 1$, so daß folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\epsilon"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathcal{T}(V) \arrow[dl, "\widetilde{\varphi}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Beweis: Zur Eindeutigkeit: Da 1 und V die Tensor-Superalgebra $\mathcal{T}(V)$ als Algebra erzeugen, ist $\widetilde{\varphi}$ eindeutig bestimmt. Denn für ein beliebiges $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \in \mathcal{T}(V)$ folgt:

$$\widetilde{\varphi}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = \widetilde{\varphi}(x_1) \cdot \ldots \cdot \widetilde{\varphi}(x_n) = \varphi(x_1) \cdot \ldots \cdot \varphi(x_n).$$

*Für die Tensoralgebra eines nicht graduierten Vektorraumes V gilt eine entsprechende Aussage, siehe beispielsweise: Hilgert u. Neeb (1991), Seite 166; Humphreys (1972), Seite 89; Knapp (2002), Seite 644. Versieht man V mit einer trivialen $\mathbb{Z}_2$-Graduierung via $V \oplus \{0\}$, so stimmt die Tensor-Superalgebra $\mathcal{T}(V \oplus \{0\})$ wegen der universellen Eigenschaft mit der Tensoralgebra überein.

Zur Existenz: Wir erhalten für jedes $n > 0$ eine lineare Abbildung

$$\widetilde{\varphi}^n\colon T^nV = \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{n-mal} \to A, \quad v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \mapsto \varphi(v_1) \cdot \ldots \cdot \varphi(v_n).$$

Auf $T^0V = K$ ist eine lineare Abbildung $\widetilde{\varphi}^0$ eindeutig gegeben durch $\widetilde{\varphi}^0(1) = 1$.

Da sich jedes $x \in \mathcal{T}(V)$ in seine homogenen Komponenten zerlegen läßt, liefern die $\widetilde{\varphi}^n$ zusammen eine lineare Abbildung $\widetilde{\varphi}\colon \mathcal{T}(V) \to A$ mit $\widetilde{\varphi}|_{T^nV} = \widetilde{\varphi}^n$.

Seien nun $u := u_1 \otimes \ldots \otimes u_m \in T^mV$ und $v := v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \in T^nV$. Es ist dann $uv \in T^{m+n}V$, und wir erhalten:

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(uv) &= \widetilde{\varphi}^{m+n}(u_1 \otimes \ldots \otimes u_m \otimes v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)\\ &= \varphi(u_1)\ldots\varphi(u_m)\varphi(v_1)\ldots\varphi(v_n)\\ &= \widetilde{\varphi}^m(u_1 \otimes \ldots \otimes u_m)\widetilde{\varphi}^n(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n)\\ &= \widetilde{\varphi}(u)\widetilde{\varphi}(v).\end{aligned}$$

Damit ist $\widetilde{\varphi}$ ein Algebren-Homomorphismus. ■

Korollar: *Falls A in der Situation von Satz 6 sogar eine assoziative Superalgebra ist und φ homogen vom Grad $[0]$, so ist $\widetilde{\varphi}$ ein Superalgebren-Homomorphismus.*

Beweis: Da φ homogen vom Grad $[0]$ ist, gilt $\varphi(V_\nu) \subset A_\nu$ für $\nu \in \mathbb{Z}_2$. Für die Superalgebra A hat man $A_\nu A_\mu \subset A_{\nu+\mu}$ für $\nu, \mu \in \mathbb{Z}_2$. Damit ergibt sich für ein $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \in \mathcal{T}(V)$:

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) &= \varphi(x_1) \cdot \ldots \cdot \varphi(x_n)\\ &\in \begin{cases} A_{[0]}, & \text{falls die Anzahl der } x_i \in (T^1V)_{[1]} \text{ gerade}\\ A_{[1]}, & \text{falls die Anzahl der } x_i \in (T^1V)_{[1]} \text{ ungerade}\end{cases}\\ \Rightarrow \widetilde{\varphi}(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) &\in A_\nu \text{ für } x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \in \mathcal{T}(V)_\nu, \nu \in \mathbb{Z}_2.\end{aligned}$$

Also ist $\widetilde{\varphi}$ ein Superalgebren-Homomorphismus. ■

3.3 Die supersymmetrische Algebra

3.3.1 Definition

Sei I das Ideal in der Tensor-Superalgebra $\mathcal{T}(V)$ des $\mathbb{Z}_2$-graduierten Vektorraumes V, welches von allen Elementen der Form

$$a \otimes b - (-1)^{\alpha(a)\alpha(b)} b \otimes a \quad \text{mit } a, b \in \left(T^1V\right)_{[0]} \cup \left(T^1V\right)_{[1]}$$

erzeugt wird. Da alle Erzeuger homogen sind, ist I ein $\mathbb{Z}_2$-graduiertes Ideal. Die Quotientenalgebra

$$\mathcal{S}(V) := {}^{\mathcal{T}(V)}\!\big/_{I}$$

ist damit eine Superalgebra.

Definition 28: *Die Superalgebra $\mathcal{S}(V)$ heißt **supersymmetrische Algebra** von V.*

Bemerkung: Die Multiplikation in $\mathcal{S}(V)$ ist nicht kommutativ, sondern superkommutativ in folgendem Sinne:

$$\begin{aligned} ab &= ba, && \text{falls } a \in \mathcal{S}(V)_{[0]} \text{ oder } b \in \mathcal{S}(V)_{[0]}, \\ ab &= -ba, && \text{falls } a \in \mathcal{S}(V)_{[1]} \text{ und } b \in \mathcal{S}(V)_{[1]}. \end{aligned}$$

Für ein $a \in \mathcal{S}(V)_{[1]}$ gilt also insbesondere: $a^2 = 0$ wegen $a^2 = -a^2$.

Da alle Erzeuger von I zudem aus $T^2(V)$ stammen, also auch $\mathbb{Z}$-homogen sind, ist I auch ein $\mathbb{Z}$-graduiertes Ideal. Es gilt also:

$$I = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} (I \cap T^i V).$$

Dabei ist $I \cap T^0 V = I \cap K = \{0\}$ und $I \cap T^1 V = I \cap V = \{0\}$. Für die supersymmetrische Algebra erhalten wir damit:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(V) &= \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} {}^{T^i(V)}\!\big/_{(I \cap T^i V)} = T^0 V \oplus T^1 V \oplus {}^{T^2 V}\!\big/_{(I \cap T^2 V)} \oplus \cdots \\ &= \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} S^i V \quad \text{mit } S^i V := {}^{T^i(V)}\!\big/_{(I \cap T^i V)}. \end{aligned}$$

Die supersymmetrische Algebra $\mathcal{S}(V)$ ist also ebenfalls eine $\mathbb{Z}$-graduierte Superalgebra; eine natürliche Co-Filtrierung $S_n(V)$ ist damit analog zur Tensor-Superalgebra gegeben.

3.3.2 Eine Vektorraumbasis der supersymmetrischen Algebra

Für den Beweis des Satzes von Poincaré-Birkhoff-Witt (☞ Abschnitt 3.5) wird die supersymmetrische Algebra eine wichtige Rolle spielen. Wir wollen die dort benötigte Vektorraumbasis von $\mathcal{S}(V)$ bereits an dieser Stelle einführen. Dafür erinnern wir an den Begriff einer *totalen Ordnung*: Es handelt sich dabei um eine partielle Ordnung, in der je zwei Elemente miteinander verglichen werden können.

Satz 7: *Sei V ein $\mathbb{Z}_2$-graduierter Vektorraum und $\mathcal{S}(V)$ die supersymmetrische Algebra von V. Sei $\kappa\colon V \to \mathcal{S}(V)$ die kanonische lineare Einbettung von V in $\mathcal{S}(V)$, die gegeben ist durch $V \hookrightarrow T^1 V \subset \mathcal{S}(V)$. Sei $\{e_i\}_{i\in A}$ eine homogene Basis von V mit einer total geordneten Indexmenge A, und sei $z_i := \kappa(e_i)$ das Bild von e_i in $\mathcal{S}(V)$. Dann bilden alle Monome der Form*

$$(z_{i_1})^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (z_{i_n})^{\lambda_n} \quad \textit{mit } i_1 < \ldots < i_n,\ n \in \mathbb{N}, \qquad \lambda_k \in \mathbb{N} \quad \textit{für } e_{i_k} \in V_{[0]}, \qquad \lambda_k \in \{0,1\} \quad \textit{für } e_{i_k} \in V_{[1]}$$

eine Vektorraumbasis von $\mathcal{S}(V)$.

Beweis: Die Familie der Monome $(e_{i_1})^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (e_{i_n})^{\lambda_n}$ mit $\lambda_k \in \mathbb{N}$ für alle $1 \le k \le n$ bildet eine Vektorraumbasis der Tensor-Superalgebra $\mathcal{T}(V)$. Wegen der Superkommutativität genügen die gemäß A geordneten Monome, in denen ein ungerades $z_i = \kappa(e_i)$ höchstens in erster Potenz enthalten ist, um $\mathcal{S}(V)$ als Vektorraum zu erzeugen. Nachzuweisen ist noch die lineare Unabhängigkeit. Sei dazu

$$0 = \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} a_{\lambda_1\ldots\lambda_n} (z_{i_1})^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (z_{i_n})^{\lambda_n}$$

eine Linearkombination von solchen geordneten Monomen in $\mathcal{S}(V)$, die ein ungerades z_i höchstens in erster Potenz enthalten.

Da stets $z_i = \kappa(e_i)$, läßt sich diese Linearkombination in $\mathcal{S}(V) = \mathcal{T}(V)/I$ auf eine entsprechende Linearkombination $\sum a_{\lambda_1\ldots\lambda_n} (e_{i_1})^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (e_{i_n})^{\lambda_n}$ in $\mathcal{T}(V)$ zurückführen; wegen $I = \ker\big(\mathcal{T}(V) \to \mathcal{T}(V)/I\big)$ gilt für diese:

$$x := \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} a_{\lambda_1\ldots\lambda_n} (e_{i_1})^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (e_{i_n})^{\lambda_n} \in I \subset \mathcal{T}(V).$$

Wir bemerken zunächst, daß das Ideal $I \subset \mathcal{T}(V)$ für die gegebene homogene Basis $\{e_i\}_{i\in A}$ von $\mathfrak{g}$ von allen Elementen der Form $e_k e_\ell - (-1)^{\alpha(e_k)\alpha(e_\ell)} e_\ell e_k$ mit $k,\ \ell \in A$ erzeugt wird. Für das obige Element $x \in I$ gilt also:

$$x = \sum_{k \le \ell} p_{k\ell} \cdot \Big(e_k e_\ell - (-1)^{\alpha(e_k)\alpha(e_\ell)} e_\ell e_k \Big) \cdot q_{k\ell}$$

mit $p_{k\ell}, q_{k\ell} \in \mathcal{T}(V)$. Damit erhalten wir:

$$\sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} a_{\lambda_1\ldots\lambda_n} (e_{i_1})^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (e_{i_n})^{\lambda_n} = \sum_{k\le\ell} p_{k\ell} \cdot e_k e_\ell \cdot q_{k\ell} - \sum_{k\le\ell} (-1)^{\alpha(e_k)\alpha(e_\ell)} p_{k\ell} \cdot e_\ell e_k \cdot q_{k\ell}.$$

Falls $k < \ell$ ist, so sind alle Basismonome in $p_{k\ell} \cdot e_\ell e_k \cdot q_{k\ell}$ nicht gemäß A geordnet. Da auf der linken Seite nur geordnete Basismonome stehen, ist folglich $p_{k\ell} = 0$

oder $q_{k\ell} = 0$. Der Fall $k = \ell$ kann nur auftreten, wenn $e_k \in \mathfrak{g}_{[1]}$ und $e_\ell \in \mathfrak{g}_{[1]}$. Auf der rechten Seite gibt es dann einen Summanden $p_{kk} \cdot e_k^2 \cdot q_{kk}$. Da auf der linken Seite keine Quadrate ungerader Elemente e_k vorkommen, ist also $p_{kk} = 0$ oder $q_{kk} = 0$. Man erhält also $\sum a_{\lambda_1 \dots \lambda_n} (e_{i_1})^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (e_{i_n})^{\lambda_n} = 0$, daher gilt stets $a_{\lambda_1 \dots \lambda_n} = 0$. Die oben gewählten Monome $(z_{i_1})^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (z_{i_n})^{\lambda_n}$ sind damit linear unabhängig. ∎

3.4 Die universelle einhüllende Superalgebra

3.4.1 Definition

Es sei $\mathfrak{g}$ eine Super-Lie-Algebra und $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ die Tensor-Superalgebra zu $\mathfrak{g}$ als Vektorraum. In $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ betrachten wir das Ideal J, welches von allen Elementen der Form

$$a \otimes b - (-1)^{\alpha(a)\alpha(b)} b \otimes a - [a, b] \quad \text{mit } a, b \in \left(T^1\mathfrak{g}\right)_{[0]} \cup \left(T^1\mathfrak{g}\right)_{[1]}$$

erzeugt wird. Wegen $\alpha(a \otimes b) = \alpha(a) + \alpha(b) = \alpha([a, b])$ für $a, b \neq 0$ sind alle diese Erzeuger $\mathbb{Z}_2$-homogen; folglich ist das Ideal J ein graduiertes Ideal. Die Quotientenalgebra

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) := \mathcal{T}(\mathfrak{g})/J$$

ist damit eine Superalgebra.

Definition 29: *Die Superalgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ heißt* ***universelle einhüllende Superalgebra****.*

Allerdings sind die Erzeuger des Ideals J nicht $\mathbb{Z}$-homogen, denn im einzelnen ist $a \otimes b \in T^2\mathfrak{g}$ und $[a, b] \in T^1\mathfrak{g}$. Damit ist die universell einhüllende Superalgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ keine $\mathbb{Z}$-graduierte Superalgebra!

3.4.2 Co-Filtrierung und assoziierte $\mathbb{Z}$-graduierte Superalgebra

Obwohl die universelle einhüllende Superalgebra nicht $\mathbb{Z}$-graduiert ist, existiert für diese eine Co-Filtrierung. Sei dazu $\pi\colon \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{T}(\mathfrak{g})/J = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ die kanonische Quotientenabbildung und $U_n(\mathfrak{g})$ das Bild von $T_n(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i=0}^n T^i\mathfrak{g}$ unter π. Es ist dann $U_n(\mathfrak{g}) \subset U_{n+1}(\mathfrak{g})$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, d. h. die $U_n(\mathfrak{g})$ bilden eine Co-Filtrierung, die wir als *kanonische Co-Filtrierung* bezeichnen.

Über die Co-Filtrierung $(U_n(\mathfrak{g}))_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ läßt sich eine $\mathbb{Z}$-graduierte Superalgebra $\operatorname{gr}\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ definieren, die zu $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ assoziiert ist:

$$\operatorname{gr}\mathcal{U}(\mathfrak{g}) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g}) \quad \text{mit } U_{-1}(\mathfrak{g}) := \{0\}.$$

Die $\mathbb{Z}_2$-Graduierung von $\operatorname{gr}\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ergibt sich durch die kanonische $\mathbb{Z}_2$-Graduierung der Quotientenvektorräume $U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g})$. Die Multiplikation ist dabei wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}
&{U_n(\mathfrak{g})}\big/{U_{n-1}(\mathfrak{g})} \times {U_m(\mathfrak{g})}\big/{U_{m-1}(\mathfrak{g})} \to {U_{n+m}(\mathfrak{g})}\big/{U_{n+m-1}(\mathfrak{g})}, \\
&\big(u_n + U_{n-1}(\mathfrak{g})\big) \cdot \big(u_m + U_{m-1}(\mathfrak{g})\big) := \big(u_n u_m + U_{n+m-1}(\mathfrak{g})\big).
\end{aligned}$$

Die Wohldefiniertheit dieser Multiplikation läßt sich mit einem einfachen Standardargument zeigen.

Da $U_n(\mathfrak{g}) = \pi(T_n(\mathfrak{g}))$ ist für jedes n, läßt sich durch Komposition jeweils eine lineare Abbildung

$$\phi_n \colon T^n\mathfrak{g} \hookrightarrow T_n(\mathfrak{g}) \to U_n(\mathfrak{g}) \to {U_n(\mathfrak{g})}\big/{U_{n-1}(\mathfrak{g})}$$

definieren; für diese gilt also: $\phi_n(x) = \pi(x) + U_{n-1}(\mathfrak{g})$.

Jedes ϕ_n ist surjektiv: Für $n = 0$ ist dies klar; für $n \geq 1$ ist $T_n(\mathfrak{g}) = T_{n-1}(\mathfrak{g}) \oplus T^n\mathfrak{g}$, wobei $T_{n-1}(\mathfrak{g})$ abgebildet wird auf $\{0\} \subset U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g})$. Da sich jedes ϕ_n aus linearen Abbildungen zusammensetzt, die $\mathbb{Z}_2$-homogen vom Grad [0] sind, gilt dies auch für ϕ_n; es ist also $\phi_n((T^n\mathfrak{g})_\nu) \subset \big(U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g})\big)_\nu$ für jedes $\nu \in \mathbb{Z}_2$.

Gemeinsam geben alle ϕ_n eine surjektive lineare Abbildung $\phi\colon \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \to \operatorname{gr}\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, die $\mathbb{Z}_2$-homogen vom Grad [0] ist und für die gilt: $\phi\big|_{T^n\mathfrak{g}} = \phi_n$.

Lemma 21: *Die lineare Abbildung $\phi\colon \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \to \operatorname{gr}\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ist ein Superalgebren-Homomorphismus.*

Beweis: Sei $x \in T^n\mathfrak{g}$ und $y \in T^m\mathfrak{g}$; x und y seien beide $\mathbb{Z}$-homogen. Mit der Definition der Multiplikation in $\operatorname{gr}\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\phi(xy) = \pi(xy) + U_{n+m-1}(\mathfrak{g}) &= \pi(x)\pi(y) + U_{n+m-1}(\mathfrak{g}) \\
&= \big(\pi(x) + U_{n-1}(\mathfrak{g})\big) \cdot \big(\pi(y) + U_{m-1}(\mathfrak{g})\big) \\
&= \phi(x)\phi(y).
\end{aligned}$$

Damit ist ϕ schon ein Algebren-Homomorphismus. Da ϕ als lineare Abbildung homogen vom Grad [0] ist, ist ϕ sogar ein Superalgebren-Homomorphismus. ■

Lemma 22: *Das Ideal $I \subset \mathcal{T}(\mathfrak{g})$, das von allen Elementen*

$$x \cdot y - (-1)^{\alpha(x)\alpha(y)} y \cdot x \quad \textit{mit } x, y \in \big(T^1\mathfrak{g}\big)_{[0]} \cup \big(T^1\mathfrak{g}\big)_{[1]}$$

erzeugt wird, liegt im Kern des Superalgebren-Homomorphismus $\phi\colon \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \to \operatorname{gr}\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Korollar: *Der Superalgebren-Hommomorphismus $\phi\colon \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \to \operatorname{gr}\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ liefert einen Superalgebren-Homomorphismus $\psi\colon \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \to \operatorname{gr}\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ via:*

$$\psi(x + I) := \phi(x) \quad \textit{für alle } x + I \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}).$$

Beweis (Lemma 22): Es reicht, den Beweis für alle Erzeuger des Ideals I zu führen. Seien also $x, y \in \left(T^1\mathfrak{g}\right)_{[0]} \cup \left(T^1\mathfrak{g}\right)_{[1]}$. Mit dem kanonischen Superalgebren-Homomorphismus $\pi\colon \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(g)$ folgt:

$$\begin{aligned}\pi\Big(xy - (-1)^{\alpha(x)\alpha(y)}yx\Big) &= \pi(x)\pi(y) - (-1)^{\alpha(x)\alpha(y)}\pi(y)\pi(x)\\ &= \pi\big([x,y]\big) \in U_1(\mathfrak{g}).\end{aligned}$$

Dabei gilt das letzte Gleichheitszeichen nach Konstruktion (☞ Abschnitt 3.4.1). Wegen $xy - (-1)^{\alpha(x)\alpha(y)}yx \in T^2\mathfrak{g}$ ist $\phi\Big(xy - (-1)^{\alpha(x)\alpha(y)}yx\Big) \in U_2(\mathfrak{g})/U_1(\mathfrak{g})$, und damit erhält man:

$$\begin{aligned}\phi\Big(xy - (-1)^{\alpha(x)\alpha(y)}yx\Big) &= \pi\Big(xy - (-1)^{\alpha(x)\alpha(y)}yx\Big) + U_1(\mathfrak{g})\\ &= \pi\big([x,y]\big) + U_1(\mathfrak{g})\\ &= 0 + U_1(\mathfrak{g}).\end{aligned}$$

Also ist $I \subset \operatorname{Ker}\phi$. ■

3.4.3 Universelle Eigenschaft

Durch Komposition der Einbettung ϵ von $\mathfrak{g}$ in $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ mit der Quotientenabbildung π erhält man die kanonische Abbildung $\iota := \pi \circ \epsilon$ von $\mathfrak{g}$ in die universelle einhüllende Superalgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Nach Konstruktion von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ in Abschnitt 3.4.1 erfüllt ι für alle homogenen Elemente $a, b \in \mathfrak{g}$:

$$\iota\big([a,b]\big) = \iota(a)\iota(b) - (-1)^{\alpha(a)\alpha(b)}\iota(b)\iota(a).$$

Die universelle einhüllende Superalgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ hat zusammen mit der kanonischen linearen Abbildung $\iota\colon \mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ folgende universelle Eigenschaft (vgl. Scheunert, 1979, Seite 20):

Satz 8: *Sei A eine assoziative Algebra mit Eins. Sei $\psi\colon \mathfrak{g} \to A$ eine lineare Abbildung mit*

$$\psi\big([a,b]\big) = \psi(a)\psi(b) - (-1)^{\alpha(a)\alpha(b)}\psi(b)\psi(a) \quad \textit{für alle } a, b \in \mathfrak{g}_{[0]} \cup \mathfrak{g}_{[1]}.$$

Dann gibt es einen eindeutigen Algebren-Homomorphismus $\widehat{\psi}\colon \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to A$, so daß $\widehat{\psi}(1) = 1$ ist und das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \arrow[dl, "\widehat{\psi}"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Beim Beweis orientieren wir uns an Knapp (2002), Seite 215:

Beweis: Zur Existenz: Nach der universellen Eigenschaft der Tensor-Superalgebra $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$ existiert eindeutig ein Algebren-Homomorphismus $\widetilde{\psi}\colon \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \to A$ mit $\widetilde{\psi}(1) = 1$. Wir zeigen: $\widetilde{\psi}(J) = \{0\}$; dann liefert $\widetilde{\psi}$ die gewünschte Abbildung $\widehat{\psi}$. Es reicht dazu, $\widetilde{\psi}(z) = 0$ für jeden Erzeuger z des Ideals J zu zeigen:

Da $\mathfrak{g} \cong T^1\mathfrak{g}$, ist jeder Erzeuger z des Ideals J von der Gestalt

$$\epsilon(a)\epsilon(b) - (-1)^{\alpha(a)\alpha(b)}\epsilon(b)\epsilon(a) - \big[\epsilon(a), \epsilon(b)\big] \quad \text{mit homogenen } a, b \in \mathfrak{g},$$

wobei $\epsilon\colon \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathcal{T}(\mathfrak{g})$ die kanonische Einbettung ist mit $\epsilon(\mathfrak{g}) = T^1\mathfrak{g}$. Das gibt:

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}(z) &= \widetilde{\psi}\Big(\epsilon(a)\epsilon(b) - (-1)^{\alpha(a)\alpha(b)}\epsilon(b)\epsilon(a) - \big[\epsilon(a), \epsilon(b)\big]\Big)\\ &= \widetilde{\psi}\big(\epsilon(a)\big) \cdot \widetilde{\psi}\big(\epsilon(b)\big) - (-1)^{\alpha(a)\alpha(b)}\widetilde{\psi}\big(\epsilon(b)\big) \cdot \widetilde{\psi}\big(\epsilon(a)\big) - \widetilde{\psi}\Big(\big[\epsilon(a), \epsilon(b)\big]\Big).\end{aligned}$$

Wegen $\mathfrak{g} \cong T^1\mathfrak{g}$ ist $\big[\epsilon(a), \epsilon(b)\big] = \epsilon\big([a, b]\big)$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}(z) &= \widetilde{\psi} \circ \epsilon(a) \cdot \widetilde{\psi} \circ \epsilon(b) - (-1)^{\alpha(a)\alpha(b)}\widetilde{\psi} \circ \epsilon(b) \cdot \widetilde{\psi} \circ \epsilon(a) - \widetilde{\psi} \circ \epsilon\big([a, b]\big)\\ &= \psi(a) \cdot \psi(b) - (-1)^{\alpha(a)\alpha(b)}\psi(b) \cdot \psi(a) - \psi\big([a, b]\big)\\ &= 0 \quad \text{nach Voraussetzung für } \psi.\end{aligned}$$

Zur Eindeutigkeit: $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ wird als Algebra erzeugt von 1 und allen $\iota(x)$, $x \in \mathfrak{g}$. Das gibt die Eindeutigkeit von $\widehat{\psi}$ mit einem ähnlichen Argument wie bei der Tensor-Superalgebra (☞ Beweis von Satz 6). ∎

Korollar: *Ist A sogar eine Superalgebra und ψ homogen vom Grad* $[0]$*, so ist auch* $\widehat{\psi}$ *homogen vom Grad* $[0]$*, also ein Superalgebren-Homomorphismus.*

Der Beweis ist genauso wie bei der Tensor-Superalgebra zu führen (☞ Korollar zum Satz 6).

Bemerkung: Hat eine Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ eine Darstellung φ auf einem $\mathbb{Z}_2$-graduierten Vektorraum V, so ist $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ ein Super-Lie-Algebren-Homomorphismus; es gilt also stets für homogene $a, b \in \mathfrak{g}$:

$$\varphi([a, b]) = \big[\varphi(a), \varphi(b)\big] = \varphi(a)\varphi(b) - (-1)^{\alpha(a)\alpha(b)}\varphi(b)\varphi(a).$$

Da $\mathfrak{gl}(V) \cong \mathrm{L}(V)$ auch eine Superalgebra ist, existiert damit stets ein Superalgebren-Homomorphismus $\widehat{\varphi}\colon \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{gl}(V)$ mit $\widehat{\varphi}(1) = 1$; auf diese Weise kann man V auch als einen $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-Modul auffassen.

3.5 Der Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt

Der Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt liefert eines der wichtigsten Ergebnisse über die universelle einhüllende Superalgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ einer Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, er gibt nämlich eine Vektorraumbasis von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ an. Beim Beweis orientieren wir uns vorwiegend an Corwin u. a. (1975) sowie an Knapp (2002); der in letztgenannter Literatur angegebene Beweis im Lie-Algebra-Fall läßt sich nämlich mit einigen Abwandlungen auf den allgemeineren Fall der Super-Lie-Algebren übertragen.

Für eine Super-Lie-Algebra setzen wir in diesem Abschnitt stets voraus, daß sie eine homogene Basis $\{e_i\}_{i\in A}$ mit total geordneter Indexmenge A besitzt.

3.5.1 Formulierung des Satzes

Satz 9 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**:** *Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]} \oplus \mathfrak{g}_{[1]}$ eine Super-Lie-Algebra und $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ die universelle einhüllende Superalgebra von $\mathfrak{g}$. Sei $\iota\colon \mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ die kanonische lineare Abbildung von $\mathfrak{g}$ nach $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Sei $\{e_i\}_{i\in A}$ eine homogene Basis von $\mathfrak{g}$ mit einer total geordneten Indexmenge A und $x_i := \iota(e_i)$ das Bild vom Basisvektor e_i in $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Dann bilden alle Monome der Form*

$$(x_{i_1})^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (x_{i_n})^{\lambda_n} \quad \textit{mit } i_1 < \ldots < i_n,\ n \in \mathbb{N}, \\ \lambda_k \in \mathbb{N} \quad \textit{für } e_{i_k} \in \mathfrak{g}_{[0]}, \\ \lambda_k \in \{0,1\} \quad \textit{für } e_{i_k} \in \mathfrak{g}_{[1]}$$

eine Vektorraumbasis von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Bemerkung: Es sei $\{e_i\}_{i\in A}$ eine homogene Basis von $\mathfrak{g}$ in Standardform mit einer total geordneten Indexmenge A. Setzt man $a_i := e_i$ für $e_i \in \mathfrak{g}_{[0]}$ und $b_i := e_i$ für $e_i \in \mathfrak{g}_{[1]}$, so haben die obigen Monome folgende Form*:

$$(\iota a_{i_1})^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (\iota a_{i_\ell})^{\lambda_\ell} \cdot (\iota b_{i_{\ell+1}}) \cdot \ldots \cdot (\iota b_{i_m}) \quad \text{mit } i_1 < \ldots < i_\ell < i_{\ell+1} < \ldots < i_m, \\ \text{und } \lambda_\nu \in \mathbb{N} \text{ für } 1 \leq \nu \leq \ell.$$

Als zentraler Satz ist der Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt häufig in der Literatur zu finden, in der Version für Super-Lie-Algebren beispielsweise bei:

Corwin u. a. (1975),	Seite 586;
Kac (1977a),	Seite 15 (ohne Beweis);
Kac (1977b),	Seite 34 (ohne Beweis);
Ross (1965),	Seite 18;
Scheunert (1979),	Seite 26;
Varadarajan (2004),	Seite 279.

*Man beachte: In einer homogenen Basis von $\mathfrak{g}$ in Standardform stehen die Basiselemente aus $\mathfrak{g}_{[0]}$ stets vor denen aus $\mathfrak{g}_{[1]}$ (☞ Abschnitt 1.1 auf Seite 3).

Die Lie-Algebren-Version steht unter anderem bei:

Bourbaki (1975),	Seite 18;
Cartan u. Eilenberg (1956),	Seite 271;
Hilgert u. Neeb (1991),	Seite 170;
Humphreys (1972),	Seite 92;
Jacobson (1966),	Seite 159;
Knapp (2002),	Seite 217.

Da der Beweis des Satzes von Poincaré-Birkhoff-Witt einigen Aufwand erfordert, betrachten wir zunächst einige Folgerungen.

3.5.2 Konsequenzen

Wir beginnen mit drei einfachen Folgerungen aus dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt.

Korollar: *Die kanonische Abbildung* $\iota\colon \mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *ist injektiv.*

Beweis: Für eine homogene Basis $\{e_i\}_{i\in A}$ von $\mathfrak{g}$ mit total geordneter Indexmenge A liegen nach dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt die $x_i = \iota e_i$ in einer Vektorraumbasis von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, sie sind also insbesondere linear unabhängig. Damit läßt sich $\mathfrak{g}$ in $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ injektiv einbetten. ■

Korollar: *Hat man eine homogene Basis* $\{e_i\}_{i\in A}$ *von* $\mathfrak{g}$ *mit total geordneter Indexmenge* A *fest gewählt, so sind die Vektorräume* $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ *und* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *isomorph zueinander.*

Beweis: Nach Satz 7 auf Seite 46 haben die Monome, die eine Vektorraumbasis von $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ bilden, die gleiche Form wie die Monome in der Vektorraumbasis von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, die im Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt gegeben ist. Demnach lassen sich die Basismonome von $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ und von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ durch eine lineare Abbildung $1:1$ aufeinander abbilden. ■

Korollar: *Der Superalgebren-Homomorphismus* $\psi\colon \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \to \operatorname{gr}\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *ist ein Isomorphismus.*

Bemerkung: Manchmal wird in der Literatur dieses Korollar als Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt bezeichnet.

Beweis: Wir identifizieren $\mathfrak{g}$ mit $T^1\mathfrak{g} \subset \mathcal{T}(\mathfrak{g})$. Es sei $\{e_i\}_{i\in A}$ eine homogene Basis von $\mathfrak{g}$ mit total geordneter Indexmenge A. Seien $\kappa\colon \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ und $\iota\colon \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ die kanonischen Einbettungen von $\mathfrak{g}$, und sei $\pi\colon \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{T}(\mathfrak{g})/J$ die natürliche Quotientenabbildung. Für ein $g \in \mathfrak{g}$ gilt: $\pi(g) = \iota(g)$.

Eine Basis von $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ ist nach Satz 7 gegeben durch alle Monome

$$(\kappa e_{i_1})^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (\kappa e_{i_m})^{\lambda_m} \quad \text{mit } i_1 < \ldots < i_m,\ m \in \mathbb{N}, \\ \lambda_k \in \mathbb{N} \quad \text{für } e_{i_k} \in \mathfrak{g}_{[0]}, \\ \lambda_k \in \{0,1\} \quad \text{für } e_{i_k} \in \mathfrak{g}_{[1]}.$$

Den Superalgebren-Homomorphismus ψ haben wir in Abschnitt 3.4.2 eingeführt. Für ein $x \in T_n(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{T}(\mathfrak{g})$ ist er gegeben durch:

$$\psi(x + I) = \phi(x) = \pi(x) + U_{n-1}(\mathfrak{g});$$

dabei ist $\phi\colon \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \to \operatorname{gr} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ der im gleichen Abschnitt konstruierte Superalgebren-Homomorphismus. Für ein Basismonom $(\kappa e_{i_1})^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (\kappa e_{i_m})^{\lambda_m}$ von $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ mit $\sum_i \lambda_i =: n$ erhalten wir damit:

$$\begin{aligned} \psi\Big((\kappa e_{i_1})^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (\kappa e_{i_m})^{\lambda_m}\Big) &= \psi\Big((e_{i_1})^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (e_{i_m})^{\lambda_m} + I\Big) \\ &= \pi\Big((e_{i_1})^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (e_{i_m})^{\lambda_m}\Big) + U_{n-1}(\mathfrak{g}) \\ &= \Big((\pi e_{i_1})^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (\pi e_{i_m})^{\lambda_m}\Big) + U_{n-1}(\mathfrak{g}). \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt ist $(\pi e_{i_1})^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (\pi e_{i_m})^{\lambda_m}$ ein Basiselement von $U_n(\mathfrak{g})$; also ist $(\pi e_{i_1})^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (\pi e_{i_m})^{\lambda_m} + U_{n-1}(\mathfrak{g})$ ein Basiselement von $U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g})$. Die Basiselemente von $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ und von $\operatorname{gr} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ werden 1 : 1 aufeinander abgebildet. Damit ist ψ ein Isomorphismus zwischen Superalgebren. ■

Die folgenden Aussagen basieren ebenfalls auf dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt. Dabei werden wir den Satz 10 später bei *induzierten Moduln* benötigen (☞ Abschnitt 4.1 auf Seite 67), mit denen wir den Satz von Ado beweisen werden.

Lemma 23: *Sei $\mathfrak{g}$ eine Super-Lie-Algebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Super-Lie-Unteralgebra. Sei $\epsilon\colon \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ die natürliche Einbettung von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$ mit $\epsilon\big([a,b]\big) = \big[\epsilon(a), \epsilon(b)\big]$. Seien $\iota\colon \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ und $\iota'\colon \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ die kanonischen Einbettungen von $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{h}$ in die jeweilige universelle einhüllende Superalgebra. Sei $\psi := \iota \circ \epsilon\colon \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ die Komposition der Abbildungen ϵ und ι. Dann gilt:*

I: *Es gibt einen kanonischen Superalgebren-Homomorphismus $\widehat{\psi}\colon \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ mit $\widehat{\psi}(1) = 1$, so daß folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{h} \arrow[r, "\iota'"] \arrow[d, "\epsilon"'] \arrow[dr, "\psi"] & \mathcal{U}(\mathfrak{h}) \arrow[d, "\widehat{\psi}"] \\ \mathfrak{g} \arrow[r, "\iota"] & \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \end{tikzcd}$$

II: *Die Abbildung $\widehat{\psi}$ ist injektiv.*

Beweis: ad I: Als Einbettungen sind die Abbildungen ϵ und ι jeweils homogen vom Grad $[0]$; damit überträgt sich dieses auf $\psi = \iota \circ \epsilon$. Existenz und Eindeutigkeit von $\widehat{\psi}$ ergeben sich damit aus der universellen Eigenschaft der universellen einhüllenden Superalgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ von $\mathfrak{h}$ (☞ Satz 8 auf Seite 49).

ad II: Sei $\{e_i\}_{i\in A'}$ eine homogene Basis von $\mathfrak{h}$ mit total geordneter Indexmenge A'. Für jedes $i \in A'$ sei $x_i' := \iota'(e_i)$ das Bild von e_i in $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$.

Diese homogene Basis von $\mathfrak{h}$ läßt sich zu einer homogenen Basis $\{e_i\}_{i\in A}$ von $\mathfrak{g}$ mit total geordneter Indexmenge A ergänzen; es gilt dann $A \supset A'$. Wir setzen noch $x_i := \iota(e_i) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ für jedes $i \in A$.

Sei nun $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$ mit $\widehat{\psi}(x) = 0$. Nach dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt ist x eine Linearkombination der Form

$$x = \sum_n \sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_n} a_{\lambda_1\dots\lambda_n} \big(x_{i_1}'\big)^{\lambda_1} \dots \big(x_{i_n}'\big)^{\lambda_n}.$$

Da $\widehat{\psi}$ ein Superalgebren-Homomorphismus ist, folgt:

$$\begin{aligned}
0 = \widehat{\psi}(x) &= \sum_n \sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_n} a_{\lambda_1\dots\lambda_n} \big(\widehat{\psi} \circ \iota'(e_{i_1})\big)^{\lambda_1} \dots \big(\widehat{\psi} \circ \iota'(e_{i_n})\big)^{\lambda_n} \\
&= \sum_n \sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_n} a_{\lambda_1\dots\lambda_n} \big(\iota \circ \epsilon(e_{i_1})\big)^{\lambda_1} \dots \big(\iota \circ \epsilon(e_{i_n})\big)^{\lambda_n} \\
&= \sum_n \sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_n} a_{\lambda_1\dots\lambda_n} \big(\iota(e_{i_1})\big)^{\lambda_1} \dots \big(\iota(e_{i_n})\big)^{\lambda_n} \\
&= \sum_n \sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_n} a_{\lambda_1\dots\lambda_n} \underbrace{\big(x_{i_1}\big)^{\lambda_1} \dots \big(x_{i_n}\big)^{\lambda_n}}_{\text{Basiselement von } \mathcal{U}(\mathfrak{g})}.
\end{aligned}$$

Folglich ist stets $a_{\lambda_1\dots\lambda_n} = 0$, also $x = 0$. ■

Wir können damit $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ als einen $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$-Modul ansehen, indem wir für die Operation von $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ auf $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ setzen:

$$h.g := \widehat{\psi}(h) \cdot g \quad \text{für } h \in \mathcal{U}(\mathfrak{h}), g \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}).$$

Falls $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{g}_{[0]}$, ist $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ sogar ein freier Modul* über $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. Der folgende Satz gibt eine Basis für $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ als $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$-Modul an. Um bei der Formulierung eine bessere Übersicht zu behalten, identifizieren wir $\mathfrak{g}$ mit $\iota(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

*Zur Erinnerung: Sei M ein Modul über einem Ring R, und sei $\{x_i\}_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von M. Das Erzeugendensystem $\{x_i\}_{i\in I}$ heißt *frei* oder *linear unabhängig*, falls gilt: Hat man eine verschwindende Linearkombination $\sum_{i\in I} r_i x_i = 0$ mit Koeffizienten $r_i \in R$ und $r_i = 0$ für fast alle $i \in I$, so folgt $r_i = 0$ für alle $i \in I$. Ein freies Erzeugendensystem wird auch als *Basis* bezeichnet. Der R-Modul M heißt *frei*, falls er ein freies Erzeugendensystem besitzt. Siehe auch Lang (2002, Seite 135) oder Bosch (2004, Seite 71).

Satz 10: *Sei $\mathfrak{g}$ eine Super-Lie-Algebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Super-Lie-Unteralgebra mit $\mathfrak{g}_{[0]} \subset \mathfrak{h}$. Sei $\{e_i\}_{i\in A}$ eine homogene Basis von $\mathfrak{g}$ mit total geordneter Indexmenge A, so daß für eine Teilmenge $A' \subset A$ die Familie $\{e_j\}_{j\in A'}$ eine homogene Basis von $\mathfrak{h}$ bildet.*

Es sei $B := A \setminus A'$ das Komplement von A' in A. Die Bilder der $\{e_k\}_{k\in B}$ unter der kanonischen Abbildung $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ bilden dann eine Basis des Quotientenvektorraumes $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$; dabei ist $e_k \in \mathfrak{g}_{[1]}$ für alle $k \in B$. Dann gilt: Alle Monome der Form

$$\begin{aligned}(e_{k_1})^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot (e_{k_m})^{\mu_m} \quad & \textit{mit } k_\ell \in B \textit{ stets}, k_1 < \ldots < k_m, m \in \mathbb{N}, \\ & \mu_\ell \in \{0,1\} \quad \textit{für } 1 \le \ell \le m\end{aligned}$$

bilden eine Basis des $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$-Moduls $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Beweis: O. B. d. A. sei die Indexmenge A so geordnet, daß für jedes $j \in A'$ und für jedes $k \in B$ gilt: $j < k$. Nach dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt bilden alle Monome der Form

$$\begin{aligned}(e_{i_1})^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (e_{i_n})^{\lambda_n} \quad & \text{mit } i_\ell \in A \text{ stets}, i_1 < \ldots < i_n, n \in \mathbb{N} \\ & \lambda_\ell \in \mathbb{N} \quad \text{für } e_{i_\ell} \in \mathfrak{g}_{[0]}, \\ & \lambda_\ell \in \{0,1\} \quad \text{für } e_{i_\ell} \in \mathfrak{g}_{[1]}\end{aligned}$$

eine K-Basis des Vektorraumes $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Dabei steht ein e_j mit $j \in A'$ stets links von einem e_k mit $k \in B$. Wir können die Monome also auch wie folgt notieren:

$$\begin{aligned}(e_{j_1})^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (e_{j_n})^{\lambda_n} \cdot (e_{k_1})^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot (e_{k_m})^{\mu_m} \quad & \text{mit } j_\ell \in A' \text{ stets}, j_1 < \ldots < j_n, n \in \mathbb{N} \\ & k_\ell \in B \text{ stets}, k_1 < \ldots < k_m, m \in \mathbb{N} \\ & \lambda_\ell \in \mathbb{N} \quad \text{für } e_{j_\ell} \in \mathfrak{g}_{[0]}, \\ & \lambda_\ell \in \{0,1\} \quad \text{für } e_{j_\ell} \in \mathfrak{g}_{[1]}, \\ & \mu_\ell \in \{0,1\} \quad \text{stets.}\end{aligned}$$

Dabei ist immer $(e_{j_1})^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (e_{j_n})^{\lambda_n} \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$. Es genügen demnach alle Monome $(e_{k_1})^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot (e_{k_m})^{\mu_m}$, um die universelle einhüllende Superalgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ als $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$-Modul zu erzeugen.

Es fehlt noch die Unabhängigkeit dieser Monome über $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$. Sei dazu

$$0 = \sum_m \sum_{\mu_1,\ldots,\mu_m} a_{\mu_1\ldots\mu_m} (e_{k_1})^{\mu_1} \ldots (e_{k_m})^{\mu_m}$$

mit $a_{\mu_1\ldots\mu_m} \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$, dabei seien nur endlich viele $a_{\mu_1\ldots\mu_m} \neq 0$. Jedes $a_{\mu_1\ldots\mu_m}$ ist nun eine endliche K-Linearkombination von Monomen $(e_{j_1})^{\lambda_1} \ldots (e_{j_n})^{\lambda_n} \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$:

$$a_{\mu_1\ldots\mu_m} = \sum_n \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} b^{\mu_1\ldots\mu_m}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} (e_{j_1})^{\lambda_1} \ldots (e_{j_n})^{\lambda_n}.$$

Einsetzen liefert eine Linearkombination von Basiselementen von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$:

$$0 = \sum_{m} \sum_{\mu_1,\dots,\mu_m} \sum_{n} \sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_n} b^{\mu_1\dots\mu_m}_{\lambda_1,\dots,\lambda_n} (e_{j_1})^{\lambda_1} \dots (e_{j_n})^{\lambda_n} (e_{k_1})^{\mu_1} \dots (e_{k_m})^{\mu_m}.$$

Also ist stets $b^{\mu_1\dots\mu_m}_{\lambda_1,\dots,\lambda_n} = 0$, d. h. es sind alle $a_{\mu_1\dots\mu_m} = 0$. Damit bilden die Monome $(e_{k_1})^{\mu_1} \cdot \dots \cdot (e_{k_m})^{\mu_m}$ sogar eine Basis des $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$-Moduls $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. ■

3.5.3 Beweis des Satzes von Poincaré-Birkhoff-Witt

Der Beweis des Satzes von Poincaré-Birkhoff-Witt wird in zwei Schritten verlaufen. Zuerst werden wir zeigen, daß die in Satz 9 angegebenen Monome ein Erzeugendensystem von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ bilden. Um eine bessere Übersicht zu erhalten, verteilen wir diesen Teil des Beweises auf mehrere Lemmata.

Die lineare Unabhängigkeit der obigen Monome wird danach im zweiten Schritt gezeigt werden, was mehr Aufwand erfordern wird als beim ersten Teil.

Wir erinnern zunächst an die kanonische Co-Filtrierung $(U_n(\mathfrak{g}))_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $U_n(\mathfrak{g})$ das Bild von $T_n(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i\leq n} T^i\mathfrak{g}$ unter der Quotientenabbildung $\pi\colon \mathcal{T}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Es gilt dabei stets: $U_n(\mathfrak{g}) \subset U_{n+1}(\mathfrak{g})$, und $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ist die Vereinigung aller $U_n(\mathfrak{g})$.

Lemma 24: *Für ein $k \in \mathbb{N}$ seien $z_1, \dots, z_k \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ homogen; σ sei eine beliebige Permutation von $\{1, 2, \dots, k\}$. Es sei $\iota\colon \mathfrak{g} \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ die kanonische Abbildung von $\mathfrak{g}$ nach $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Dann gilt:*

$$\underbrace{(\iota z_1)(\iota z_2)\dots(\iota z_k)}_{\in U_k(\mathfrak{g})} - s(\sigma)\,\underbrace{(\iota z_{\sigma(1)})(\iota z_{\sigma(2)})\dots(\iota z_{\sigma(k)})}_{\in U_k(\mathfrak{g})} \in U_{k-1}(\mathfrak{g}),$$

wobei $s(\sigma) = \pm 1$ ist.

Bemerkung: Der Wert von $s(\sigma)$ hängt davon ab, wie viele gerade und ungerade Elemente z_i unter σ vertauscht werden. Denn für eine Transposition τ, welche die Elemente i und j vertauscht, ist $s_{ij} := s(\tau) = (-1)^{\alpha(z_i)\alpha(z_j)}$.

Da sich jede Permutation σ aus solchen Transpositionen τ_ℓ zusammensetzen läßt, gilt: $s(\sigma) = \prod_\ell s(\tau_\ell)$.

Beweis: Da sich jede Permutation σ sogar aus Transpositionen der Form $(i, i+1)$ zusammensetzt, reicht es aus, den Beweis für solche Transpositionen zu führen. Es gilt:

$$(\iota z_i)(\iota z_{i+1}) - (-1)^{\alpha(z_i)\alpha(z_{i+1})}(\iota z_{i+1})(\iota z_i) = [\iota z_i, \iota z_{i+1}].$$

Die rechte Seite ist eine Linearkombination der Basiselemente ιe_ℓ, liegt also in $U_1(\mathfrak{g})$. Multipliziert man diese Gleichung von links mit $(\iota z_1)\dots(\iota z_{i-1})$ und von rechts mit $(\iota z_{i+2})\dots(\iota z_k)$, so folgt:

$$\begin{aligned} &(\iota z_1)\dots(\iota z_{i-1})(\iota z_i)(\iota z_{i+1})(\iota z_{i+2})\dots(\iota z_k)\\ -(-1)^{\alpha(z_i)\alpha(z_{i+1})}&(\iota z_1)\dots(\iota z_{i-1})(\iota z_{i+1})(\iota z_i)(\iota z_{i+2})\dots(\iota z_k)\\ &= (\iota z_1)\dots(\iota z_{i-1})\left[\iota z_i, \iota z_{i+1}\right](\iota z_{i+2})\dots(\iota z_k) \in U_{k-1}(\mathfrak{g}). \end{aligned}$$ ■

Wir führen nun eine andere Schreibweise ein. Für ein Tupel $J := (j_1, \dots, j_k)$ von Indizes schreiben wir kurz: $x_J := x_{j_1} \dots x_{j_k}$. Dabei dürfen Indizes j_ℓ auch doppelt vorkommen. Die Länge $|J|$ eines solchen Tupels $J := (j_1, \dots, j_k)$ defninieren wir als $|J| := k$, dieses nennen wir auch den Grad des Monoms x_J. Falls $j_1 \leq \dots \leq j_n$, nennen wir das Tupel J ansteigend.

Formal setzen wir noch $x_J = 1$ für das leere Tupel J mit $|J| = 0$. Wir betrachten dieses J ebenfalls als ansteigend.

Falls für ein beliebiges Tupel $J := (j_1, \dots, j_k)$ von Indizes und einen Index i gilt: $i \leq j_\ell$ für jedes ℓ, so schreiben wir dafür $i \leq J$. Ist J das leere Tupel, so gelte $i \leq J$ für jeden Index i.

Das Lemma 24 liefert uns bereits: Jedes Monom $x_J = x_{j_1} \dots x_{j_k}$ vom Grad k läßt sich darstellen als Summe aus einem Monom $x_{i_1}^{\lambda_1} \dots x_{i_n}^{\lambda_n}$ vom gleichen Grad $k = \sum_{j=1}^n \lambda_j$ mit $i_1 < \dots < i_n$ und einer Linearkombination aus Monomen kleineren Grades. Denn für jedes Tupel $(j_1, \dots, j_k)$ gibt es eine Permutation σ, so daß $(\sigma j_1, \dots, \sigma j_k)$ ansteigend ist.

Betrachten wir nun ein ungerades Monom $x_i \in U_1(\mathfrak{g})$; es ist also $x_i = \iota e_i$ mit $e_i \in \mathfrak{g}_{[1]}$. Für dieses gilt in $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$:

$$x_i^2 = \tfrac{1}{2}(x_i x_i + x_i x_i) = \tfrac{1}{2}[x_i, x_i].$$

Da die Klammer auf der rechten Seite eine Linearkombination der x_ℓ ist, ist also $x_i^2 \in U_1(\mathfrak{g}) = U_{(2-1)}(\mathfrak{g})$. Damit erhalten wir die Aussage des folgendes Lemmas:

Lemma 25: *Es sei* $x_{i_1}^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_n}^{\lambda_n} \in U_{(\sum_k \lambda_k)}(\mathfrak{g})$ *ein Monom mit* $i_1 < \dots < i_n$ *und* $\lambda_k \in \mathbb{N}$ *für jedes* k*. Ist* x_{i_ℓ} *ungerade für ein* i_ℓ *und ist* $\lambda_\ell \geq 2$*, so ist das Monom* $x_{i_1}^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_n}^{\lambda_n} \in U_{(\sum_k \lambda_k - \lambda_\ell + 1)}(\mathfrak{g})$.

Mit anderen Worten: Jedes Monom $x_{i_1}^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_n}^{\lambda_n}$, in dem ein ungerades x_{i_ℓ} in höherer Potenz als 1 vorkommt, läßt sich darstellen als eine Summe von Monomen geringeren Grades, welche das x_{i_ℓ} in erster Potenz enthalten.

Lemma 26: *$U_n(\mathfrak{g})$ wird von allen Monomen x_I aufgespannt, für deren Indextupel $I = (i_1, \ldots, i_k)$ gilt:*

- *I ist ansteigend,*
- *$|I| \leq n$, also $k \leq n$,*
- *$i_\ell < i_{\ell+1}$ für ungerades x_{i_ℓ}.*

Ein solches Tupel bezeichnen wir als wohlansteigend mit Länge *n.*

Beweis: Wir betrachten zunächst $T_n(\mathfrak{g})$ in der Co-Filtrierung der Tensor-Superalgebra $\mathcal{T}(\mathfrak{g})$. Es ist klar, daß $T_n(\mathfrak{g})$ von allen Monomen $e_{i_1} \ldots e_{i_k}$ mit $k \leq n$ aufgespannt wird. Damit wird $U_n(\mathfrak{g})$ erzeugt von allen Monomen $x_{i_1} \ldots x_{i_k}$ mit $k \leq n$.

Wir zeigen induktiv, daß die oben genannten Monome genügen, um $U_n(\mathfrak{g})$ zu erzeugen.

Für $n = 0$ ist nichts zu tun, denn $U_0(\mathfrak{g}) \cong T_0(\mathfrak{g}) = K$ wird aufgespannt von 1; und wir haben $x_I = 1$ gesetzt für $|I| = 0$.

Für ein k werden nun $U_k(\mathfrak{g})$ von allen x_I aufgespannt, deren Indextupel I wohlansteigend mit Länge k sind. Wir betrachten jetzt $U_{k+1}(\mathfrak{g})$. Da $U_k(\mathfrak{g}) \subset U_{k+1}(\mathfrak{g})$, müssen wir die Aussagen nur noch für die Tupel der Länge $k+1$ zeigen.

Sei $I = (i_1, \ldots, i_{k+1})$ ein beliebiges Tupel, x_I das zugehörige Monom. Es gibt eine Permutation σ, so daß das Tupel $\sigma I = (\sigma i_1, \ldots, \sigma i_{k+1})$ ansteigend ist. Nach Lemma 24 ist dann

$$x_I = s(\sigma) \cdot x_{\sigma I} + \text{Elemente aus } U_k(\mathfrak{g}).$$

Um $U_{k+1}(\mathfrak{g})$ aufzuspannen, genügen also schon die Monome x_I, deren Indextupel I ansteigend ist mit $|I| \leq k+1$.

Falls in einem ansteigenden Tupel $I = (i_1, \ldots, i_{k+1})$ der Länge $|I| = k+1$ gilt: $i_\ell = i_{\ell+1}$ für einen ungeraden Index i_ℓ (d. h. e_{i_ℓ} ungerade), so ist nach Lemma 25 das zugehörige Monom $x_I \in U_k(\mathfrak{g})$.

Demnach genügen alle Monome x_I mit wohlansteigendem Indextupel I mit Länge $k+1$, um $U_{k+1}(\mathfrak{g})$ aufzuspannen. ∎

Wegen $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n(\mathfrak{g})$ erhalten wir das folgende Ergebnis:

Korollar: *Die universelle einhüllende Superalgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ wird von allen Monomen x_I aufgespannt, deren Indextupel I wohlansteigend ist mit $|I| \in \mathbb{N}$.*

Damit ist der Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt schon zur Hälfte gezeigt; es fehlt noch die lineare Unabhängigkeit. Diese ist schwieriger zu zeigen als bei der supersymmetrischen Algebra, da wir hier wegen $ab = (-1)^{\alpha(a)\alpha(b)} ba + [a, b]$ den Superkommutator mit berücksichtigen müssen. Wir konstruieren dazu eine geeignete Darstellung von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ auf der supersymmetrischen Algebra $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$.

Vorab sei nochmal an die Vektorraumbasis von $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ aus Satz 7 erinnert: Für die hier gewählte homogene Basis $\{e_i\}_{i\in A}$ von $\mathfrak{g}$ mit total geordneter Indexmenge A sei $z_i := \kappa(e_i)$ das Bild von e_i unter der kanonischen Einbettung $\kappa\colon \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{g})$. Dann bilden alle Monome der Form

$$(z_{i_1})^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot (z_{i_n})^{\lambda_n} \quad \begin{aligned} &\text{mit } i_1 < \ldots < i_n, n \in \mathbb{N}, \\ &\lambda_k \in \mathbb{N} \quad \text{für } e_{i_k} \in \mathfrak{g}_{[0]}, \\ &\lambda_k \in \{0,1\} \quad \text{für } e_{i_k} \in \mathfrak{g}_{[1]} \end{aligned}$$

eine Vektorraumbasis von $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$. Der Grad eines solchen Monoms ist $\sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Insbesondere gilt dann für die kanonische Co-Filtrierung $(S_n(\mathfrak{g}))_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ mit $S_n(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i\leq n} S^i\mathfrak{g}$: Jedes $S_n(\mathfrak{g})$ wird von allen Basis-Monomen erzeugt, deren Grad $\leq n$ ist.

Wir erinnern nochmal an unsere Bezeichnungen: Für ein Tupel $I = (i_1, \ldots, i_n)$ schreiben wir kurz: $z_I := z_{i_1} \ldots z_{i_n} \in S_n(\mathfrak{g})$. Falls ein Index $j \leq i_\ell$ ist für alle $1 \leq \ell \leq n$, schreiben wir $j \leq I$. Die Basis-Monome von $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ sind dann diejenigen Monome z_I, deren Indextupel I wohlansteigend ist. Im folgenden betrachten wir nur wohlansteigende Indextupel.

Wir werden induktiv eine Familie $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von linearen Abbildungen

$$\varphi_n\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{L}\Big(S_n(\mathfrak{g}), S_{n+1}(\mathfrak{g})\Big), \quad \text{homogen vom Grad } [0],$$

mit $\varphi_n(g)\big|_{S_{n-1}(\mathfrak{g})} = \varphi_{n-1}(g)$ konstruieren*, welche folgende Bedingungen erfüllt:

(A_n) a) $\varphi_n(e_i)z_I = z_i z_I \quad$ für $z_I \in S_n(\mathfrak{g})$ und $e_i \in \mathfrak{g}_{[0]}$ mit $i \leq I$
oder $e_i \in \mathfrak{g}_{[1]}$ mit $i \leq I$ und $i \notin I$.

b) $\varphi_n(e_i)z_I = \frac{1}{2}\varphi_n\big([e_i, e_i]\big)z_J \quad$ für $z_I \in S_n(\mathfrak{g})$ und
$e_i \in \mathfrak{g}_{[1]}$ mit $I = (i, J)$ und $z_J \in S_{n-1}(\mathfrak{g})$.

(B_n) $\big(\varphi_n(e_i)z_I - z_i z_I\big) \in S_n(\mathfrak{g}) \quad$ für alle $z_I \in S_n(\mathfrak{g})$;

(C_n) $\varphi_n(e_i)\big(\varphi_{n-1}(e_j)z_J\big) = (-1)^{\alpha(e_i)\alpha(e_j)}\varphi_n(e_j)\big(\varphi_{n-1}(e_i)z_J\big) + \varphi_{n-1}\big([e_i, e_j]\big)z_J$
für alle $z_J \in S_{n-1}(\mathfrak{g})$.

Diese ergeben zusammen eine lineare Darstellung φ von $\mathfrak{g}$ auf $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ mit

$$\varphi\big([e_i, e_j]\big) = \varphi(e_i)\varphi(e_j) - (-1)^{\alpha(e_i)\alpha(e_j)}\varphi(e_j)\varphi(e_i) \quad \text{für alle } i, j \in A.$$

*Zur Erinnerung: $\mathrm{L}\big(S_n(\mathfrak{g}), S_{n+1}(\mathfrak{g})\big)$ ist der Vektorraum der linearen Abbildungen von $S_n(\mathfrak{g})$ nach $S_{n+1}(\mathfrak{g})$.

Nach Satz 8 existiert dann ein Superalgebren-Homomorphismus $\widehat{\varphi}$ von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ in die Superalgebra $\mathrm{L}\big(\mathcal{S}(\mathfrak{g})\big)$ der linearen Abbildungen von $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$, d. h. $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ wird zu einem $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-Modul.

Für ein wohlansteigendes Indextupel $I = (i_1, \ldots, i_n)$ folgt dann:

$$\begin{aligned}\widehat{\varphi}(x_I)(1) &= \widehat{\varphi}(x_{i_1} \ldots x_{i_n})(1)\\ &= \widehat{\varphi}(x_{i_1} \ldots x_{i_{n-1}})\widehat{\varphi}(x_{i_n})(1)\\ &= \widehat{\varphi}(x_{i_1} \ldots x_{i_{n-1}})\varphi(e_{i_n})(1)\\ &= \widehat{\varphi}(x_{i_1} \ldots x_{i_{n-1}})z_{i_n}\\ &= \widehat{\varphi}(x_{i_1} \ldots x_{i_{n-2}})z_{i_{n-1}}z_{i_n} = \ldots = z_{i_1} \ldots z_{i_{n-1}}z_{i_n}.\end{aligned}$$

Da diese wohlansteigenden Monome $z_{i_1} \ldots z_{i_{n-1}}z_{i_n}$ eine Basis von $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ bilden, sind auch die wohlansteigenden $x_{i_1} \ldots x_{i_n}$ linear unabhängig. Diese bilden also eine Basis von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, denn nach Lemma 26 sind die wohlansteigenden Monome ein Erzeugendensystem von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Wir müssen also nur noch die Familie $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von linearen Abbildungen mit den oben geforderten Eigenschaften konstruieren. Dazu führen wir eine Induktion nach n durch:

Für $n = 0$ ist $S_0(\mathfrak{g}) \cong K$. Wir setzen für ein beliebiges Basiselement e_i von $\mathfrak{g}$:

$$\varphi_0(e_i)(1) := z_i.$$

Die Eigenschaften (A_0 a) und (B_0) sind dann trivialerweise erfüllt. Der Fall (A_0 b) tritt hier nicht auf, und die Aussage (C_n) existiert nicht für $n = 0$.

Für ein $n > 0$ sei nun $\varphi_{n-1}(g)$ für jedes $g \in \mathfrak{g}$ so auf $S_{n-1}(\mathfrak{g})$ definiert, daß die Eigenschaften* (A_{n-1}), (B_{n-1}) und (C_{n-1}) erfüllt sind. Wir wollen nun $\varphi_n(e_i)z_I$ für $e_i \in \mathfrak{g}$ und $z_I \in S_n(\mathfrak{g})$ mit wohlansteigendem I geeignet festlegen. Dazu bemerken wir zunächst, daß für $|I| \leq n-1$ gilt: $\varphi_n(e_i)z_I = \varphi_{n-1}(e_i)z_I$. Wir müssen uns also nur noch um die z_I mit $|I| = n$, I wohlansteigend, kümmern. Dazu unterscheiden wir einige Fälle:

I. Falls $i \leq I$ und $e_i \in \mathfrak{g}_{[0]}$, setzen wir:

$$\varphi_n(e_i)z_I := z_i z_I.$$

II. Falls $i \leq I$ und $e_i \in \mathfrak{g}_{[1]}$ mit $i \notin I$, setzen wir ebenfalls:

$$\varphi_n(e_i)z_I := z_i z_I.$$

*Für $n = 1$ beachte man, daß die Eigenschaft (C_0) nicht existiert; in diesem Fall kommt man aber mit (A_0) und (B_0) aus.

III. Falls $i \leq I$ und $e_i \in \mathfrak{g}_{[1]}$ mit $i \in I$, so ist $I = (i, J)$, da I wohlgeordnet ist. Wir setzen dann:

$$\varphi_n(e_i)z_I := \tfrac{1}{2}\varphi_{n-1}([e_i, e_i])z_J.$$

IV. Falls $i \not\leq I$, zerlegen wir $I = (j, J)$. Da I wohlansteigend ist, ist dann $j \leq J$ und $j < i$. Wir setzen:

$$\varphi_n(e_i)z_I := z_i z_I + (-1)^{\alpha(e_i)\alpha(e_j)}\varphi_{n-1}(e_j)w + \varphi_{n-1}\big([e_i, e_j]\big)z_J$$

mit $w := \varphi_{n-1}(e_i)z_J - z_i z_J \in S_{n-1}(\mathfrak{g})$ wegen (B_{n-1}).

Damit haben wir (A_n) bereits per Definition erfüllt. Die Eigenschaft (B_n) ist für I, II und IV klar; für III bemerken wir, daß in $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ gilt: $z_i z_i = 0$ für $e_i \in \mathfrak{g}_{[1]}$. Es ist dann:

$$\varphi_n(e_i)z_I - z_i z_I = \varphi_n(e_i)z_I = \tfrac{1}{2}\varphi_{n-1}([e_i, e_i])z_J \in S_n(\mathfrak{g}).$$

Es bleibt also noch die Eigenschaft (C_n) zu prüfen.

Dazu betrachten wir nochmal unsere Festlegung von $\varphi_n(e_i)z_I$ im Fall IV. Mit obiger Definition erhält man mit $I = (j, J)$:

$$\begin{aligned}
\varphi_n(e_i)z_I &= z_i z_I + (-1)^{\alpha(e_i)\alpha(e_j)}\varphi_{n-1}(e_j)\Big(\varphi_{n-1}(e_i)z_J - z_i z_J\Big) + \varphi_{n-1}\big([e_i, e_j]\big)z_J \\
&= z_i z_j z_J + (-1)^{\alpha(e_i)\alpha(e_j)}\varphi_n(e_j)\Big(\varphi_{n-1}(e_i)z_J - z_i z_J\Big) + \varphi_{n-1}\big([e_i, e_j]\big)z_J \\
&= (-1)^{\alpha(e_i)\alpha(e_j)}\bigg(z_j z_i z_J + \varphi_n(e_j)\Big(\varphi_{n-1}(e_i)z_J - z_i z_J\Big)\bigg) + \varphi_{n-1}\big([e_i, e_j]\big)z_J,
\end{aligned}$$

dabei gilt das letzte Gleichheitszeichen wegen $z_i z_j = (-1)^{\alpha(e_i)\alpha(e_j)}z_j z_i$ in $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$.

Wegen (A_{n-1}) ist $z_j z_i z_J = \varphi_n(e_j)(z_i z_J)$, da $j < i$ und $j \leq J$. Damit haben wir:

$$\begin{aligned}
\varphi_n(e_i)z_I &= (-1)^{\alpha(e_i)\alpha(e_j)}\Big(\varphi_n(e_j)\big(z_i z_J + \varphi_{n-1}(e_i)z_J - z_i z_J\big)\Big) + \varphi_{n-1}\big([e_i, e_j]\big)z_J \\
&= (-1)^{\alpha(e_i)\alpha(e_j)}\varphi_n(e_j)\Big(\varphi_{n-1}(e_i)z_J\Big) + \varphi_{n-1}\big([e_i, e_j]\big)z_J.
\end{aligned}$$

Da $j \leq J$, folgt $\varphi_n(e_i)z_I = \varphi_n(e_i)z_j z_J = \varphi_n(e_i)\varphi_{n-1}(e_j)z_J$ mit (A_{n-1}). Das gibt:

$$\varphi_n(e_i)\Big(\varphi_{n-1}(e_j)z_J\Big) = (-1)^{\alpha(e_i)\alpha(e_j)}\varphi_n(e_j)\Big(\varphi_{n-1}(e_i)z_J\Big) + \varphi_{n-1}\big([e_i, e_j]\big)z_J, \qquad (10)$$

d. h. mit dieser Definition ist (C_n) bereits erfüllt für $i \not\leq I = (j, J)$, $j < i$ und $j \leq J$.

Falls $n = 1$, sind wir an dieser Stelle fertig. Denn wegen $|J| = 0$ ist nach Konvention stets $j \leq J$. Es sei daher im folgenden $n \geq 2$.

Mit $[e_i, e_j] = -(-1)^{\alpha(e_i)\alpha(e_j)}[e_j, e_i]$ folgt aus Gleichung (10):

$$(-1)^{\alpha(e_i)\alpha(e_j)}\varphi_n(e_i)\Big(\varphi_{n-1}(e_j)z_J\Big) = \varphi_n(e_j)\Big(\varphi_{n-1}(e_i)z_J\Big) - \varphi_{n-1}\big([e_j, e_i]\big)z_J$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_n(e_j)\Big(\varphi_{n-1}(e_i)z_J\Big) = (-1)^{\alpha(e_i)\alpha(e_j)}\varphi_n(e_i)\Big(\varphi_{n-1}(e_j)z_J\Big) + \varphi_{n-1}\big([e_j, e_i]\big)z_J.$$

Eine Vertauschung der Indizes i und j liefert:

$$\varphi_n(e_i)\Big(\varphi_{n-1}(e_j)z_J\Big) = (-1)^{\alpha(e_i)\alpha(e_j)}\varphi_n(e_j)\Big(\varphi_{n-1}(e_i)z_J\Big) + \varphi_{n-1}\big([e_i, e_j]\big)z_J$$

mit $i < j$, $i \leq J$; für diesen Fall ist (C$_n$) also auch erfüllt.

Wir betrachten nun $i = j \leq J$. Um die Gültigkeit von (C$_n$) auch dafür zu zeigen, müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

- $e_i \in \mathfrak{g}_{[0]}$. Es ist dann $\alpha(e_i) = 0$, und wir erhalten:

  $$\varphi_n(e_i)\Big(\varphi_{n-1}(e_i)z_J\Big) = \underbrace{(-1)^{\alpha(e_i)\alpha(e_i)}}_{=1}\varphi_n(e_i)\Big(\varphi_{n-1}(e_i)z_J\Big) + \varphi_{n-1}\Big(\underbrace{[e_i, e_i]}_{=0}\Big)z_J.$$

  Das gibt (C$_n$).

- $e_i \in \mathfrak{g}_{[1]}$. Nach (A$_n$) gilt dann:

  $$\varphi_n(e_i)\Big(\varphi_{n-1}(e_i)z_J\Big) = \varphi_n(e_i)(z_i z_J) = \tfrac{1}{2}\varphi_n\big([e_i, e_i]\big)(z_J).$$

  Multiplizieren mit 2 und Subtrahieren von $\varphi_n(e_i)\Big(\varphi_{n-1}(e_i)z_J\Big)$ liefert wegen $\alpha(e_i) = 1$:

  $$\varphi_n(e_i)\Big(\varphi_{n-1}(e_i)z_J\Big) = \underbrace{(-1)^{\alpha(e_i)\alpha(e_i)}}_{=-1}\varphi_n(e_i)\Big(\varphi_{n-1}(e_i)z_J\Big) + \varphi_{n-1}\big([e_i, e_i]\big)z_J.$$

  Damit ist auch hier (C$_n$) erfüllt.

Insgesamt wissen wir jetzt also für $n \geq 2$: (C$_n$) gilt stets, falls $i \leq J$ oder $j \leq J$.

Sei daher im folgenden $i \not\leq J$ und $j \not\leq J$ für ein wohlansteigendes J der Länge $|J| = n - 1$. Wir zerlegen $J = (k, K)$ mit $k \leq K$ und $|K| = n - 2$. Es gilt dann $k < i$ und $k < j$.

Damit betrachten wir zunächst $\varphi_n(e_i)\varphi_{n-1}(e_j)z_J$. Zur Abkürzung schreiben wir $\alpha_i := \alpha(e_i)$ und erhalten folgendes:

$$\begin{aligned}
&\varphi_n(e_i)\varphi_{n-1}(e_j)z_J \\
&= \varphi_n(e_i)\varphi_{n-1}(e_j)z_k z_K \\
&= \varphi_n(e_i)\varphi_{n-1}(e_j)\varphi_{n-2}(e_k)z_K \\
&= \varphi_n(e_i)\Big((-1)^{\alpha_j\alpha_k}\varphi_{n-1}(e_k)\varphi_{n-2}(e_j)(z_K) + \varphi_{n-2}([e_j, e_k])(z_K)\Big) \quad \text{mit } (\mathrm{C}_{n-1}).
\end{aligned}$$

Nach (B_{n-2}) ist $\varphi_{n-2}(e_j)(z_K) = z_j z_K + w$ mit einem $w \in S_{n-2}(\mathfrak{g})$. Das gibt:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_n(e_i)\varphi_{n-1}(e_j)z_J \\
&= \varphi_n(e_i)\Big((-1)^{\alpha_j\alpha_k}\varphi_{n-1}(e_k)(z_j z_K + w) + \varphi_{n-2}([e_j, e_k])(z_K)\Big) \\
&= (-1)^{\alpha_j\alpha_k}\Big(\underbrace{\varphi_n(e_i)\varphi_{n-1}(e_k)(z_j z_K)}_{①} + \underbrace{\varphi_n(e_i)\varphi_{n-1}(e_k)(w)}_{②}\Big) + \underbrace{\varphi_n(e_i)\varphi_{n-2}([e_j, e_k])(z_K)}_{③}.
\end{aligned}
$$

Wir betrachten die drei Summanden ①, ② und ③ einzeln, man beachte dabei: $\varphi_n(e_\ell)\big|_{S_{n-1}(\mathfrak{g})} = \varphi_{n-1}(e_\ell)$ für alle n.

① Es ist $k \leq (j, K)$; damit läßt sich (C_n) anwenden:

$$
\varphi_n(e_i)\varphi_{n-1}(e_k)(z_j z_K) = (-1)^{\alpha_i\alpha_k}\varphi_n(e_k)\varphi_{n-1}(e_i)(z_j z_K) + \varphi_{n-1}([e_i, e_k])(z_j z_K).
$$

② Da $w \in S_{n-2}(\mathfrak{g})$, läßt sich hier ($\mathrm{C}_{n-1}$) anwenden:

$$
\varphi_n(e_i)\varphi_{n-1}(e_k)(w) = (-1)^{\alpha_i\alpha_k}\varphi_n(e_k)\varphi_{n-1}(e_i)(w) + \varphi_{n-1}([e_i, e_k])(w).
$$

③ Es ist $z_K \in S_{n-2}(\mathfrak{g})$. Daher folgt mit ($\mathrm{C}_{n-1}$):

$$
\begin{aligned}
\varphi_n(e_i)\varphi_{n-2}([e_j, e_k])(z_K) &= (-1)^{\alpha(e_i)\alpha([e_j, e_k])}\varphi_{n-1}([e_j, e_k])\varphi_{n-2}(e_i)(z_K) \\
&\quad + \varphi_{n-2}\big([e_i, [e_j, e_k]]\big)(z_K).
\end{aligned}
$$

Dabei ist $\alpha([e_j, e_k]) = \alpha(e_j) + \alpha(e_k) \in \mathbb{Z}_2$. Das gibt:

$$
\begin{aligned}
\varphi_n(e_i)\varphi_{n-2}([e_j, e_k])(z_K) &= (-1)^{\alpha_i\alpha_j}(-1)^{\alpha_i\alpha_k}\varphi_{n-1}([e_j, e_k])\varphi_{n-2}(e_i)(z_K) \\
&\quad + \varphi_{n-2}\big([e_i, [e_j, e_k]]\big)(z_K).
\end{aligned}
$$

Setzt man alles ein, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_n(e_i)\varphi_{n-1}(e_j)z_J \\
&= (-1)^{\alpha_j\alpha_k}\Big((-1)^{\alpha_i\alpha_k}\varphi_n(e_k)\varphi_{n-1}(e_i)(z_j z_K + w) + \varphi_{n-1}([e_i, e_k])(z_j z_K + w)\Big) \\
&\quad + (-1)^{\alpha_i\alpha_j}(-1)^{\alpha_i\alpha_k}\varphi_{n-1}([e_j, e_k])\varphi_{n-2}(e_i)(z_K) \\
&\quad + \varphi_{n-2}\big([e_i, [e_j, e_k]]\big)(z_K).
\end{aligned}
$$

Mit $z_j z_K + w = \varphi_{n-2}(e_j)(z_K)$ gibt das:

$$
\begin{aligned}
\varphi_n(e_i)\varphi_{n-1}(e_j)z_J &= (-1)^{\alpha_j\alpha_k}(-1)^{\alpha_i\alpha_k}\varphi_n(e_k)\varphi_{n-1}(e_i)\varphi_{n-2}(e_j)(z_K) \\
&\quad + (-1)^{\alpha_j\alpha_k}\varphi_{n-1}([e_i, e_k])\varphi_{n-2}(e_j)(z_K) \\
&\quad + (-1)^{\alpha_i\alpha_j}(-1)^{\alpha_i\alpha_k}\varphi_{n-1}([e_j, e_k])\varphi_{n-2}(e_i)(z_K) \\
&\quad + \varphi_{n-2}\big([e_i, [e_j, e_k]]\big)(z_K). \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Analog erhält man für $\varphi_n(e_j)\varphi_{n-1}(e_i)z_J$:

$$\begin{aligned}\varphi_n(e_j)\varphi_{n-1}(e_i)z_J = {} & (-1)^{\alpha_i\alpha_k}(-1)^{\alpha_j\alpha_k}\varphi_n(e_k)\varphi_{n-1}(e_j)\varphi_{n-2}(e_i)(z_K) \\ & + (-1)^{\alpha_i\alpha_k}\varphi_{n-1}([e_j,e_k])\varphi_{n-2}(e_i)(z_K) \\ & + (-1)^{\alpha_j\alpha_i}(-1)^{\alpha_j\alpha_k}\varphi_{n-1}([e_i,e_k])\varphi_{n-2}(e_j)(z_K) \\ & + \varphi_{n-2}\big([e_j,[e_i,e_k]]\big)(z_K).\end{aligned} \tag{12}$$

Mit den Gleichungen (11) und (12) erhält man:

$$\begin{aligned}& \varphi_n(e_i)\varphi_{n-1}(e_j)(z_J) - (-1)^{\alpha_i\alpha_j}\varphi_n(e_j)\varphi_{n-1}(e_i)(z_J) \\ & = (-1)^{\alpha_j\alpha_k}(-1)^{\alpha_i\alpha_k}\varphi_n(e_k)\varphi_{n-1}(e_i)\varphi_{n-2}(e_j)(z_K) \\ & \quad + (-1)^{\alpha_j\alpha_k}\varphi_{n-1}([e_i,e_k])\varphi_{n-2}(e_j)(z_K) \\ & \quad + (-1)^{\alpha_i\alpha_j}(-1)^{\alpha_i\alpha_k}\varphi_{n-1}([e_j,e_k])\varphi_{n-2}(e_i)(z_K) \\ & \quad + \varphi_{n-2}\big([e_i,[e_j,e_k]]\big)(z_K) \\ & \quad - (-1)^{\alpha_i\alpha_j}\Big((-1)^{\alpha_i\alpha_k}(-1)^{\alpha_j\alpha_k}\varphi_n(e_k)\varphi_{n-1}(e_j)\varphi_{n-2}(e_i)(z_K) \\ & \qquad + (-1)^{\alpha_i\alpha_k}\varphi_{n-1}([e_j,e_k])\varphi_{n-2}(e_i)(z_K) \\ & \qquad + (-1)^{\alpha_j\alpha_i}(-1)^{\alpha_j\alpha_k}\varphi_{n-1}([e_i,e_k])\varphi_{n-2}(e_j)(z_K) \\ & \qquad + \varphi_{n-2}\big([e_j,[e_i,e_k]]\big)(z_K)\Big).\end{aligned}$$

Umsortieren gibt:

$$\begin{aligned}& \varphi_n(e_i)\varphi_{n-1}(e_j)(z_J) - (-1)^{\alpha_i\alpha_j}\varphi_n(e_j)\varphi_{n-1}(e_i)(z_J) \\ & = (-1)^{\alpha_j\alpha_k}(-1)^{\alpha_i\alpha_k}\varphi_n(e_k)\varphi_{n-1}(e_i)\varphi_{n-2}(e_j)(z_K) \\ & \quad - (-1)^{\alpha_i\alpha_j}(-1)^{\alpha_i\alpha_k}(-1)^{\alpha_j\alpha_k}\varphi_n(e_k)\varphi_{n-1}(e_j)\varphi_{n-2}(e_i)(z_K) \\ & \quad + \varphi_{n-2}\big([e_i,[e_j,e_k]]\big)(z_K) \\ & \quad - (-1)^{\alpha_i\alpha_j}\varphi_{n-2}\big([e_j,[e_i,e_k]]\big)(z_K) \\ & \quad + (-1)^{\alpha_j\alpha_k}\varphi_{n-1}([e_i,e_k])\varphi_{n-2}(e_j)(z_K) \\ & \quad - (-1)^{\alpha_i\alpha_j}(-1)^{\alpha_i\alpha_k}\varphi_{n-1}([e_j,e_k])\varphi_{n-2}(e_i)(z_K) \\ & \quad + (-1)^{\alpha_i\alpha_j}(-1)^{\alpha_i\alpha_k}\varphi_{n-1}([e_j,e_k])\varphi_{n-2}(e_i)(z_K) \\ & \quad - \underbrace{(-1)^{\alpha_i\alpha_j}(-1)^{\alpha_j\alpha_i}}_{=1}(-1)^{\alpha_j\alpha_k}\varphi_{n-1}([e_i,e_k])\varphi_{n-2}(e_j)(z_K).\end{aligned}$$

Die letzen vier Summanden addieren sich zu 0. Damit bleibt:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_n(e_i)\varphi_{n-1}(e_j)(z_J) - (-1)^{\alpha_i\alpha_j}\varphi_n(e_j)\varphi_{n-1}(e_i)(z_J) \\
&= (-1)^{\alpha_j\alpha_k}(-1)^{\alpha_i\alpha_k}\varphi_n(e_k)\varphi_{n-1}(e_i)\varphi_{n-2}(e_j)(z_K) \\
&\quad - (-1)^{\alpha_i\alpha_j}(-1)^{\alpha_i\alpha_k}(-1)^{\alpha_j\alpha_k}\varphi_n(e_k)\varphi_{n-1}(e_j)\varphi_{n-2}(e_i)(z_K) \\
&\quad + \varphi_{n-2}\big([e_i,[e_j,e_k]]\big)(z_K) \\
&\quad - (-1)^{\alpha_i\alpha_j}\varphi_{n-2}\big([e_j,[e_i,e_k]]\big)(z_K) \\
&\quad + 0.
\end{aligned}
$$

Dieses formen wir noch ein wenig um:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_n(e_i)\varphi_{n-1}(e_j)(z_J) - (-1)^{\alpha_i\alpha_j}\varphi_n(e_j)\varphi_{n-1}(e_i)(z_J) \\
&= (-1)^{\alpha_j\alpha_k}(-1)^{\alpha_i\alpha_k}\varphi_n(e_k)\Big(\underbrace{\varphi_{n-1}(e_i)\varphi_{n-2}(e_j)(z_K) - (-1)^{\alpha_i\alpha_j}\varphi_{n-1}(e_j)\varphi_{n-2}(e_i)(z_K)}_{=\varphi_{n-2}([e_i,e_j])(z_K)\text{ nach }(\mathrm{C}_{n-1})}\Big) \\
&\quad + \varphi_{n-2}\big([e_i,[e_j,e_k]]\big)(z_K) - (-1)^{\alpha_i\alpha_j}\varphi_{n-2}\big([e_j,[e_i,e_k]]\big)(z_K) \\
&= (-1)^{\alpha_j\alpha_k}(-1)^{\alpha_i\alpha_k}\Big(\varphi_{n-1}(e_k)\varphi_{n-2}([e_i,e_j])(z_K)\Big) \\
&\quad + \varphi_{n-2}\big([e_i,[e_j,e_k]]\big)(z_K) - (-1)^{\alpha_i\alpha_j}\varphi_{n-2}\big([e_j,[e_i,e_k]]\big)(z_K).
\end{aligned} \tag{13}
$$

Nach (C_{n-1}) ist

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{n-1}(e_k)\varphi_{n-2}([e_i,e_j])(z_K) \\
&= (-1)^{\alpha(e_k)\alpha([e_i,e_j])}\varphi_{n-1}([e_i,e_j])\varphi_{n-2}(e_k)(z_K) + \varphi_{n-2}\big([e_k,[e_i,e_j]]\big)(z_K) \\
&= (-1)^{\alpha_k\alpha_i}(-1)^{\alpha_k\alpha_j}\varphi_{n-1}([e_i,e_j])\varphi_{n-2}(e_k)(z_K) + \varphi_{n-2}\big([e_k,[e_i,e_j]]\big)(z_K).
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir aus Gleichung (13):

$$
\begin{aligned}
&\varphi_n(e_i)\varphi_{n-1}(e_j)(z_J) - (-1)^{\alpha_i\alpha_j}\varphi_n(e_j)\varphi_{n-1}(e_i)(z_J) \\
&= \varphi_{n-1}([e_i,e_j])\varphi_{n-2}(e_k)(z_K) \\
&\quad + (-1)^{\alpha_k\alpha_i}(-1)^{\alpha_k\alpha_j}\varphi_{n-2}\big([e_k,[e_i,e_j]]\big)(z_K) \\
&\quad + \varphi_{n-2}\big([e_i,[e_j,e_k]]\big)(z_K) - (-1)^{\alpha_i\alpha_j}\varphi_{n-2}\big([e_j,[e_i,e_k]]\big)(z_K).
\end{aligned} \tag{14}
$$

Wegen $[e_i,e_k] = -(-1)^{\alpha_i\alpha_k}[e_k,e_i]$ gilt für den letzten Summanden:

$$
-(-1)^{\alpha_i\alpha_j}\varphi_{n-2}\big([e_j,[e_i,e_k]]\big)(z_K) = (-1)^{\alpha_i\alpha_j}(-1)^{\alpha_i\alpha_k}\varphi_{n-2}\big([e_j,[e_k,e_i]]\big)(z_K).
$$

Aus Gleichung (14) folgt damit:

$$\begin{aligned}
&\varphi_n(e_i)\varphi_{n-1}(e_j)(z_J) - (-1)^{\alpha_i\alpha_j}\varphi_n(e_j)\varphi_{n-1}(e_i)(z_J) \\
&= \varphi_{n-1}([e_i,e_j])\varphi_{n-2}(e_k)(z_K) \\
&\quad + (-1)^{\alpha_i\alpha_k}\Big((-1)^{\alpha_k\alpha_j}\varphi_{n-2}\big(\big[e_k,[e_i,e_j]\big]\big)(z_K) \\
&\qquad\quad + (-1)^{\alpha_i\alpha_k}\varphi_{n-2}\big(\big[e_i,[e_j,e_k]\big]\big)(z_K) + (-1)^{\alpha_i\alpha_j}\varphi_{n-2}\big(\big[e_j,[e_k,e_i]\big]\big)(z_K)\Big) \\
&= \varphi_{n-1}([e_i,e_j])\varphi_{n-2}(e_k)(z_K) \\
&\quad + (-1)^{\alpha_i\alpha_k}\Bigg(\varphi_{n-2}\Big((-1)^{\alpha_k\alpha_j}\big[e_k,[e_i,e_j]\big] + (-1)^{\alpha_i\alpha_k}\big[e_i,[e_j,e_k]\big] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + (-1)^{\alpha_i\alpha_j}\big[e_j,[e_k,e_i]\big]\Big)(z_K)\Bigg) \\
&= \varphi_{n-1}([e_i,e_j])\varphi_{n-2}(e_k)(z_K) + 0,
\end{aligned}$$

denn es ist $(-1)^{\alpha_k\alpha_j}\big[e_k,[e_i,e_j]\big] + (-1)^{\alpha_i\alpha_k}\big[e_i,[e_j,e_k]\big] + (-1)^{\alpha_i\alpha_j}\big[e_j,[e_k,e_i]\big] = 0$ nach der Jacobi-Identität.

Wegen $\varphi_{n-2}(e_k)(z_K) = z_k z_K = z_J$ haben wir:

$$\varphi_n(e_i)\varphi_{n-1}(e_j)(z_J) = (-1)^{\alpha_i\alpha_j}\varphi_n(e_j)\varphi_{n-1}(e_i)(z_J) + \varphi_{n-1}\big([e_i,e_j]\big)(z_J).$$

Damit ist die Gültigkeit von (C_n) auch für den allgemeinen Fall bewiesen, und wir haben den Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt für die universelle einhüllende Superalgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ gezeigt. ∎

4 Der Satz von Ado

In diesem Kapitel wollen wir einen Beweis für den Satz von Ado für Super-Lie-Algebren angeben, welcher das Ziel dieser Arbeit darstellt:

Satz (Ado)**:** *Jede endlichdimensionale Super-Lie-Algebra hat eine treue Darstellung auf einem $\mathbb{Z}_2$-graduierten Vektorraum.*

Wir orientieren uns für den Beweis vorwiegend an Scheunert (1979, Seite 51ff) sowie sekundär an Kac (1977b, Seite 55). Dazu benötigen wir zunächst noch ein wenig Theorie über induzierte Moduln; letztendlich basiert der von uns gegebene Beweis aber auf dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt und auf dem Satz von Ado für Lie-Algebren.

Als erster hat L. E. Ross einen Beweis für den Satz von Ado für Super-Lie-Algebren veröffentlicht (Ross, 1965). Auch sein Beweis baut auf dem Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt sowie auf dem Satz von Ado für Lie-Algebren auf.

4.1 Induzierte Moduln

Sei $\mathfrak{g}$ eine Super-Lie-Algebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Super-Lie-Unteralgebra. Seien $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ und $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ die universellen einhüllenden Superalgebren von $\mathfrak{g}$ bzw. $\mathfrak{h}$. Da sich $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ injektiv in $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ einbetten läßt, können wir $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ als einen $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$-Modul ansehen (☞ Lemma 23 auf Seite 53).

Sei nun V ein $\mathfrak{h}$-Modul, d. h. die Super-Lie-Algebra $\mathfrak{h}$ hat eine Darstellung φ auf V. Wegen der universellen Eigenschaft von $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$ ist V dann auch ein $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$-Modul (☞ Abschnitt 3.4.3 auf Seite 49).

Bei dem Tensorprodukt

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})} V$$

der $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$-Moduln $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ und V handelt es sich dann um einen $\mathbb{Z}_2$-graduierten Vektorraum mit:

$$\big(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})} V\big)_{[0]} = \operatorname{span}\Big\{x \otimes v \;\Big|\; x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})_{[0]}, v \in V_{[0]} \text{ oder } x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})_{[1]}, v \in V_{[1]}\Big\},$$
$$\big(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})} V\big)_{[1]} = \operatorname{span}\Big\{x \otimes v \;\Big|\; x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})_{[0]}, v \in V_{[1]} \text{ oder } x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})_{[1]}, v \in V_{[0]}\Big\}.$$

Außerdem wird $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})} V$ zu einem $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-Modul, indem man setzt:

$$g.\Big(\sum_i^{<\infty} x_i \otimes v_i\Big) := \sum_i^{<\infty} (g \cdot x_i) \otimes v_i \quad \text{für alle } g \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}), \sum_i^{<\infty} (x_i \otimes v_i) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})} V.$$

Definition 30: *Der $\mathbb{Z}_2$-graduierte $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-Modul $V_{\mathrm{ind}} := \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})} V$ heißt* ***der vom $\mathfrak{h}$-Modul V induzierte $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-Modul****.*

Wenn $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{g}_{[0]}$, ist $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ nach Satz 10 auf Seite 55 sogar ein freier $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$-Modul. Eine $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$-Basis von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ ist dann wie folgt gegeben: Sei $\{e_k\}_{k\in B}$ eine Familie von Elementen aus $\mathfrak{g}_{[1]}$ mit total geordneter Indexmenge B, so daß die Bilder der e_k unter der kanonischen Abbildung $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ eine Basis des Quotientenvektorraumes $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ bilden. Dann bilden alle Monome der Form

$$(e_{k_1})^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot (e_{k_m})^{\mu_m} \quad \text{mit } k_\ell \in B, k_1 < \ldots < k_m, m \in \mathbb{N}, \\ \mu_\ell \in \{0,1\} \text{ stets}$$

eine Basis des $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$-Moduls $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Diese Monome lassen sich auch auf andere Art und Weise notieren. Wir erinnern dazu an unsere Bezeichner, die wir beim Beweis des Satzes von Poincaré-Birkhoff-Witt eingeführt haben: Für ein Tupel $I := (i_1, \ldots, i_n)$ von beliebigen, paarweise verschiedenen Indizes $i_\ell \in B$ schreiben wir $e_I := e_{i_1} \cdot \ldots \cdot e_{i_n}$. Die Länge $|I|$ des Tupels I ist die Anzahl n der Indizes. Für das leere Tupel I mit Länge $|I| = 0$ haben wir formal $e_I := 1$ gesetzt.

Eine Basis des $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$-Moduls $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ bilden dann alle Monome e_I mit Indextupel $I = (i_1, \ldots, i_n)$, für welches stets $i_\ell \in B$ und $i_\ell < i_{\ell+1}$ oder $|I| = 0$ ist. Wir bezeichnen die Menge all dieser Indextupel mit $\mathfrak{I}$.

Damit erhalten wir die folgenden Aussagen:

Lemma 27: *Sei $\mathfrak{g}$ eine Super-Lie-Algebra und $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ eine Super-Lie-Unteralgebra mit $\mathfrak{g}_{[0]} \subset \mathfrak{h}$. Sei $\{e_i\}_{i\in B}$ eine Familie von Elementen aus $\mathfrak{g}_{[1]}$, deren Bilder unter $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ eine Basis von $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ bilden; die Indexmenge B sei total geordnet. Sei V ein $\mathfrak{h}$-Modul und V_{ind} der von V induzierte $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-Modul. Sei $\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine K-Basis von V. Es gilt:*

I: *Für jedes Indextupel $I \in \mathfrak{I}$ ist die lineare Abbildung*

$$\tau_I \colon V \to V_{\mathrm{ind}}, \quad v \mapsto e_I \otimes v$$

injektiv.

II: *Alle Elemente $e_I \otimes v_\lambda$ mit $I \in \mathfrak{I}$ und $\lambda \in \Lambda$ bilden eine Vektorraumbasis von V_{ind}.*

III: *Der Vektorraum V_{ind} ist direkte Summe von Unterräumen $e_I \otimes V$ mit*

$$e_I \otimes V := \operatorname{span}\{e_I \otimes v \mid v \in V\}, I \in \mathfrak{I}.$$

Beweis: ad I: Sei $I \in \mathfrak{I}$ ein Indextupel. Sei $v \in V$ mit $0 = \tau_I(v) = e_I \otimes v$. Wegen $e_I \neq 0$ ist dann $v = 0$.

ad II: Alle e_I mit $I \in \mathfrak{I}$ bilden nach Satz 10 auf Seite 55 eine Basis von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ als $\mathcal{U}(\mathfrak{h})$-Modul. Sei nun $\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine K-Basis von V. Für ein $h \in \mathcal{U}(\mathfrak{h})$, ein Basiselement e_I

und ein $v \in V$ ist dann $(h \cdot e_I) \otimes v \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})} V$, und es gilt:

$$(h \cdot e_I) \otimes v = e_I \otimes (h.v) = e_I \otimes \sum_\lambda a_\lambda v_\lambda = \sum_\lambda a_\lambda (e_I \otimes v_\lambda), \quad \text{mit } a_\lambda \in K.$$

Damit genügen alle $e_I \otimes v_\lambda$ mit $I \in \mathfrak{I}$, $\lambda \in \Lambda$, um V_{ind} als Vektorraum zu erzeugen. Die Unabhängigkeit der Elemente $e_I \otimes v_\lambda$ ist klar, damit ist die Familie $\{e_I \otimes v_\lambda\}_{I\in\mathfrak{I},\lambda\in\Lambda}$ eine Vektorraumbasis von $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{h})} V = V_{\text{ind}}$.

ad III: Nach II erhält man V_{ind} als direkte Summe

$$V_{\text{ind}} = \bigoplus_{I\in\mathfrak{I}} \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K(e_I \otimes v_\lambda).$$

Dabei ist $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} K(e_I \otimes v_\lambda) = \operatorname{span}\{e_I \otimes v \mid v \in V\} = e_I \otimes V$. Das gibt:

$$V_{\text{ind}} = \bigoplus_{I\in\mathfrak{I}} (e_I \otimes V). \qquad \blacksquare$$

4.2 Der Satz von Ado für Super-Lie-Algebren

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, daß man jede endlichdimensionale Super-Lie-Algebra als eine Super-Lie-Algebra von Matrizen ansehen kann:

> **Satz 11** (Ado)**:** *Jede endlichdimensionale Super-Lie-Algebra hat eine treue Darstellung auf einem $\mathbb{Z}_2$-graduierten Vektorraum.*

Für den Beweis werden wir die Ergebnisse über induzierte Moduln verwenden. Dafür benötigen wir aber noch einige Vorbereitungen.

Es sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]} \oplus \mathfrak{g}_{[1]}$ eine Super-Lie-Algebra; dann ist die Lie-Algebra $\mathfrak{g}_{[0]}$ eine Super-Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{g}$. Sei V ein $\mathfrak{g}_{[0]}$-Modul, den wir mit einer trivialen $\mathbb{Z}_2$-Graduierung versehen:

$$V_{[0]} = V, \qquad V_{[1]} = \{0\}.$$

Der induzierte Modul $V_{\text{ind}} = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{[0]})} V$ ist dann $\mathbb{Z}_2$-graduiert mit:

$$\begin{aligned} (V_{\text{ind}})_{[0]} &= \operatorname{span}\{x \otimes v \mid x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})_{[0]}, v \in V\}, \\ (V_{\text{ind}})_{[1]} &= \operatorname{span}\{x \otimes v \mid x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})_{[1]}, v \in V\}. \end{aligned}$$

Da sich $\mathfrak{g}$ injektiv in $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ einbetten läßt, kann man den $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-Modul V_{ind} auch als einen $\mathfrak{g}$-Modul ansehen. Es gelten dann folgende Aussagen:

Lemma 28: *Sei* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]} \oplus \mathfrak{g}_{[1]}$ *eine Super-Lie-Algebra und* V *ein* $\mathfrak{g}_{[0]}$*-Modul. Dann gilt für den induzierten Modul* V_{ind}*:*

I: *Wenn die Darstellung von* $\mathfrak{g}_{[0]}$ *auf* V *treu ist, so ist auch die Darstellung von* $\mathfrak{g}$ *auf dem Vektorraum* V_{ind} *treu.*

II: *Wenn* $\mathfrak{g}_{[1]}$ *und* V *beide endlichdimensional sind, dann ist auch* V_{ind} *endlichdimensional.*

Beweis: ad I: Sei $\{e_k\}_{k\in B}$ eine Basis von $\mathfrak{g}_{[1]} \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{[0]}$ mit total geordneter Indexmenge B und $\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ eine Basis von V.

Sei $g = g_0 + g_1 \in \mathfrak{g}$ mit $g_0 \in \mathfrak{g}_{[0]}$ und $g_1 \in \mathfrak{g}_{[1]}$, so daß gilt:

$$g.(u \otimes v) = 0 \quad \text{für alle } u \otimes v \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{[0]})} V = V_{\text{ind}}.$$

Insbesondere folgt dann für jedes beliebige $1 \otimes v \in V_{\text{ind}}$:

$$0 = g.(1 \otimes v) = (g_0 + g_1).(1 \otimes v) = (1 \otimes g_0.v) + (g_1 \otimes v).$$

Dabei ist $g_0.v = \sum_\lambda^{<\infty} c_\lambda v_\lambda$ und $g_1 = \sum_k^{<\infty} a_k e_k$ mit $c_\lambda \in K$ und $a_k \in K$. Das gibt:

$$\begin{aligned} 0 = g.(1 \otimes v) &= \Big(1 \otimes \sum_\lambda^{<\infty} c_\lambda v_\lambda\Big) + \Big(\sum_k^{<\infty} a_k e_k \otimes v\Big) \\ &= \sum_\lambda^{<\infty} c_\lambda (1 \otimes v_\lambda) + \sum_k^{<\infty} a_k (e_k \otimes v). \end{aligned}$$

Mit $v = \sum_\lambda^{<\infty} b_\lambda v_\lambda$ folgt:

$$0 = g.(1 \otimes v) = \sum_\lambda^{<\infty} c_\lambda (1 \otimes v_\lambda) + \sum_k^{<\infty} \sum_\lambda^{<\infty} a_k b_\lambda (e_k \otimes v_\lambda).$$

Nach Lemma 27 (II) sind $1 \otimes v_\lambda$ und $e_k \otimes v_\lambda$ Basiselemente von V_{ind}. Also ist stets $c_\lambda = 0$ und $a_k = 0$, d. h. $g_1 = 0$ und $g_0.v = 0$ für jedes $v \in V$. Da die Darstellung von $\mathfrak{g}_{[0]}$ auf V treu ist, folgt $g_0 = 0$. Also ist insgesamt $g = 0$.

ad II: Seien $\mathfrak{g}_{[1]}$ und V beide endlichdimensional. Sei $\{e_1, \ldots, e_m\}$ eine Basis von $g_{[1]}$ und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Nach Lemma 27 (II) wird eine Vektorraumbasis von V_{ind} gebildet von allen Elementen

$$\begin{aligned} 1 \otimes v_j \quad & \text{mit } 1 \leq j \leq n, \\ e_{i_1} \ldots e_{i_k} \otimes v_j \quad & \text{mit } 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m \text{ und } 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Dabei ist die Anzahl der Elemente $e_{i_1} \ldots e_{i_k}$ mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m$ endlich; das „maximale“ Element dieser Art ist $e_1 e_2 \ldots e_n$. Die Anzahl dieser Elemente ist gegeben durch $\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} = 2^m - 1$. Berücksichtigt man noch die Basisvektoren $1 \otimes v_j$ von V_{ind}, so folgt:

$$\dim V_{\text{ind}} = n + (2^m - 1) \cdot n = 2^m \cdot n. \qquad \blacksquare$$

Bevor wir nun den Satz von Ado für Super-Lie-Algebren beweisen, erinnern wir noch an den entsprechenden Satz für Lie-Algebren:

Satz (Ado)**:** *Jede endlichdimensionale Lie-Algebra hat eine treue Darstellung auf einem endlichdimensionalen Vektorraum.*

Diesen Satz werden wir hier nicht zeigen; ein Beweis ist beispielsweise in folgender Literatur notiert:

Bourbaki (1975),	Seite 72;
Hilgert u. Neeb (1991),	Seite 172ff;
Jacobson (1966),	Seite 202ff;
Knapp (2002),	Seite 662ff.

Beweis (Satz 11 – Ado): Sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]} \oplus \mathfrak{g}_{[1]}$ eine endlichdimensionale Super-Lie-Algebra. Nach dem Satz von Ado für Lie-Algebren hat $\mathfrak{g}_{[0]}$ eine treue Darstellung auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V. Nach Lemma 28 ist dann der induzierte Modul V_{ind} ein endlichdimensionaler Vektorraum, und die Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf V_{ind} ist treu. $\blacksquare$

4.3 Ein Beispiel

Die Darstellung einer Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auf dem induzierten Modul, die wir oben für den Beweis des Satzes von Ado konstruiert haben, wollen wir hier an einem Beispiel verdeutlichen. Dazu betrachten wir die „kleinste echte“ Super-Lie-Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]} \oplus \mathfrak{g}_{[1]}$ mit $\dim \mathfrak{g} = (1,1)$ und $\mathfrak{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{[0]}$ (☞ Abschnitt 2.2 auf Seite 13).

Sei dazu $\{e_0, e_1\}$ eine homogene Basis von $\mathfrak{g}$; dabei sei o. B. d. A. $[e_1, e_1] = e_0$. Alle anderen Kommutatoren von Basiselementen sind 0.

Da $\dim \mathfrak{g}_{[0]} = 1$, gibt es eine treue Darstellung von $\mathfrak{g}_{[0]}$ auf einem eindimensionalen Vektorraum V. Ist v_0 ein Basisvektor von V, so läßt sich diese festlegen durch:

$$(c \cdot e_0).v_0 := c \cdot v_0 \quad \text{mit } c \in K.$$

Nach Lemma 27 ist eine Vektorraumbasis des von V induzierten $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-Moduls $V_{\text{ind}} = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{[0]})} V$ gegeben durch $(1 \otimes v_0)$ und $(e_1 \otimes v_0)$. Man erhält dann für die Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf V_{ind}:

$$\begin{aligned}
e_0.(1 \otimes v_0) &= 1 \otimes e_0.v_0 = 1 \otimes v_0, \\
e_0.(e_1 \otimes v_0) &= e_1 \otimes e_0.v_0 = e_1 \otimes v_0, \\
e_1.(1 \otimes v_0) &= e_1 \otimes v_0, \\
e_1.(e_1 \otimes v_0) &= e_1 \cdot e_1 \otimes v_0 = \tfrac{1}{2}[e_1, e_1] \otimes v_0 = \tfrac{1}{2} e_0 \otimes v_0 = \tfrac{1}{2}(1 \otimes v_0).
\end{aligned}$$

Da $(1 \otimes v_0) \in (V_{\text{ind}})_{[0]}$ und $(e_1 \otimes v_0) \in (V_{\text{ind}})_{[1]}$, ist $\{1 \otimes v_0, e_1 \otimes v_0\}$ eine homogene Basis von V_{ind}. Bezüglich dieser Basis haben die Basisvektoren e_0 und e_1 von $\mathfrak{g}$ also die folgenden Darstellungen in Matrixform:

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf V_{ind} stimmt mit der Darstellung überein, die wir im Abschnitt 2.2 für diese Super-Lie-Algebra angegeben haben.

5 Ausblick

Im Zusammenhang mit Super-Lie-Algebren gibt es viele Aspekte, auf die wir in dieser Arbeit nicht eingegangen sind. Wir wollen an dieser Stelle zumindest einige davon aufführen.

Beispielsweise haben wir einfache Super-Lie-Algebren nur am Rande erwähnt (☞ Abschnitt 2.1.2 auf Seite 9). Die endlichdimensionalen, einfachen, komplexen Super-Lie-Algebren sind allerdings vollständig klassifiziert; in der Literatur findet man diese Klassifikation in den Artikeln von Kac (1977a, b) und im Buch von Scheunert (1979). Im Artikel von Rittenberg (1978) sind alle einfachen Super-Lie-Algebren mit endlicher Dimension aufgelistet.

In diesem Zusammenhang sind auch die halbeinfachen Super-Lie-Algebren zu erwähnen. Bei diesen handelt es sich um Super-Lie-Algebren, die keine auflösbaren Ideale $\neq \langle 0 \rangle$ besitzen. Im Gegensatz zu Lie-Algebren bestehen halbeinfache Super-Lie-Algebren im allgemeinen nicht aus einer direkten Summe einfacher Super-Lie-Algebren (vgl. Scheunert, 1979, Seite 237). Die Klassifikation der endlichdimensionalen halbeinfachen komplexen Super-Lie-Algebren ergibt sich damit nicht aus der Klassifikation der einfachen und ist nach unserem Wissen noch nicht abgeschlossen.

Interessant und von großer Bedeutung ist der Zusammenhang von Super-Lie-Algebren mit dem Begriff der Supersymmetrie in der Physik, dem sie ihren Namen verdanken. Dort dienen Super-Lie-Algebren dazu, Bosonen (Teilchen mit ganzzahligem Spin) und Fermionen (Teilchen mit sogenanntem halbzahligem Spin) zu verknüpfen. Eine Einführung in die Supersymmetrie ist in den Büchern von Varadarajan (2004) und von Berezin (1987) gegeben.

Verbunden mit Super-Lie-Algebren sind darüber hinaus die Begriffe einer Supermannigfaltigkeit und einer Super-Lie-Gruppe. Eine ausführliche Beschreibung dieser Begriffe und ihre Beziehungen zueinander findet man beispielsweise in den schon genannten Büchern von Berezin (1987) und Varadarajan (2004).

Literatur

Berezin 1987
BEREZIN, Felix Alexandrovich; KIRILLOV, A. A. (Hrsg.):
Mathematical Physics and Applied Mathematics. Bd. 9: *Introduction to Superanalysis*.
Dordrecht: D. Reidel, 1987.

Bosch 2004
BOSCH, Siegfried:
Algebra.
5., überarbeitete Aufl.
Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2004.

Bourbaki 1975
BOURBAKI, Nicolas:
Lie Groups and Lie Algebras, Part I.
Reading: Addison-Weasley, 1975 (Elements of Mathematics).

Cartan u. Eilenberg 1956
CARTAN, Henri; EILENBERG, Samuel:
Princeton Mathematical Series. Bd. 19: *Homological Algebra*.
Princeton: Princeton University Press, 1956.

Corwin u. a. 1975
CORWIN, L.; NE'EMAN, Y.; STERNBERG, S.:
„Graded Lie Algebras in Mathematics and Physics (Bose-Fermi-Symmetry)“.
In: *Reviews of Modern Physics* 47 (1975), Juli, Nr. 3, S. 573 – 603.
DOI 10.1103/RevModPhys.47.573.

Hilgert u. Neeb 1991
HILGERT, Joachim; NEEB, Karl-Hermann:
Lie-Gruppen und Lie-Algebren.
Braunschweig: Vieweg, 1991.

Humphreys 1972
HUMPHREYS, James E.:
Graduate Texts in Mathematics. Bd. 9: *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*.
11th ed.
Springer, 1972.

Jacobson 1966
JACOBSON, Nathan; BERS, L. (Hrsg.); COURANT, R. (Hrsg.); STOKER, J. J. (Hrsg.):
Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics. Bd. 10: *Lie Algebras*.
3rd ed.
New York; London; Sydney: Interscience Publishers, 1966.

Kac 1977a
KAC, V. G.:
„Lie Superalgebras“.
In: *Advances in Mathematics* 26 (1977), Oktober, Nr. 1, S. 8 – 96.
DOI 10.1016/0001-8708(77)90017-2.

Kac 1977b
KAC, V. G.:
„A Sketch of Lie Superalgebra Theory“.
In: *Communications in Mathematical Physics* 53 (1977), S. 31 – 64.
DOI 10.1007/BF01609166.

Knapp 2002
KNAPP, Anthony W.:
Progress in Mathematics. Bd. 140: *Lie Groups Beyond an Introduction*.
2nd ed.
Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser, 2002.

Lang 2002
LANG, Serge:
Graduate Texts in Mathematics. Bd. 211: *Algebra*.
Rev. 3rd ed.
New York; Berlin; Heidelberg: Springer, 2002.

Rittenberg 1978
RITTENBERG, V.:
„A Guide to Lie Superalgebras“.
In: KRAMER, P. (Hrsg.); RIECKERS, A. (Hrsg.): *Lecture Notes in Physics*. Bd. 79: *Group Theoretical Methods in Physics*.
Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1978, Kapitel A.1, S. 3 – 21.

Ross 1965
ROSS, Leonard E.:
„Representations of Graded Lie Algebras“.
In: *Transactions of the American Mathematical Society* 120 (1965), Oktober, Nr. 1, S. 17 – 23.
`http://www.jstor.org/stable/1994163`.

Scheunert 1979
SCHEUNERT, Manfred; DOLD, A. (Hrsg.); ECKMANN, B. (Hrsg.):
Lecture Notes in Mathematics. Bd. 716: *The Theory of Lie Superalgebras*.
Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1979.

Varadarajan 2004
VARADARAJAN, V. S.:
Courant Lecture Notes. Bd. 11: *Supersymmetry for Mathematicians: An Introduction*.
Providence, Rhode Island: American Mathematical Society (AMS), 2004.