Quantenmechanische Grundlagen

Ina Bergen

5. Juli 2001

"I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics."
(Richard Feynman)

"Well, I think that if a man says it [QM] is completely clear to him these days, then he has not understood the suject."
(Niels Bohr)

Inhaltsverzeichnis

1 Dirac-Formalismus

1.1 Zustand

In der klassischen Mechanik wird ein Zustand als minimaler, aber vollständiger Satz von Bestimmungsstücken definiert, der ausreicht, um alle Eigenschaften des Systems daraus ableiten zu können. Da sich in der klassischen Mechanik jede Meßgröße als Funktion der generalisierten Koordinaten und Impulse schreiben läßt, entspricht dem klassischen Zustand der Vektor $\pi = (q, p)$.

Nun wissen wir, daß diese Beschreibung in der Quantenmechanik nicht funktionieren wird, da man die Koordinaten und Impulse nicht simultan messen kann. Daher ist die quantenmechanische Beschreibung nicht so weitreichend wie die klassische und muß sich im Wesentlichen mit Wahrscheinlichkeitsaussagen zufriedengeben.

Definition: Gleichzeitige Messung eines maximalen Satzes von simultan meßbaren ("verträglichen") Eigenschaften präpariert einen "reinen quantenmechanischen Zustand".

Beispiel: Stern-Gerlach...

Es ist eine fundamentale Eigenschaft der Quantenmechanik, daß eine genauere Beschreibung des Systems als durch den so definierten Zustand unmöglich ist. Es gibt keine weitere physikalische Eigenschaft, die nicht lediglich eine Funktion der vorgenannten ist, die in diesem Zustand einen scharfen Wert hat.

1.2 Hilbert-Raum, Dualraum, bra- und ket-Vektoren

Der Zustand eines quantenmechanischen Systems wird durch ein Element eines Hilbert-Raumes $\mathcal{H}$ beschrieben. Ein reiner Zustand entspricht einem Hilbert-Raum-Vektor $|\psi\rangle$.

Eigenschaften von $\mathcal{H}$:

- $\mathcal{H}$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum
- auf $\mathcal{H}$ existiert die Sesquilinearform $\varphi : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, $(|a\rangle, |b\rangle) \mapsto \langle a|b\rangle$ [1]
- $\mathcal{H}$ ist mit der von φ induzierten Norm vollständig.

Im allgemeinen ist die Dimension von $\mathcal{H}$ unendlich, im Falle physikalischer Größen wie Ort und Impuls sogar überabzählbar. Das verkompliziert das Problem enorm, glücklicherweise können wir uns jedoch im Fall der Quantencomputer auf endlichdimensionele Hilbert-Räume beschränken. Für unser Hauptproblem, das noch zu definierende Q-Bit, reicht sogar die Dimension zwei aus.

Nach Dirac werden die Vektoren aus $\mathcal{H}$ als ket-Vektoren, die Elemente aus dem Dualraum $\mathcal{H}^*$ als bra-Vektoren bezeichnet, da ihr Produkt die Skalarproduktklammer ("bra-c-ket") darstellen soll.

[1] In der physikalischen Literatur ist es üblich, φ in der zweiten Variablen linear zu wählen.

1.3 Lineare Operatoren

1.3.1 Hermitesche Operatoren

Physikalischen Meßgrößen ("Observablen") entsprechen hermitesche Operatoren auf $\mathcal{H}$. Daher sind hermitesche Operatoren von fundamentaler Wichtigkeit. Sei A ein hermitescher Operator mit Eigenzuständen $|a_i\rangle$ und zugehörigen Eigenwerten a_i. Dann gilt:

1. Die Erwartungswerte sind reell.
2. Die Eigenwerte sind reell: $a_i \in \mathbb{R}$
3. Die Eigenzustände sind orthogonal: $\langle a_i | a_j \rangle \sim \delta_{ij}$
4. Die Eigenzustände bilden eine Basis von $\mathcal{H}$. Daher läßt sich eine beliebiger Zustand $|\psi\rangle$ bezüglich dieser Basis darstellen als

$$|\psi\rangle = \sum_j |a_j\rangle \langle a_j | \psi\rangle ; \tag{1}$$

man hat man die Vollständigkeitsrelation

$$\mathrm{id} = \sum_j |a_j\rangle \langle a_j | \tag{2}$$

und für den Operator A die Spektraldarstellung

$$A = \sum_j a_j |a_j\rangle \langle a_j | \tag{3}$$

Dabei ist $|a\rangle\langle b|$ das sogenannte äußere oder dyadische Produkt der Zustände $|a\rangle$ und $|b\rangle$:

$$\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathrm{End}(\mathcal{H}), (|a\rangle, |b\rangle) \mapsto |a\rangle \langle b|$$

Die linearen, hermiteschen Operatoren A und B sind genau dann vertauschbar, wenn sie ein gemeinsames ON-System von Eigenzuständen haben.[2]

1.3.2 Projektionsoperator

Besonders wichtig (später auch für die Messung) sind diagonale dyadische Produkte, die man im normierten Fall als Projektoren interpretieren kann:

$$P(|\alpha\rangle) = |\alpha\rangle \langle \alpha| ; \qquad ||\alpha|| = 1 \tag{4}$$

Anschaulich projiziert $\mathrm{P}(|\alpha\rangle)$ einen beliebigen Zustandsvektor $|\psi\rangle$ auf die Richtung von $|\alpha\rangle$. Der Projektionsoperator ist hermitesch und (wie der Name nahelegt) idempotent.

[2] Den Beweis haben wir schon im Proseminar "Ergänzungen zur Linearen Algebra" im Vortrag von Ingolf M. aus H. am Dümmer gesehen :-)

1.3.3 Unitärer Operator

Wie wir später in der physikalischen Interpretation sehen werden, sind die experimentell meßbaren Größen der Quantenmechanik

- Eigenwerte a_i von Operatoren: $A\,|\,a_i\,\rangle = a_i\,|\,a_i\,\rangle$
- Skalarprodukte von Zuständen: $\langle\varphi\,|\,\psi\rangle$
- Erwartungswerte von Operatoren: $\langle\psi\,|A|\,\psi\rangle$

Auf die Zustandvektoren kommt es jedoch nur mittelbar an: Wir können sie beliebig abändern, solange die eben aufgezählten Größen unbeeinflußt bleiben.

U ist ein unitärer Operator, wenn gilt:

$$UU^+ = U^+U = \mathrm{id} \tag{5}$$

Für einen unitären Operator U bezeichnet man folgende Transformationen als unitär:

- für Zustände: $|\,\psi\,\rangle \mapsto U\,|\,\psi\,\rangle$
- für Operatoren: $A \mapsto UAU^+$

Die Invarianz der oben aufgelisteten Größen unter unitären Transformationen rechnet man leicht nach. Fazit: Unitäre Transformationen “ändern die Physik nicht”.

1.3.4 Lineare Operatoren als Matrizen

Sei $B = (|\,\varphi_1\,\rangle \ldots |\,\varphi_n\,\rangle\,)$ eine Basis von $\mathcal{H}$ und $|\,\psi\,\rangle$ ein beliebiger Zustand aus $\mathcal{H}$. Für diesen haben wir nach () die Darstellung

$$|\,\psi\,\rangle = \sum_i |\,\varphi_i\,\rangle\,\langle\varphi_i\,|\,\psi\rangle \tag{6}$$

Da die Komponenten von $|\,\psi\,\rangle$ bezüglich der Basis B den Zustand $|\,\psi\,\rangle$ vollständig festlegen, haben wir die eins-zu-eins-Zuordnung

$$|\,\psi\,\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

mit den Projektionen ψ_i von $|\,\psi\,\rangle$ auf die Basiszustände $|\,\varphi_i\,\rangle$:

$$\psi_i = \langle\varphi_i\,|\,\psi\rangle \tag{8}$$

Analog können wir nun den Operator A wegen

$$A = \mathrm{id}\cdot A\cdot\mathrm{id} = \sum_{i,j} |\,\varphi_i\,\rangle\,\langle\varphi_i\,|A|\,\varphi_j\rangle\,\langle\varphi_j\,| \tag{9}$$

als Matrix schreiben:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Die Matrixelemente sind gegeben durch:

$$A_{ij} = \langle \varphi_i | A | \varphi_j \rangle \tag{11}$$

2 Physikalische Interpretation

"Interpretation was rather more difficult than to play with equations."
(Paul Dirac)

"Quantum mechanics, that mysterious, confusing discipline, which none of us really understands but which we know how to use."
(Murray Gell-Mann)

2.1 Die Postulate der Quantenmechanik

1. Meßapparatur für Observable $\Leftrightarrow$ Linearer, hermitescher Operator A
2. Reiner Zustand $\Leftrightarrow$ Hilbert-Vektor $|\psi\rangle$
3. Messung $\Leftrightarrow$ Anwendung von A auf $|\psi\rangle$, d.h. Spektralzerlegung von $|\psi\rangle$ und Projektion in einen Eigenzustand von A.
4. Meßergebnisse $\Leftrightarrow$ Eigenwerte a_i des Operators A
5. Wahrscheinlichkeit für $a_i \Leftrightarrow p(\langle a_i | \psi \rangle) = |\langle a_i | \psi \rangle|^2$

Die Quantenmechanik ist nicht deterministisch wie die klassische Mechanik, sie kann nur Fragen nach Wahrscheinlichkeiten beantworten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das System im Zustand $|\psi\rangle$ den Meßwert a_i angenimmt, ist nur dann gleich eins, wenn $|\psi\rangle$ mit dem Eigenzustand $|a_i\rangle$ von A übereinstimmt.

2.2 Verträgliche und nichtverträgliche Observable

Typische Unterschiede zur klassischen Physik treten bei der kombinierten Messung zweier Observablen A und B auf. In der klassischen Physik ist die Reihenfolge der beiden Teilmessungen belanglos, da keine der Messungen den Zustand des Systems verändert. In der Quantenmechanik gilt dies aufgrund der charakteristischen Nicht-Vertauschbarkeit von Operatoren allerdings nicht mehr.

Der Ausgangspunkt des Systems sei $|\psi\rangle$, auf den wir zunächst A, dann B anwenden. Die erste Messung liefere den Meßwert a_i, die zweite den Meßwert b_j.

$$|\psi\rangle \quad \xrightarrow{A} \quad |\psi_1\rangle = |a_i\rangle \langle a_i|\psi\rangle \quad \xrightarrow{B} \quad |\psi_2\rangle = |b_j\rangle \langle b_j|\psi_1\rangle \tag{12}$$

Wir bezeichnen Observablen als verträglich, wenn die Reihenfolge ihrer Messung beliebig ist. In unserem Beispiel wären A und B also verträglich, wenn eine nochmalige Messung von A mit Sicherheit den Messwert a_i lieferte. Das bedeutete aber wie oben festgestellt, daß $|\psi_2\rangle$ ein Eigenzustand von A und B wäre.

Daher sieht man, daß man genau die Größen eines Systems simultan messen kann, deren Operatoren A und B ein gemeinsames System von Eigenzuständen haben, bzw. deren Operatoren kommutieren.

Die Aussage, daß A und B keine gemeinsamen Eigenzustände besitzen, ist also gleichbedeutend mit der Aussage, daß die Streuungen ΔA_ψ und ΔB_ψ nicht gleichzeitig Null sein können. Die Streuung ΔA_ψ ist dabei definiert als

$$(\Delta A_\psi)^2 = \left\langle \psi \left| A^2 \right| \psi \right\rangle - \langle \psi |A| \psi\rangle^2$$

Eine kleine Rechnung[3] liefert

$$\Delta A_\psi \Delta B_\psi \geq \frac{1}{2} |\langle \psi |[A,B]| \psi\rangle| \tag{13}$$

wobei $[A, B] = AB - BA$ der Kommutator von A und B ist. Diese Ungleichung bezeichnet man als verallgemeinerte Heisenbergsche Unschärferelation.

Nach dem Korrespondenzprinzip (Regeln zur Übersetzung der klassichen Mechanik in die Quantenmechanik) erfüllen Ortsoperator und Impulsoperator die fundamentalen Vertauschungsrelationen

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0 \qquad \text{und} \qquad [x_i, p_j] = i\hbar \cdot \delta_{ij} \tag{14}$$

Daher folgt für die Ort-Impuls-Unschärfe in einer Dimension

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \tag{15}$$

2.3 Dichtematrix / Statistischer Operator

Unsere bisher diskutierten Quantensysteme lagen stets in reinen Zuständen vor. In der Realität können wir diese Situation jedoch nicht erwarten (vgl. Streuversuche mit unpolarisierten Elektronen.)

Wenn der Satz von Observabeln, der zu einem bestimmten Zeitpunkt gemessen wurde, nicht vollständig ist, wenn man also über das System nicht genügend Information besitzt, so sagt man, das System sei “schwach präpariert” bzw. befände sich in einem “gemischten Zustand”.

[3]etwa in: Nolting, Grundkurs Theoretische Physik, Band 5a: Quantenmechanik

In diesem Fall ist das System nicht durch einen Hilbert-Vektor beschreibbar, man kann jedoch folgende Aussage machen:

Das System befindet sich mit der Wahrscheinlichkeit p_i im reinen Zustand $|\psi_i\rangle$ $(1 \leq i \leq n)$ mit $0 \leq p_i \leq 1$, $\sum p_i = 1$.[4]

$|\psi_i\rangle$ ist also gleichzeitig Eigenzustand der bereits gemessenen und der noch zu messenden Observablen, also einer der denkbaren Zustände des Systems. Als Eigenzustände zu Observablen können wir die $|\psi_i\rangle$ als orthonormiert annehmen.

Wäre das System in einem reinen Zustand, so würde man für die Observable A den Erwartungswert $\langle\psi_i|A|\psi_i\rangle$ messen. Im Falle des gemischten Zustandes muß man noch eine statistische Mittlung über die möglichen Zustände durchführen:

$$\langle A\rangle = \sum_i p_i \langle\psi_i|A|\psi_i\rangle \tag{16}$$

Diese Mittelung ist fundamental anders als die quantenmechanische Mittlung zur Bestimmung der Erwartungwerte: Während diese Wahrscheinlichkeitsamplituden mittelt und so zu den bekannten Interferenzphänomen führt, greift die statistische Mittlung direkt Erwartungswerte an. Der gemischte Zustand ist also eine inkoheränte Mittlung aus reinen Zuständen.

Eine geschickte Beschreibung gelingt mit Hilfe der Dichtematrix (Statistischer Operator)

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \tag{17}$$

Eigenschaften der Dichtematrix:

1. Der Erwartungswert einer Observablen A berechnet sich als

   $$\langle A\rangle = \mathrm{Spur}(A\rho) \tag{18}$$

   Aufgrund der Invarianz der Spur gegen Basiswechsel kann man zur Berechnung des Erwartungswertes also eine besonders günstige Basis wählen.

2. ρ ist ein hermitescher Operator, wie man an der Definition sieht (denn die p_i sind reell und der Projetionsoperator $|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ hermitesch).

3. ρ ist positiv definit, denn für einen beliebigen Zustand $|\varphi\rangle$ gilt

   $$\langle\varphi|\rho|\varphi\rangle = \sum_i p_i |\langle\varphi|\psi_i\rangle|^2$$

4. $\mathrm{Spur}(\rho) = 1$ (folgt mit A=1 direkt aus (18))

[4] um herauszufinden, welche konkrete From p_i hat, besucht man den Kurs "Theoretische Physik 4: Statistische Physik"...

3 Beispiel für ein Zwei-Niveau-System: Spin-1/2-Teilchen

Das für den Quantencomputer essentielle Qubit ist nichts anderes als das mathematische Modell eines quantenmeachnischen Zwei-Niveau-Systems.

Obwohl sich Spin-1/2-Teilchen nicht als physikalische Realisation für einen Quantencomputer eignen, sind sie doch das klassische Beispiel für ein quantenmechanisches Zwei-Niveau-System.

Der Stern-Gerlach-Versuch hat gezeigt, daß die z-Komponente des Elektronenspins stets nach oben oder unten zeigt, es gibt also nur zwei Einstellmöglichkeiten. In diesem Fall lebt unser quantenmechanisches System im Hilbert-Raum $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. Den Spin-Up-Zustand bezeichnet man typischerweise als $|\uparrow\rangle$ und den Spin-Down-Zustand als $|\downarrow\rangle$. Die beiden Zustände sind orthogonal und bilden daher eine Basis von $\mathcal{H}$. Die Zustände sind die Eigenzustände der z-Komponente des Spinoperators, der in dieser Basis als Matrix die folgende Form hat:

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Analog zur z-Komponente kann man auch die x- und y-Komponente des Spins messen, diese sind unabhängig von der z-Komponente.

In der Eigenbasis des z-Spin-Operators haben x- und y-Spin-Operators die Form

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Ohne den Faktor $\hbar/2$ nennt man diese drei Matrizen Pauli-Spin-Matrizen, diese sind hermitesch und haben Eigenwerte ± 1.

4 EPR-“Paradoxon”

“Quantum mechanics is very impressive, but I am convinced that God does not play dice.”
(Albert Einstein)

“I hesitated to think it [QM] might be wrong, but I knew that it was rotten.”
(J. S. Bell)

Da die Voraussagen der Quantenmechanik der klassichen Physik und allen intuitiven Vorstellungen widerspechen, hatte die Quantenmechanik gerade in ihrer Anfangszeit viele Gegner. Viele berühmte Physiker erdachten sogenannte Gedankenexperimente, um die Absurdität der Quantenmachanik aufzuzeigen. Das wohl berühmteste Gedankenexperiment dieser Art ist die tot-lebendige Katze von Schrödinger.

Zu den Gegnern der Quantenmechanik gehörte auch Albert Einstein, der in einem jahrelangen Briefwechsel mit Niels Bohr (dem “Großvater der Quantenmechanik” und wesentlichen Urheber der Kopenhagener Wahrscheinlichkeitsinterpretation) über die Quantenmechanik diskutierte. Dabei dachte Einstein sich stets ein neues Gedankenexperiment aus, um etwa die Unschärferelation und andere Vorhersagen der Quantenmechanik zu entkräften. Jedesmal jedoch fand Bohr Lücken in den Gedankengängen, so daß die Quantenmechanik mit jeder überstandenen Attacke eines Physikers von Formate Einsteins nur noch glaubhafter dastand.

Hier soll nun das berühmte, von Einstein, Podolski und Rosen erdachte Gadankenexperiment geschildert werden, das unter anderem deshalb so große Beachtung erhielt, weil es quantitative Voraussagen macht, die zumindest prinzipiell nachprüfbar sind. Um die Sache etwas zu vereinfachen, stelle ich das Experiment in der heute übliche Neuformulierung von Bohm vor, da es die gleiche Kernaussage hat, aber einfacher darzustellen ist.

Zwei Spin-1/2-Teilchen werden von einer Quelle emittiert und bewegen sich voneinander weg. Dabei werden die Teilchen so erzeugt, daß sich ihr Gesamtspin gerade zu Null addiert. Realisieren läßt sich das etwa durch Streuung von niederenergetischen Protonen an Wasserstoffgas.

Nun wartet man ab, bis die Teilchen eine gewisse Entferung voneinander haben, und mißt dann eine Komponente des Spins von Teilchen 1, sei dies ohne Einschränkung die z-Komponente. Durch die Messung von S_{1z} ist jedoch automatisch auch S_{2z} festgelegt: $S_{2z} = -S_{1z}$. Man bezeichnet das Teilchenpaar als korreliert (oder "verschränkt"), da es nichtlokal wechselwirkt.

Einstein und andere sahen darin eine Verletzung der Relativitätstheorie, die gerade mit der Vorstellung einer "Fernwirkung" aufgeräumt hatte. Doch wer so argumentiert, der übersieht, daß eine Übertragung von Information zumindest auf diesem Wege gar nicht möglich ist, da man das Ergebnis der Messung nicht beeinflussen kann.

4.1 Quantenmechanische Beschreibung

Detailliert soll die Messung so aussehen: Zunächst wird die z-Komponente des Spins des ersten Teilchens gemessen. Danach wird die Spin-Komponente des zweiten Teilchens bezüglich einer um den Winkel φ zur z-Achse geneigten Achse gemessen. Dabei wird das Problem zweidimensional betrachtet, die x-y-Ebene wird auf die x-Achse projiziert. Das Ergebnis der ersten Messung sei ohne Einschränkung $\hbar/2$, daher ist S_{z2} notwendigerweise negativ. Damit ergibt sich für den Pauli-Spinor

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Der Operator, der die Spin-Komponente in Richtung der um φ geneigten Achse darstellt, ist gegeben durch

$$\hat{S}_\varphi = \hat{S}_z \cos\varphi + \hat{S}_x \sin\varphi = \frac{\hbar}{2}(\hat{\sigma}_z \cos\varphi + \hat{\sigma}_x \sin\varphi) = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix} \tag{20}$$

Die Eigenwerte von $\hat{S}_\varphi$ sind $\hbar/2$ und $-\hbar/2$, die zugehörigen Eigenvektoren sind $\binom{\cos(\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}$ und $\binom{-\sin(\varphi/2)}{\cos(\varphi/2)}$. $\hat{S}_\varphi$ ist symmetrisch, also orthogonal diagonalisierbar, daher erhält man eine Darstellung der Spinwellenfunktion bezüglich der Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sin(\varphi/2) \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) \\ \sin(\varphi/2) \end{pmatrix} + \cos(\varphi/2) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi/2) \\ \cos(\varphi/2) \end{pmatrix} \tag{21}$$

Die Wahrscheinlichkeit, bei der zweiten Messung wieder Spin-Up zu messen, ist

$$P_{\uparrow\uparrow}(\varphi) = \left|\sin(\varphi/2)\begin{pmatrix}\cos(\varphi/2)\\ \sin(\varphi/2)\end{pmatrix}\right|^2 = \sin^2(\varphi/2) \tag{22}$$

Die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der anderen möglichen Ergebnisse erfolgt ganz analog, und so ergibt sich (mit dem Normierungsfaktor 1/2)

$$\begin{aligned}
P_{\uparrow\uparrow}(\varphi) &= 1/2\sin^2(\varphi/2) && (23)\\
P_{\uparrow\downarrow}(\varphi) &= 1/2\cos^2(\varphi/2) && (24)\\
P_{\downarrow\uparrow}(\varphi) &= 1/2\cos^2(\varphi/2) && (25)\\
P_{\downarrow\downarrow}(\varphi) &= 1/2\sin^2(\varphi/2) && (26)
\end{aligned}$$

Um nun eine Aussage über viele Messungen machen zu können, berechnet man den Erwartungwert von $S_{1z}S_{2\varphi}$, also die Summe der möglichen Ereignisse, gewichtet mit der jeweiligen Wahscheinlichkeit.

$$\begin{aligned}
\langle S_{1z}S_{2\varphi}\rangle &= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{\hbar}{2}\cdot\frac{\hbar}{2}\cdot P_{\uparrow\uparrow} + \frac{\hbar}{2}\cdot\left(-\frac{\hbar}{2}\right)\cdot P_{\uparrow\downarrow}\right. && (27)\\
&\quad \left. + \left(-\frac{\hbar}{2}\right)\cdot\frac{\hbar}{2}\cdot P_{\downarrow\uparrow} + \left(-\frac{\hbar}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\hbar}{2}\right)\cdot P_{\downarrow\downarrow}\right] && (28)\\
&= \frac{\hbar^2}{4}\left(\sin^2(\varphi/2) - \cos^2(\varphi/2)\right) && (29)\\
&= -\frac{\hbar^2}{4}\cos(\varphi) && (30)
\end{aligned}$$

und damit also

$$P(\varphi, 0) \equiv P(S_{1z}S_{2\varphi}) = -\cos(\varphi) \tag{31}$$

Dabei war die z-Achse völlig willkürlich gewählt, man sieht leicht ein, daß gilt

$$P(\varphi, \vartheta) = -\cos(\varphi - \vartheta) \tag{32}$$

1976 wurden diese quantitativen Vorausssagen der Quantenmechanik durch Protonenpaare von Lamehi-Rachti und Mittag erstmals experimentell nachgewiesen.

Bei weitem die meisten Experimente dieser Art wurden übrigens nicht mit Spin-1/2-Teilchen, sondern mit Photonen durchgeführt, wobei als die zum Spin analoge Eigenschaft hier die Polarisation genutzt wurde.

Heute suchen Experimetalphysiker nach einer räumlichen Schranke für die Nichtlokalität der Quantenmechanik. Physiker am CERN haben die Verschränktheit eines Photonenpaares im Abstand von 10 km gemessen – die nächsten Messungen sollen Teilchen durch die Alpen schicken...

"Ich mag sie [QM] nicht, und es tut mir leid, daß ich jemals etwas mit ihr zu tun hatte."
(Erwin Schrödinger)