Einführung in algebraische Kurven

von Ingolf Meyer

6 Juli 2004

1 Einleitung

In diesem Vortrag soll es darum gehen, die Definitionen von affinen und projektiven, algebraischen Kurven zu geben und in geeigneter Weise zu erläutern. Dabei wird darauf Wert gelegt, dass der betrachtete Grundkörper nicht notwendig algebraisch abgeschlossen ist. Das Vorgehen orientiert sich an [4] Kapitel 6.1. Als weitere Quellen dienen [1],[3] und als Quelle zur kommutativen Algebra [2].

Der Vortrag gliedert sich dabei in 4 Teile. Nach dieser Einleitung folgt im zweiten Teil die Behandlung affiner, algebraischer Mengen. Der dritte Teil beschreibt die Konstruktion der Garbe der regulären Funktionen und endet mit der Definition von affinen, algebraischen Kurven. Der vierte und letzte Teil schließlich erklärt das ganze Vorgehen analog im projektiven Fall, wobei wir besonderen Wert auf die Einführung des projektiven Raums legen.

2 Affine, algebraische Mengen

Kurven werden im allgemeinen durch Gleichungen gegeben. Es liegt also nahe den Begriff der Kurve als Nullstellengebilde zu erklären. Über beliebigem Körper k wird man also vom Nullstellengebilde von Polynomen ausgehen. Dabei hat man aber einige Probleme, falls der Körper nicht algebraisch abgeschlossen ist. In diesem Falle gibt es maximale Ideale $\mathfrak{m}$ in $k[x_1, ..., x_n]$, so dass der Quotientenkörper $k[x_1, ..., x_n]/\mathfrak{m}$ eine echte Körpererweiterung von k ist, d.h. also die Polynome aus $k[x_1..., x_n]/\mathfrak{m}$ lassen sich nicht als k-wertige Funktionen auffassen.

Ein Beispiel: Sei $k = \mathbb{R}$ und $\mathfrak{m}$ das von $x^2 + 1$ erzeugte Ideal, $\mathbb{R}/(x^2 + 1) \simeq \mathbb{C}$. Das zugehörige Nullstellengebilde in $\mathbb{R}$ ist die leere Menge.

Ziel: Geeignete Menge finden, so dass alle Polynome Nullstellen haben, ohne zum algebraischen Abschluss überzugehen.

Definition 1. *Sei k ein beliebiger[1] Körper und n eine positive, natürliche Zahl. Wir defineren den affinen Raum $\mathbb{A}_k^n$ der Dimension n über k als*

$$\mathbb{A}_k^n := \max\operatorname{spec}\{k[X_1, ..., X_n]\}.$$

Ein Polynom $f \in k[X_1, ..., X_n]$ induziert dann eine Funktion, die wir ebenfalls mit f bezeichnen:

$$f: \mathbb{A}_k^n \to k^{\text{alg}}, \mathfrak{m} \mapsto f \bmod \mathfrak{m}.$$

Anmerkung 2. Ganz formal liegt die Restklasse f mod $\mathfrak{m}$ natürlich nicht im algebraischen Abschluss von k, aber nach dem Hilbertschen Nullstellensatz ist $k[X_1, ..., X_n]/\mathfrak{m}$ eine endliche, also algebraische Körpererweiterung von k und wir identifizieren die Restklassen entsprechend.

Für alle Polynome lässt sich nun die Nullstellenmenge angeben. Diese wollen wir affine, algebraische Mengen nennen. Vorher noch ein bekannter Fakt aus der kommutativen Algebra, der auch als Hilbertscher Basissatz bekannt ist:

Bemerkung 3. Jedes Ideal in $k[X_1, ..., X_n]$ ist endlich erzeugt.

Wir rechnen daher bei Idealen immer mit endlich vielen Erzeugern, wovon wir in Zukunft regen Gebrauch machen werden!

1. *In [4] findet man diese Definition nur für vollkommene Körper. Da die Vollkommenheit von k hier aber nicht benötigt wird, bleiben wir allgemeiner.*

Definition 4. *Sei J ein Ideal in $k[X_1, \ldots, X_n]$.*

$$V(J) := \{\mathfrak{m} \in \mathbb{A}_k^n : f(\mathfrak{m}) = 0 \forall f \in I\} = \{\mathfrak{m} \in \mathbb{A}_k^n : I \subset \mathfrak{m}\}$$

heißt die Nullstellenmenge von J. Man nennt die Nullstellenmengen zu einem Ideal auch ***affine, algebraische Mengen****.*

Umgekehrt hat man zu jeder Menge $M \subset \mathbb{A}_k^n$ das Verschwindungsideal

$$I(M) = \{f \in k[X_1, \ldots, X_n] : f(\mathfrak{m}) = 0 \forall \mathfrak{m} \in M\} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in M} \mathfrak{m}.$$

Diese Definitionen bedürfen natürlich einiger Erläuterung. Zu einem Ideal besteht die Nullstellenmenge also gerade aus den maximalen Idealen, die das Ideal J enthalten. Andersherum besteht das Verschwindungsideal gerade aus dem Durchschnitt aller beteiligten maximalen Ideale.

Das Verschwindungsideal ist per Konstruktion reduziert, d.h. falls $f^r \in I(M)$, dann auch $f \in I(M)$. Sonst wäre ja in einem $\mathfrak{m}$ das Polynom f^r aber nicht f enthalten, also wäre $\mathfrak{m}$ nicht maximal gewesen.

Falls der Körper k algebraisch abgeschlossen ist, stehen die maximalen Ideale in Bijektionen mit den Punkten im k^n und zwar in dem wir einen Punkt $a = (a_1, \ldots, a_n)$ auf $(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ abbilden. Hier stimmt nun der $\mathbb{A}_k^n$ mit dem k^n überein und die Begriffsbildung erscheint natürlicher. Für unsere Zwecke ist aber der Körper so gut wie nie algebraisch abgeschlossen!

Abschließend sei noch bemerkt, dass es natürlich reicht, nur die Nullstellenmenge der Erzeuger des Ideals J zu betrachten. Diese stimmt mit $V(J)$ überein.

Eine Formulierung des Hilbertschen Nullstellensatzes ist die folgende:

Satz 5. (Hilbertscher Nullstellensatz) *Für reduzierte Ideale $J \subset K[X_1, \ldots, X_n]$ gilt:*

$$I(V(J)) = J,$$

d.h. es gibt eine Bijektion zwischen affinen, algebraischen Mengen und reduzierten Idealen.

Beweis. s.[4] Anhang A.4 □

Beispiel 6. (Gegegenbeispiel) Das Ideal $J = (X^2)$ ist in $k[X]$ nicht reduziert. Es gilt: N(J)={(X)}, da (X) das einzige maximale Ideal ist, das J enthält. Demzufolge ist aber $V(\{(X)\}) = (X)$. Hier ist also $I(V(J)) = (X) \neq J$.

Definition 7. *Wir definieren die* ***Zariski-Topologie*** *auf dem $\mathbb{A}_k^n$, indem wir als abgeschlossene Mengen gerade die affinen, algebraischen Mengen definieren*[2]*. Eine affine, algebraische Menge $X \subset \mathbb{A}_k^n$ versehen wir häufig mit der induzierten Teilraumtopologie, die wir die* ***Zarisiki-Topologie auf X*** *nennen. Als* ***prinzipal offene Menge U_f zu f*** *bezeichnet man die offene Menge, die als Komplement der affinen, algebarischen Menge entsteht, welche durch eine nicht-konstante Funktion f gegeben ist. Die prinzipal offenen Mengen bilden eine Basis der Zariski-Topologie.*

Zum Begriff der affinen Varietät fehlt uns jetzt nur noch die Garbe der regulären Funktionen auf X. Diese wird im nächsten Abschnitt konstruiert.

3 Die Garbe der regulären Funktionen

Definition 8. *Unter einer Garbe von Ringen über einem topologischen Raum versteht man ein Paar $(\mathcal{G}, \rho_{U,V})$, wobei $\mathcal{G}$ jeder offenen Menge $U \subset X$ einen Ring $\mathcal{G}(U)$ zuordnet und ρ jedem Paar offener Mengen U, V mit $V \subset U$ einen Ring-Homomorphismus $\rho_{U,V}$. Dabei sollen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:*

i. $\rho_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathcal{G}(U)}$ für jede offene Menge U.

2. Man rechnet nach, dass dies tatsächlich die Axiome einer Topologie erfüllt.

ii. $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$ *für offene Mengen* $U \supset V \supset W$.

iii. *Für jede offene Überdeckung* U_i *einer offenen Menge* U *gilt:*

1. *Falls* $s \in \mathcal{G}(U)$ *mit* $\rho_{U,U_i}(s) = 0$ *für alle* i, *dann gilt:* $s = 0$.
2. *Falls stets* $s_i \in \mathcal{G}(U_i)$ *existiert, so dass immer* $\rho_{U_i,U_i \cap U_j}(s_i) = \rho_{U_j,U_i \cap U_j}(s_j)$ *gilt, dann existiert* $s \in \mathcal{G}(U)$, *so dass* $\rho_{U,U_i}(s) = s_i$.

Die Elemente des Rings $\mathcal{G}(U)$ *nennt man auch die Schnitte über* U.

Das Standardbeispiel für eine Garbe ist die Garbe der stetigen Funktionen über einem topologischen Raum X. Dazu ordnet man jeder offenen Menge U die stetigen Funktionen $C^0(U, \mathbb{R})$ zu. Die $\rho_{U,V}$ sind dann einfach die Einschränkungen $\rho_{U,V}(f) = f|_V$.

Man lese dabei die Bedingungen unter *iii* als Eindeutigkeits- (1.) und Vollständigkeitsforderung (2.). Wenn ein Schnitt lokal aussieht, wie der Nullschnitt, dann soll er auch der Nullschnitt sein und wenn Schnitte lokal zusammenpassen, dann müssen sie von einem globaleren Schnitt herkommen.

Es ist aber schwer, die Garbe der regulären Funktionen auf einer affinen, algebraischen Menge so direkt anzugeben wie oben.

Definition 9. *Sei* X *eine affine, algebraische Menge. Setze zur Abkürzung* $A := k[X_1, \ldots, X_n]/I(X)$.

Unter der Garbe der regulären Funktionen auf X *versteht man die folgende Garbe* $\mathcal{O}_X$:

- $\mathcal{O}_X(X) =$ *Menge der polynomialen Abbildungen, d.h.* $\{f : f \in A\}$.
- $\mathcal{O}_X(U_f) = A_f = \{\frac{x}{f^n} : x \in A, n \in \mathbb{N}\}$
- *Für jede andere Menge* U *wählt man eine offene Überdeckung durch die* U_f *und definiert* $\mathcal{O}_X(U)$ *dadurch, dass man die Vollständigkeitsbedingung aus der Garbendefinition als Definition verwendet, m.a.W. ein Element* $s \in \mathcal{O}_X(U)$ *ist durch eine Familie* $s_f \in U_f$ *gegeben, die auf den Durchschnitten verträglich sind. (Man muss hier natürlich noch beweisen, dass die Schnitte unabhängig von der Wahl der Überdeckung sind. Das folgt aber aus der Eindeutigkeitsbedingung der Garbendefinition.)*
- *Die Restriktionsabbildungen sind dann die üblichen Restriktionen.*

Wir wollen die obige Definition an einem Beispiel verdeutlichen.

Bemerkung 10. Man muss hier noch beweisen, dass die $\mathcal{O}(U_f)$ verträglich mit der Vollständigkeits- und Eindeutigkeitsbedingung der Garbendefinition sind. (s.[1] II Satz 2.2).

Beispiel 11. Sei X=$\mathbb{A}_k^2$, also die Nullstellenmenge von (0). Wir wollen für die Menge $U = X \setminus \{(X_1, X_2)\}$ den Ring $O_X(U)$ berechenen. Dazu betrachten wir die Poynome X_1 und X_2 mit den zugehörigen offenen Mengen U_{X_1} und U_{X_2}. Es gilt dann: $U = U_{X_1} \cup U_{X_2}$ und $U_{X_1 X_2} = U_{X_1} \cap U_{X_2}$. Die Frage ist also, was sind die verträglichen Elemente im Durchschnitt?

Definition 12. *Eine (reduzierte[3]) affine Varietät über* k *ist besteht aus einer affinen, algebraischen Menge* X *zusammen mit der Garbe der regulären Funktionen* $\mathcal{O}_X$.

Damit haben wir jetzt alle Ingredienzien zur Definition der affinen, algebraischen Kurven beisammen.

Definition 13. *Eine* ***affine, algebraische Kurve*** *ist eine affine Varietät der Dimension 1, die durch ein reduziertes Ideal* $\mathfrak{a}$ *gegeben wird. Dabei bedeutet Dimension 1, dass, wenn man* $\mathfrak{a}$ *als reduzierten Durchschnitt von Primidealen* $\mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_r$ *schreibt, alle Quotienenkörper* $Q(k[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{p}_i)$ *den Transzendenzgrad[4] 1 haben.*

3. Wir betrachten hier nur reduzierte Varitäten. Deswegen sprechen wir immer von Varietäten und meinen reduzierte Varietäten.

*Die Mengen $X_i := V(\mathfrak{p}_i)$ heißen die **irreduziblen Komponenten von X.***

*In Analogie zum Satz über implizite Funktionen heißt ein Punkt $\mathfrak{m} \in X$ **glatt**, falls eine offene Umgebung U von $\mathfrak{m}$ existiert, so dass $X \cap U = \{f_{r_1}(x) = \ldots = f_{r_{n-1}}(x) = 0\}$ und der Rang der formalen Jacobi-Matrix $J_f(x) = (\frac{\partial f_j}{\partial X_{\mathrm{ji}}}(x))$ gleich $n-1$ ist.*

Bemerkung 14. Die Definition der Dimension über den Transzendenzgrad erscheint auf den ersten Blick abenteuerlich. Aber die Intuition dahinter ist die folgende: Die affine Ebene ist intuitiv zweidimensional und $Q(k[X_1, X_2]) = k(X_1, X_2)$ hat Transzendenzgrad 2, analog für die affine Gerade und den affinen Raum.

4 Der projektive Fall

Im Prinzip besteht der Übergang zum Projektiven darin, dass man statt mit gewöhnlichen mit homogenen Polynomen bzw. Idealen rechnet. *Mutatis mutandis* überträgt sich dann das ganze Vorgehen von oben auf projektive, algebraische Kurven. Wir wollen jedoch zuerst etwas behutsamer in die projektive Welt vordringen, d.h. wir spezialisieren für den Moment unsere Körper k als algebraisch abgeschlossen, d.h. $k^{\mathrm{alg}} = k$.

Definition 15. *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$. Dann ist der projektive Raum der Dimension n über k definiert, als*

$$\mathbb{P}^n(k) := \frac{k^{n+1} \backslash \{0\}}{k^*},$$

also die Menge der Geraden durch Null im k^{n+1}. M.a.W. zwei Punkte $p_1, p_2 \in k^{n+1} \backslash \{0\}$ sind äquivalent, wenn es ein $\lambda \in k$ gibt, so dass $p_1 = \lambda p_2$.

Eine sehr natürliche Frage ist, was man auf dem $\mathbb{P}^n(k)$ für Funktionen hat, die vom k^{n+1} kommen und mit der Quotientenrelation verträglich sind. Polynome geben keine Funktionen auf dem $\mathbb{P}^n$, denn es soll ja gelten:

$$p(\lambda X_0, \ldots, \lambda X_n) = p(X_0, \ldots, X_N)\, \forall \lambda \in k.$$

Für die homogenen Polynome gilt immerhin schon die Relation

$$p(\lambda X_0, \ldots, \lambda X_n) = \lambda^d p(X_0, \ldots, X_n) \forall \lambda \in k,$$

wobei d den Grad des homogenen Polynoms bedeutet. Damit geben also die homogenen Polynome zwar noch keine Funktionen auf $\mathbb{P}^n(k)$, aber zumindest haben sie wohldefinierte Nullstellenmengen. Dies reicht aber für unsere Zwecke aus, also betrachten wir fortan homogene Polynome, besser gesagt homogene Ideale:

Definition 16. *Sei k ein beliebiger Körper. Ein Ideal $J \subset k[X_0, \ldots, X_n]$ heißt homogen, wenn $J = (f_1, \ldots, f_r)$ mit homogenen f_i.*

Bemerkung 17. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

- Homogene Polynome aus $k[X_0, \ldots, X_n]$ geben **keine** Funktionen auf $\mathbb{P}^n(k)$!
- Das homogene Ideal $(X_0, \ldots, X_n)$ hat eine leere Nullstellenmenge in $\mathbb{P}^n(k)$.
  Denn: Die einzige gemeinsame Nullstelle ist 0.
  Dieses Ideal heißt daher auch das irrelevante Ideal und wir bezeichnen es mit E.
- Ist $\mathfrak{m}$ ein homogenes Ideal, dann gilt: $\mathfrak{m} \subset (X_0, \ldots, X_n)$.

Wir erklären jetzt den $\mathbb{P}^n(k)$ für beliebige Körper k:

4. Der Transzendenzgrad eines Körper L über einem Körper K ist per Definition die Anzahl von Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$, so dass L isomorph zu einer algebraischen Erweiterung von $K[X_1, \ldots, X_n]$.

Definition 18. *Sei k ein beliebiger Körper und n eine positive, natürliche Zahl. Sei $E=(X_0,\ldots,X_n)$. Wir definieren den projektiven Raum $\mathbb{P}_k^n$ der Dimension n über k als*

$$\mathbb{P}_k^n := \{\mathfrak{m} | \mathfrak{m} \text{ maximal in der Menge der homogenen Ideale } \mathfrak{a} \subset k[X_0,\ldots,X_n], \mathfrak{a} \neq E\}.$$

Außerdem setzen wir noch

$$U_i = \{\mathfrak{m} | \mathfrak{m} \text{ maximal in der Menge der homogenen Ideale mit } X_i \notin \mathfrak{m}\}.$$

Wie im affinen Fall können wir auch hier von Nullstellenmengen und Verschwindungsidealen sprechen, wobei wir stets mit homogenen Idealen rechnen. Man beachte, dass man hier die Restklassen nicht als Elemente eines Körpers auffassen kann, sondern lediglich als Elemente im Restklassenring.

Definition 19. *Wir nennen eine Teilmenge $X \subset \mathbb{P}^n(k)$* ***projektiv algebraisch****, wenn sie Nullstellenmenge eines homogen Ideals ist.*

Die Menge der projektiven, algebraischen Mengen ist per Definition die Menge der abgeschlossenen Mengen in der ***Zariski-Topologie*** *auf dem $\mathbb{P}^n(k)$. Für eine projektive, algebraische Menge X ist die* ***Zariski-Topologie auf X*** *die induzierte Zariski-Topologie von $\mathbb{P}^n(k)$ auf X.*

Wir wollen den affinen Raum in gut handzuhabende Komponente zerlegen:

Lemma 20. *Es gilt:*

$$\mathbb{P}^n(k) = U_0 \cup \ldots \cup U_n.$$

Beweis. Sei $\mathfrak{m} \in \mathbb{P}^n(k)$. Jedenfalls wird $\mathfrak{m}$ von homogenen Polynomen $F_1,\ldots,F_r$ erzeugt. Es gibt nun ein i, so dass $X_i \neq F_j$ für alle j. Sonst wäre ja $\mathfrak{m}=E$. Dann gilt aber: $X_i \notin \mathfrak{m}$, also $\mathfrak{m} \in U_i$.

Die andere Inklusion folgt daraus, dass $(X_0, \ldots, X_n)$ alle anderen homogenen Ideale umfasst, aber jedes Element der Vereinigung in mindestens einem U_i liegen muss. □

Die entscheidende Tatsache ist, dass sich die U_i mit dem $\mathbb{A}_k^n$ identifizieren lassen. Dazu müssen wir allerdings noch zwei elementare Operationen definieren:

Definition 21. *Sei $f \in k[X_0,\ldots,X_n]$ ein homogenes Polynom. Unter der* ***Dehomogenisierung von f*** *nach X_i versteht man das Polynom*

$$\mathcal{D}_i f = f(X_0,\ldots,X_{i-1},1,X_{i+1},\ldots,X_n).$$

Sei nun $g \in k[X_0, \ldots, X_n]$ ein Polynom, so dass in keinem Monom X_i vorkommt, dann versteht man unter der ***Homogensierung mit X_i****, das homogene Polynom*

$$\mathcal{H}_i g = X_i^{\mathrm{grad}(g)} \cdot g\left(\frac{X_0}{X_i},\ldots,\frac{X_{i-1}}{X_i},\frac{X_{i+1}}{X_i},\ldots,\frac{X_n}{X_i}\right).$$

Satz 22. *Die Dehomogenisierung nach X_i liefert eine bijektive Abbildung von U_i nach $\mathbb{A}_k^n$.*

Beweis. Übung. □

Deswegen versteht man die Mengen U_i als affine Räume $\mathbb{A}_k^n$ mit dem Polynomring $k[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_{i-1}}{X_i}, \frac{X_{i+1}}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}]$. Auch im projektiven Fall wollen wir wieder von einer Garbe von regulären Funktionen reden:

Definition 23. *Die Garbe der regulären Funktion $\mathcal{O}_X$ über einer projektiven, algebraischen Menge X ist dadurch definiert, dass man für alle offenen U in X zuerst $\mathcal{O}_X(U \cap U_i) := \mathcal{O}_{X\cap U_i}(U \cap U_i)$ setzt und dann wieder mit der Vollständigkeits- und Eindeutigkeitsbedingung aus der Garbendefinition weiterdefiniert.*

Zum Schluss folgt nun noch die Definition von projektiven Varietäten und projektiv-algebraischen Kurven.

Definition 24. *Eine* ***projektive Varietät*** *ist eine projektive, algebraische Menge X mit der zugehörigen Garbe der regulären Funktionen $\mathcal{O}_X$.*

Eine ***projektiv-algebraische Kurve*** *ist eine projektive Varietät, so dass alle Schnitte mit den U_i affine-algebraische Kurven sind.*

Literaturverzeichnis

[1] Hartshorne, Robin: *Algebraic Geometry*. Buch 52 Reihe *GTM*. Springer, 1977.

[2] Kunz, Ernst: *Algebra*. Vieweg, 2 Auflage, 1994.

[3] Kunz, Ernst: *Einführung in die algebraische Geometrie*. Vieweg, 1997.

[4] Lütkebohmert, Werner: *Codierungstheorie*. Vieweg, 2003.