Das Vierquadrateproblem

Vortrag im Rahmen des Seminars der WE AℓZAGK im Sommersemester 2006 an der Universität Bremen

Arne Grenzebach

11. Mai 2006

Erinnerung

Die Modulgruppe ist $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ ad-bc=1 \right\}$, deren Elemente mit gebrochen linearen Transformationen $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)(\tau) = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$, $\tau \in \hat{\mathbb{C}}$, als Automorphismen auf der Riemannschen Sphäre $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ dargestellt werden können. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ wird generiert von den Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Ich möchte nun einige Definitionen wiederholen. Dabei bezeichnet $\mathcal{H}$ die obere Halbebene.

Definition 1: *Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine meromorphe Abbildung $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ heißt* ***schwache Modulform vom Gewicht k****, falls für $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $\tau \in \mathcal{H}$ stets gilt:*

$$f(\tau) = \tfrac{1}{(c\tau+d)^k} f(\gamma(\tau)) =: \big(f[\gamma]_k\big)(\tau).$$

Für $\gamma = -I$ erhält man $f = (-1)^k f$, weshalb die Nullfunktion die einzige schwache Modulform von ungeradem Gewicht ist.

Definition 2: *Sei $k \in \mathbb{N}$. $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ heißt* ***Modulform von Gewicht k****, falls gilt:*

❶ *f ist holomorph auf $\mathcal{H}$,*

❷ *f ist eine schwache Modulform vom Gewicht k,*

❸ *f ist holomorph in ∞.*

$\mathcal{M}_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ bezeichnet die Menge der Modulformen vom Gewicht k.

Definition 3: *Sei $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Unter der* ***Hauptkongruenzuntergruppe der Stufe N*** *verstehen wir:*

$$\Gamma(N) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \pmod N \right\},$$

wobei die Matrizenkongruenz für jeden Eintrag einzeln zu lesen ist. Eine Untergruppe $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ heißt ***Kongruenzuntergruppe der Stufe N****, falls $\Gamma(N) \subset \Gamma$ für ein $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist.*

Beispiel: Eine im folgenden wichtige Kongruenzuntergruppe ist

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \equiv \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \pmod N \right\}.$$

Speziell $\Gamma_0(4)$ wird generiert von $\pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (☞ Übungsaufgabe 1.2.4 in Diamond, Shurman, A First Course in Modular Forms (2005)).

Definition 4: *Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei Γ eine Kongruenzuntergruppe. $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ heißt* ***Modulform von Gewicht k bezüglich Γ****, falls gilt:*

❶ *f ist holomorph,*

❷ *f ist invariant vom Gewicht k unter Γ (d. h. $\forall\, \gamma \in \Gamma\colon f = f[\gamma]_k$),*

❸ *$f[\alpha]_k$ ist holomorph in ∞ für alle $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.*

$\mathcal{M}_k(\Gamma)$ bezeichnet die Menge der Modulformen von Gewicht k in Bezug auf Γ.

Anstatt die Bedingung ❸ zu verifizieren, kann man auch die Fourierkoeffizienten von f betrachten, denn es gilt (☞ Übungsaufgabe 1.2.6 in Diamond, Shurman, A First Course in Modular Forms (2005)):

> **Satz:** *Sei Γ eine Kongruenzuntergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ der Stufe N. Für $\tau \in \mathcal{H}$ sei $q_N = e^{2\pi i\tau/N}$. $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ genüge den Bedingungen ❶ und ❷ aus Definition 4. Dann erfüllt f auch die Bedingung ❸ (d. h. $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma)$), falls gilt:*
>
> ❸' *In der Fourierentwicklung $f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q_N^n$ gilt für die Koeffizienten zu $n > 0$: $\quad \exists\, C, r \in \mathbb{R}^+\colon |a_n| \le C n^r$.*

$

Das Vierquadrateproblem

> *Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ als Summe der Quadrate von vier ganzen Zahlen darzustellen?*

Zur mathematischen Behandlung dieses Problems definieren wir für $n, k \in \mathbb{N}$ allgemeiner die *Darstellungszahl*:

$$r(n,k) := \#\Big\{ v \in \mathbb{Z}^k \;\Big|\; n = \sum_{j=1}^{k} v_j^2 \Big\}.$$

$r(n,k)$ gibt also die Anzahl der Möglichkeiten an, eine natürliche Zahl n als Summe der Quadrate von k ganzen Zahlen v_j darzustellen. Dabei haben wir stets $r(0,k) = 1$ und $r(n,0) = 0$, falls $n > 0$.

Für $k = k_1 + k_2$ gilt für die Darstellungszahl (☞ Anhang, Lemma 1):

$$r(n,k) = \sum_{n_1+n_2=n} r(n_1,k_1)\, r(n_2,k_2).$$

Da diese Beziehung der Regel gleicht, nach der sich die Koeffizienten für das Produkt zweier Potenzreihen berechnen:

$$\Big(\sum_{n_1=0}^{\infty} a_{n_1} q^{n_1}\Big) \cdot \Big(\sum_{n_2=0}^{\infty} b_{n_2} q^{n_2}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n \quad \text{mit } c_n = \sum_{n_1+n_2=n} a_{n_1} b_{n_2},$$

betrachten wir die Potenzreihe, die durch die $r(n,k)$ generiert wird:

$$\Theta(\tau,k) := \sum_{n=0}^{\infty} r(n,k)\, e^{(2\pi i\tau)n}, \quad \tau \in \mathcal{H}.$$

Θ ist also eine holomorphe Funktion auf der oberen Halbebene $\mathcal{H}$.

Bemerkung: Für die Potenzreihe Θ gilt:

① Θ konvergiert absolut,

② $\forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{N}: \quad \Theta(\tau, k_1)\Theta(\tau, k_2) = \Theta(\tau, k_1 + k_2)$,

③ $\forall\, k \in \mathbb{N}: \quad \Theta\big(\pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)(\tau), k\big) = \Theta(\tau + 1, k) \overset{!}{=} \Theta(\tau, k)$.

Beweis: Für ① vergleiche Diamond, Shurman, A First Course in Modular Forms (2005), Kapitel 4. ② und ③ ergeben sich dann durch leichtes Nachrechnen. ∎

Speziell für $k = 1$ erhält man außerdem:

$$\Theta(\tau) := \Theta(\tau, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{r(n,1)}_{=\begin{cases} 0, & n \text{ keine Quadratzahl}, \\ 1, & n{=}0, \\ 2, & n \text{ Quadratzahl}, \end{cases}} e^{(2\pi i \tau)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 2\tau} = \vartheta(2\tau).$$

Dabei ist ϑ die Thetafunktion, die sich gemäß $\vartheta\big(-\frac{1}{\tau}\big) = \sqrt{-i\tau}\vartheta(\tau)$ transformiert (vgl. AℓZAGK-Vortrag „Die Thetafunktion" (WS 2005/06) von Björn Walker). Also ist $\Theta\big(-\frac{1}{4\tau}\big) = \sqrt{-2i\tau}\,\Theta(\tau)$, weshalb folgt:

$$\begin{aligned}
\Theta\big(\tfrac{\tau}{4\tau+1}\big) = \Theta\Big(-\tfrac{1}{4(-1-1/4\tau)}\Big) &= \sqrt{2i\big(1+\tfrac{1}{4\tau}\big)}\,\Theta\big(-1-\tfrac{1}{4\tau}\big) \\
= \sqrt{2i\big(1+\tfrac{1}{4\tau}\big)}\,\Theta\big(-\tfrac{1}{4\tau}\big) &= \sqrt{2i\big(1+\tfrac{1}{4\tau}\big)}\,\sqrt{-2i\tau}\,\Theta(\tau) \\
= \sqrt{4\tau+1}\,\Theta(\tau). &
\end{aligned}$$

Da nach ② aus obiger Bemerkung $\Theta(\tau, k) = \Theta(\tau)^k$ ist, ergibt sich für $\Theta(\cdot, 4)$ folgendes Transformationsverhalten:

$$\Theta\big(\pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)(\tau), 4\big) = \Theta\big(\tfrac{\tau}{4\tau+1}, 4\big) = (4\tau+1)^2\Theta(\tau, 4).$$

Zusammen mit ③ zeigt dies, daß die Generatoren $\pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ von $\Gamma_0(4)$ und daher alle $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(4)$ die Formel

$$\Theta\big(\gamma(\tau), 4\big) = (c\tau + d)^2\Theta(\tau, 4)$$

erfüllen, weshalb $\Theta(\cdot, 4)$ den Bedingungen ❶ und ❷ aus Definition 4 genügt.

Mit $q_4 = e^{2\pi i\tau/4}$ ergibt sich die Darstellung:

$$\Theta(\tau, 4) = \sum_{m=0}^{\infty} r(m, 4)\, e^{(2\pi i\tau)m} = 1 + \sum_{n=1,\, 4|n}^{\infty} r\big(\tfrac{n}{4}, 4\big)\, q_4^n =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n q_4^n.$$

Dabei gilt für die Fourierkoeffizienten a_n zu $n > 0$:

$$\begin{aligned}
4 \nmid n: &\quad |a_n| = 0, \\
4 \mid n: &\quad |a_n| = |r(\tfrac{n}{4}, 4)| = \#\Big\{v \in \mathbb{Z}^4 \;\Big|\; \tfrac{n}{4} = \sum_{j=1}^{4} v_j^2\Big\} \\
&\quad \le 16 \cdot \#\Big\{v \in \mathbb{N}^4 \;\Big|\; \tfrac{n}{4} = \sum_{j=1}^{4} v_j^2\Big\} \\
&\quad \le 16 \cdot \#\big\{v \in \mathbb{N}^4 \mid 0 \le v_j^2 \le n, j = 1, \dots, 4\big\} \\
&\quad \le 16 \cdot \big(\#\{v \in \mathbb{N} \mid 0 \le v \le n\}\big)^4 \\
&\quad \le 16 \cdot (2n)^4 = 256 \cdot n^4.
\end{aligned}$$

Offenbar erfüllen die a_n die Bedingung ❸, so daß $\Theta(\cdot, 4) \in \mathcal{M}_2(\Gamma_0(4))$ ist.

Die Eisensteinreihe G_2

Die Eisensteinreihe G_2 ist für $\tau \in \mathcal{H}$ definiert als

$$G_2(\tau) := \sum_{c\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{d\in\mathbb{Z},\\ d\neq 0 \text{ für } c=0}} \frac{1}{(c\tau+d)^2}.$$

Wie wir sehen werden, konvergiert diese Reihe. Sie konvergiert aber leider nicht absolut, denn von der Betrachtung der Weierstraßschen $\wp$-Funktion ist bekannt (☞ Freitag, Busam, Funktionentheorie 1 (2000), Kapitel V.2):

> **Satz:** *Sei $L \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Die Reihe*
>
> $$\sum_{\omega\in L}{}' \frac{1}{\omega^s}, \quad s > 2$$
>
> *konvergiert absolut.*

Diese *bedingte* Konvergenz von G_2 wird uns im nächsten Abschnitt bei der Untersuchung des Transformationsverhaltens von G_2 etwas Mühe bereiten. Bevor wir uns jedoch diesem Problem widmen, wollen wir zu der sogenannten Fourierentwicklung von G_2 gelangen. Dazu benötigen wir jedenfalls den folgenden Hilfssatz, aus dem auch die Konvergenz folgt.

> **Hilfssatz:** *Für $\tau = x + iy \in \mathcal{H}$ ($\operatorname{Im}\tau = y > 0$) gilt:*
>
> ① $\displaystyle\sum_{d\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau+d)^2} = (2\pi i)^2 \sum_{d=1}^{\infty} d\, e^{(2\pi i\tau)d}$,
>
> ② *Die Reihe* $\displaystyle\sum_{c=1}^{\infty}\sum_{d=1}^{\infty} d\, e^{(2\pi i\tau)cd}$ *konvergiert absolut.*

Beweis: ① läßt sich über die Partialbruchentwicklung des Cotangens zeigen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau} + \sum_{d=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\tau+d} + \frac{1}{\tau-d}\Big) &= \pi\cot(\pi\tau) = \pi\frac{\cos(\pi\tau)}{\sin(\pi\tau)} = \pi i\,\frac{e^{i\pi\tau}+e^{-i\pi\tau}}{e^{i\pi\tau}-e^{-i\pi\tau}} \\ &= \pi i + \pi i\frac{2e^{-i\pi\tau}}{e^{i\pi\tau}-e^{-i\pi\tau}} = \pi i - 2\pi i\frac{1}{1-e^{2\pi i\tau}} \\ &= \pi i - 2\pi i\sum_{d=0}^{\infty} e^{(2\pi i\tau)d}, \quad \text{da } \left|e^{2\pi i\tau}\right| = e^{-2\pi y} < 1.\end{aligned}$$

Differenzieren liefert:

$$\sum_{d\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\tau+d)^2} = (2\pi i)^2 \sum_{d=1}^{\infty} d\, e^{(2\pi i\tau)d}.$$

Damit ist ① gezeigt. Die Reihe links konvergiert zudem gleichmäßig in jedem Kompaktum, das keine ganze Zahl enthält.

Für ② können wir das Majorantenkriterium bemühen:

$$\begin{aligned}\sum_{c=1}^{\infty}\sum_{d=1}^{\infty}\left|d\,e^{(2\pi i\tau)cd}\right| &= \sum_{c=1}^{\infty}\sum_{d=1}^{\infty} d\,e^{-2\pi ycd}\\ &= \sum_{c=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2\pi c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sum_{d=1}^{\infty}(\underbrace{e^{-2\pi cy}}_{<1})^d\right)\\ &= \sum_{c=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2\pi c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi cy}}-1\right)\right)\\ &= \sum_{c=1}^{\infty}\frac{e^{-2\pi yc}}{(1-e^{-2\pi yc})^2} = \sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{e^{2\pi yc}+e^{-2\pi yc}-2}.\end{aligned}$$

Wegen $e^{2\pi yc}+e^{-2\pi yc} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(2\pi yc)^k}{k!}+\frac{(-2\pi yc)^k}{k!}\right) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2\pi yc)^{2k}}{(2k)!} \geq 2\big(1+\frac{(2\pi yc)^2}{2}\big)$ folgt:

$$\sum_{c=1}^{\infty}\sum_{d=1}^{\infty}\left|d\,e^{(2\pi i\tau)cd}\right| \leq \sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi yc)^2} = \frac{1}{(2\pi y)^2}\sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{c^2}.$$

Dies bleibt stets endlich, da die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta(s) = \sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{c^s}$, $s>1$ für $s=2$ den Wert $\frac{\pi^2}{6}$ annimmt. Also ist auch ② bewiesen. ∎

Mit der eben erwähnten Zeta-Funktion $\zeta(2)$ läßt sich G_2 auch schreiben als

$$G_2(\tau) = 2\zeta(2) + 2\sum_{c=1}^{\infty}\sum_{d\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(c\tau+d)^2} \overset{①}{=} 2\zeta(2) - 8\pi^2\sum_{c=1}^{\infty}\sum_{d=1}^{\infty} d\,e^{(2\pi ic\tau)d}$$

und nach ② konvergiert diese Reihe absolut! Damit ist die Konvergenz von G_2 gezeigt. Hier dürfen wir jetzt die Summationsreihenfolge ändern; Zusammenfassen aller Terme mit gleichem $n := cd$ führt zu der gesuchten Fourierentwicklung:

$$G_2(\tau) = 2\zeta(2) - 8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{d|n} d\Big)e^{(2\pi i\tau)n}$$

$$\Rightarrow \boxed{G_2(\tau) = 2\zeta(2) - 8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)q^n} \quad \text{mit } \sigma(n) := \sum_{d|n} d \text{ und } q := e^{2\pi i\tau}.$$

Anhand dieser Darstellung sieht man leicht, daß stets $G_2(\tau+1) = G_2(\tau)$ ist.

Transformationsverhalten von G_2

Zunächst untersuchen wir wie angekündigt, wie sich G_2 unter $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ transformiert. Dies führt zu einer schwachen Modulform vom Gewicht 2. Bezüglich $\Gamma_0(N)$ finden wir schließlich sogar eine Modulform vom Gewicht 2.

Satz: *G_2 transformiert sich unter $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ für $\tau \in \mathcal{H}$ wie folgt:*

$$G_2\big(\gamma(\tau)\big) = (c\tau+d)^2\Big[G_2(\tau) - \frac{2\pi i c}{c\tau+d}\Big]. \qquad (*)$$

Beweis: Wir zeigen dies in 2 Schritten:

ⓐ Gilt $(*)$ für $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, so auch für $\gamma_1\gamma_2$ und γ_1^{-1}.

ⓑ $(*)$ gilt für die Generatoren $\pm\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\pm\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Ad ⓐ: Sei also $(*)$ für $\gamma_1 = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, $\gamma_2 = \left(\begin{smallmatrix} e & f \\ g & h \end{smallmatrix}\right)$ aus $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ erfüllt. Dann gilt:

$$\gamma_1\gamma_2 = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}, \qquad \gamma_1^{-1} = \underbrace{\tfrac{1}{ad-bc}}_{=1}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right).$$

Für $\tau \in \mathcal{H}$ sei außerdem: $\tau_1 := \gamma_1^{-1}(\tau) = \frac{d\tau-b}{-c\tau+a}$ und $\tau_2 := \gamma_2(\tau) = \frac{e\tau+f}{g\tau+h}$.

Aus $G_2(\tau) = G_2\big(\gamma_1\gamma_1^{-1}(\tau)\big) = G_2\big(\gamma_1(\tau_1)\big) \overset{(*)}{=} (c\tau_1+d)^2\Big[G_2(\tau_1) - \frac{2\pi i c}{c\tau_1+d}\Big]$ erhält man durch Umstellen:

$$\begin{aligned} G_2\big(\gamma_1^{-1}(\tau)\big) = G_2(\tau_1) &= \tfrac{1}{(c\tau_1+d)^2}G_2(\tau) + \tfrac{2\pi i c}{c\tau_1+d} \\ &= \Big(\tfrac{-c\tau+a}{c(d\tau-b)+d(-c\tau+a)}\Big)^2 G_2(\tau) + \tfrac{2\pi i c\,(-c\tau+a)}{c(d\tau-b)+d(-c\tau+a)} \\ &= (-c\tau+a)^2\Big[\tfrac{1}{(ad-bc)^2}G_2(\tau) - \tfrac{1}{ad-bc}\tfrac{2\pi i(-c)}{-c\tau+a}\Big] \\ &= (-c\tau+a)^2\Big[G_2(\tau) - \tfrac{2\pi i(-c)}{-c\tau+a}\Big], \end{aligned}$$

d. h. γ_1^{-1} erfüllt $(*)$. Für $\gamma_1\gamma_2$ betrachten wir:

$$\begin{aligned} G_2\big(\gamma_1\gamma_2(\tau)\big) &= G_2\big(\gamma_1(\tau_2)\big) \\ &\overset{(*)}{=} (c\tau_2+d)^2\Big[G_2(\tau_2) - \tfrac{2\pi i c}{c\tau_2+d}\Big] \\ &= \Big(c\tfrac{e\tau+f}{g\tau+h}+d\Big)^2\Big[G_2\big(\gamma_2(\tau)\big) - \tfrac{2\pi i c\,(g\tau+h)}{c(e\tau+f)+d(g\tau+h)}\Big] \\ &= \Big(c\tfrac{e\tau+f}{g\tau+h}+d\Big)^2\Big[(g\tau+h)^2\Big(G_2(\tau) - \tfrac{2\pi i g}{g\tau+h}\Big) - \tfrac{2\pi i c\,(g\tau+h)}{c(e\tau+f)+d(g\tau+h)}\Big] \\ &= \big(c(e\tau+f)+d(g\tau+h)\big)^2\Big[G_2(\tau) - \tfrac{2\pi i g}{g\tau+h} - \tfrac{2\pi i c}{g\tau+h}\tfrac{1}{(ce+dg)\tau+(cf+dh)}\Big] \\ &= \big((ce+dg)\tau+(cf+dh)\big)^2\Big[G_2(\tau) - \tfrac{2\pi i\,\big(g\big[(ce+dg)\tau+(cf+dh)\big]+c\big)}{\big[(ce+dg)\tau+(cf+dh)\big]\,(g\tau+h)}\Big]. \end{aligned}$$

Nun gilt $g(cf+dh)+c = c(gf+1)+dgh = c(gf+(eh-gf))+dgh = (ce+dg)h$, weshalb folgt:

$$G_2\big(\gamma_1\gamma_2(\tau)\big) = \big((ce+dg)\tau+(cf+dh)\big)^2\Big[G_2(\tau) - \tfrac{2\pi i\,(ce+dg)}{(ce+dg)\tau+(cf+dh)}\tfrac{g\tau+h}{g\tau+h}\Big].$$

Offenbar genügt auch $\gamma_1\gamma_2$ der Relation $(*)$.

Ad β: Sei $\tau \in \mathcal{H}$ beliebig.

Wie wir oben bemerkt haben, folgt aus der Fourierentwicklung von G_2 unmittelbar, daß $G_2(\tau+1) = G_2(\tau)$ ist. Wegen $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)(\tau) = \frac{1\cdot\tau+1}{0\cdot\tau+1} = \tau+1$ gilt daher:

$$G_2\left(\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)(\tau)\right) = (0\cdot\tau+1)^2\left[G_2(\tau) - \tfrac{2\pi i\cdot 0}{0\cdot\tau+1}\right],$$

also erfüllt $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ die Relation $(*)$. Dies für $\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ zu zeigen, ist mühsam. Da $\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)(\tau) = \frac{0\cdot\tau-1}{1\cdot\tau+0} = \frac{-1}{\tau}$ ist, gilt nach Definition von G_2:

$$\begin{aligned}
G_2\left(\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)(\tau)\right) &= \sum_{c\in\mathbb{Z}}\sum_{\substack{d\in\mathbb{Z},\\ d\neq 0 \text{ für } c=0}} \frac{1}{(c\frac{-1}{\tau}+d)^2} = \tau^2\sum_{c\in\mathbb{Z}}\sum_{\substack{d\in\mathbb{Z},\\ d\neq 0 \text{ für } c=0}} \frac{1}{(-c+d\tau)^2} && \left|\begin{array}{l}\text{ersetze } d\\ \text{durch } -d\end{array}\right.\\
&= \tau^2\sum_{c\in\mathbb{Z}}\sum_{\substack{d\in\mathbb{Z},\\ d\neq 0 \text{ für } c=0}} \frac{1}{(c+d\tau)^2} = \tau^2\sum_{d\in\mathbb{Z}}\sum_{\substack{c\in\mathbb{Z},\\ c\neq 0 \text{ für } d=0}} \frac{1}{(c\tau+d)^2} && \begin{array}{l}\text{(Symbol-}\\ \text{tausch)}\end{array}\\
&= \tau^2\left(2\zeta(2) + \sum_{d\in\mathbb{Z}}\sum_{\substack{c\in\mathbb{Z}\\ c\neq 0}} \frac{1}{(c\tau+d)^2}\right). && (**)
\end{aligned}$$

Dies unterscheidet sich von $G_2(\tau) = 2\zeta(2) + \sum\limits_{\substack{c\in\mathbb{Z}\\ c\neq 0}}\sum\limits_{d\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(c\tau+d)^2}$ in der Reihenfolge der Summation!

Da die Eisensteinreihe G_2 nur bedingt konvergiert, können wir die Summationsreihenfolge nicht vertauschen. Um dies schließlich tun zu dürfen, müssen wir die Reihe ein wenig abändern (Eisenstein-Trick). Dazu betrachten wir zunächst:

$$\begin{aligned}
H(\tau) &:= \sum_{\substack{c\in\mathbb{Z}\\ c\neq 0}}\sum_{d\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(c\tau+d)(c\tau+d+1)}\\
&= \sum_{c\neq 0}\Big[\sum_{d\in\mathbb{Z}} \frac{1}{c\tau+d} - \frac{1}{c\tau+d+1}\Big]\\
&= \sum_{c\neq 0}\Big[\sum_{d=-\infty}^{-1}\left(\tfrac{1}{c\tau+d} - \tfrac{1}{c\tau+d+1}\right) + \left(\tfrac{1}{c\tau} - \tfrac{1}{c\tau+1}\right) + \sum_{d=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{c\tau+d} - \tfrac{1}{c\tau+d+1}\right)\Big]\\
&= \sum_{c\neq 0}\Big[\sum_{d=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{c\tau-d} - \tfrac{1}{c\tau-d+1}\right) + \left(\tfrac{1}{c\tau} - \tfrac{1}{c\tau+1}\right) + \sum_{d=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{c\tau+d} - \tfrac{1}{c\tau+d+1}\right)\Big]\\
&= \sum_{c\neq 0}\lim_{N\to\infty}\Big[\sum_{d=1}^{N}\left(\tfrac{1}{c\tau-d} - \tfrac{1}{c\tau-d+1}\right) + \left(\tfrac{1}{c\tau} - \tfrac{1}{c\tau+1}\right) + \sum_{d=1}^{N}\left(\tfrac{1}{c\tau+d} - \tfrac{1}{c\tau+d+1}\right)\Big]\\
&= \sum_{c\neq 0}\lim_{N\to\infty}\Big[\sum_{d=1}^{N}\tfrac{1}{c\tau-d} - \sum_{d=0}^{N-1}\tfrac{1}{c\tau-d} + \left(\tfrac{1}{c\tau} - \tfrac{1}{c\tau+1}\right) + \sum_{d=1}^{N}\tfrac{1}{c\tau+d} - \sum_{d=2}^{N+1}\tfrac{1}{c\tau+d}\Big]\\
&= \sum_{c\neq 0}\lim_{N\to\infty}\Big[\tfrac{1}{c\tau-N} - \tfrac{1}{c\tau} + \left(\tfrac{1}{c\tau} - \tfrac{1}{c\tau+1}\right) + \tfrac{1}{c\tau+1} - \tfrac{1}{c\tau+N+1}\Big]\\
&= \sum_{c\neq 0}\lim_{N\to\infty}\Big[\tfrac{1}{c\tau-N} - \tfrac{1}{c\tau+N+1}\Big]\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Mit H können wir G_2 nun folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}
G_2(\tau) &= G_2(\tau) - H(\tau)\\
&= 2\zeta(2) + \sum_{c\neq 0}\sum_{d} \tfrac{1}{(c\tau+d)^2} - \sum_{c\neq 0}\sum_{d} \tfrac{1}{(c\tau+d)(c\tau+d+1)}\\
&= 2\zeta(2) + \sum_{c\neq 0}\sum_{d} \Big[\tfrac{1}{(c\tau+d)^2} - \tfrac{1}{(c\tau+d)(c\tau+d+1)}\Big]\\
&= 2\zeta(2) + \sum_{c\neq 0}\sum_{d} \tfrac{1}{(c\tau+d)^2(c\tau+d+1)}.
\end{aligned}$$

Für obiges τ finden wir stets ein $\epsilon \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq \epsilon \leq \left|\frac{c\tau+d+1}{c\tau+d}\right| = \left|1 + \frac{1}{c\tau+d}\right|$. Dies liefert folgende Abschätzung:

$$\left|\tfrac{1}{(c\tau+d)^2(c\tau+d+1)}\right| \leq \epsilon\left|\tfrac{1}{(c\tau+d)^2(c\tau+d+1)}\right| \leq \left|\tfrac{c\tau+d+1}{c\tau+d}\right|\left|\tfrac{1}{(c\tau+d)^3}\tfrac{c\tau+d}{c\tau+d+1}\right| = \tfrac{1}{|c\tau+d|^3}.$$

Da die Reihe $\sum_{c\neq 0}\sum_{d}\frac{1}{|c\tau+d|^3}$ konvergiert, ist die Reihe $\sum_{c\neq 0}\sum_{d}\frac{1}{(c\tau+d)^2(c\tau+d+1)}$ nach dem Majorantenkriterium absolut konvergent. Jetzt läßt sich endlich die Summationsreihenfolge vertauschen:

$$\begin{aligned}
G_2(\tau) &= 2\zeta(2) + \sum_{d}\sum_{c\neq 0} \tfrac{1}{(c\tau+d)^2(c\tau+d+1)}\\
&= 2\zeta(2) + \sum_{d}\sum_{c\neq 0} \Big[\tfrac{1}{(c\tau+d)^2} - \tfrac{1}{(c\tau+d)(c\tau+d+1)}\Big]\\
&\overset{(**)}{=} \tfrac{1}{\tau^2}G_2\big(\left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)(\tau)\big) - \sum_{d}\sum_{c\neq 0} \tfrac{1}{(c\tau+d)(c\tau+d+1)}.
\end{aligned}$$

Als letztes betrachten wir den Fehlerterm:

$$\begin{aligned}
\sum_{d}\sum_{c\neq 0} \tfrac{1}{(c\tau+d)(c\tau+d+1)} &= \lim_{N\to\infty}\sum_{d=-N}^{N-1}\sum_{c\neq 0}\Big[\tfrac{1}{c\tau+d} - \tfrac{1}{c\tau+d+1}\Big]\\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{c\neq 0}\Big[\sum_{d=1}^{N}\big(\tfrac{1}{c\tau-d} - \tfrac{1}{c\tau-d+1}\big) + \sum_{d=0}^{N-1}\big(\tfrac{1}{c\tau+d} - \tfrac{1}{c\tau+d+1}\big)\Big]\\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{c\neq 0}\Big[\sum_{d=1}^{N}\tfrac{1}{c\tau-d} - \sum_{d=0}^{N-1}\tfrac{1}{c\tau-d} + \sum_{d=0}^{N-1}\tfrac{1}{c\tau+d} - \sum_{d=1}^{N}\tfrac{1}{c\tau+d}\Big]\\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{c\neq 0}\Big[\tfrac{1}{c\tau-N} - \tfrac{1}{c\tau} + \tfrac{1}{c\tau} - \tfrac{1}{c\tau+N}\Big]\\
&= -\tfrac{2}{\tau}\lim_{N\to\infty}\underbrace{\sum_{c=1}^{\infty}\Big[\tfrac{1}{(N/\tau)-c} + \tfrac{1}{(N/\tau)+c}\Big]}_{=\pi\cot\left(\frac{\pi N}{\tau}\right)-\frac{\tau}{N}\quad\text{(Partialbruchentwicklung des Cotangens)}}\\
&= -\tfrac{2\pi}{\tau}\lim_{N\to\infty}\cot\big(\tfrac{\pi N}{\tau}\big) = -\tfrac{2\pi i}{\tau}\lim_{N\to\infty}\frac{e^{i\pi N/\tau} + e^{-i\pi N/\tau}}{e^{i\pi N/\tau} - e^{-i\pi N/\tau}}\\
&= -\tfrac{2\pi i}{\tau}\lim_{N\to\infty}\Big[\frac{1}{1 - e^{-2i\pi N/\tau}} + \frac{1}{e^{2i\pi N/\tau} - 1}\Big].
\end{aligned}$$

Mit $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\operatorname{Re}\tau + i\operatorname{Im}\tau} = \frac{1}{|\tau|^2}(\operatorname{Re}\tau - i\operatorname{Im}\tau) =: x - iy,\ y > 0$, folgt:

$$\sum_d \sum_{c\neq 0} \frac{1}{(c\tau+d)(c\tau+d+1)} = -\frac{2\pi i}{\tau} \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{1-\underbrace{e^{-2\pi N y}}_{\to 0} e^{-i2\pi N x}} + \frac{1}{\underbrace{e^{2\pi N y}}_{\to\infty} e^{i2\pi N x} - 1}\right]$$
$$= -\frac{2\pi i}{\tau}.$$

Insgesamt ergibt sich also:

$$G_2(\tau) = \frac{1}{\tau^2} G_2\Big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)(\tau)\Big) + \frac{2\pi i}{\tau},$$

weshalb $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ auch $(*)$ genügt. ■

Mit der in Definition 1 eingeführten Schreibweise können wir $(*)$ auch folgendermaßen schreiben ($\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$):

$$\big(G_2[\gamma]_2\big)(\tau) = G_2(\tau) - \frac{2\pi i c}{c\tau + d}.$$

G_2 ist also nicht vom Gewicht 2. Dagegen sind die analog zu G_2 definierten Reihen

$$G_k(\tau) := \sum_{c\in\mathbb{Z}} \sum_{\substack{d\in\mathbb{Z},\\ d\neq 0 \text{ für } c=0}} \frac{1}{(c\tau+d)^k}, \quad k > 2,$$

die ebenfalls als Eisensteinreihen bezeichnet werden, vom Gewicht k, d. h.:

$$\big(G_k[\gamma]_k\big)(\tau) = G_k(\tau)$$

(vgl. abschließendes Beispiel im AℓZAGK-Vortrag „Modulräume und Modulkurven" (SS 2006) von Gerrit Grenzebach).

Für die Eisensteinreihe G_2 hat man:

Lemma: *$G_2(\tau) - \dfrac{\pi}{\operatorname{Im}\tau}$ ist vom Gewicht 2.*

Beweis: Sei $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und $\tau = x + iy \in \mathcal{H}$. Dann gilt:

$$\operatorname{Im}\gamma(\tau) = \operatorname{Im}\left(\frac{a(x+iy)+b}{c(x+iy)+d}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{(ax+b+iay)(cx+d-icy)}{(cx+d)^2+(cy)^2}\right)$$
$$= \frac{-(ax+b)cy + ay(cx+d)}{(cx+d)^2+(cy)^2} = \frac{(ad-bc)y}{(cx+d)^2+(cy)^2}$$
$$= \frac{\operatorname{Im}\tau}{(c\tau+d)(c\overline{\tau}+d)}.$$

Dies liefert:

$$\frac{\pi}{(c\tau+d)^2\operatorname{Im}\gamma(\tau)} = \frac{\pi}{\operatorname{Im}\tau}\cdot\frac{(c\tau+d)(c\overline{\tau}+d)}{(c\tau+d)^2} = \frac{\pi}{\operatorname{Im}\tau}\cdot\frac{c\overline{\tau}+d}{c\tau+d}$$
$$= \frac{\pi}{\operatorname{Im}\tau} - \frac{2\pi i c}{c\tau+d}, \quad \text{da } \overline{\tau} = \tau - 2i\operatorname{Im}\tau.$$

Mit der zuvor bewiesenen Transformationsformel $(*)$ folgt das Behauptete:

$$G_2\big(\gamma(\tau)\big) - \frac{\pi}{\operatorname{Im}\gamma(\tau)} = (c\tau+d)^2\left[G_2(\tau) - \frac{2\pi i c}{c\tau+d} - \frac{\pi}{\operatorname{Im}\tau} + \frac{2\pi i c}{c\tau+d}\right].$$ ■

Satz: *Für $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei $G_{2,N}(\tau) := G_2(\tau) - NG_2(N\tau)$.*
Dann gilt: $G_{2,N} \in \mathcal{M}_2(\Gamma_0(N))$.

Beweis des Satzes: Wir müssen zeigen:

① $G_{2,N}$ ist holomorph,

② $G_{2,N}$ ist invariant vom Gewicht 2 unter $\Gamma_0(N)$,

③ In der Fourierentwicklung $G_{2,N}(\tau) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n q_N^n$ mit $q_N = e^{2\pi i\tau/N}$ gilt für die Koeffizienten zu $n > 0$: $\quad \exists\, C, r \in \mathbb{R}^+ \colon |a_n| \leq Cn^r$.

Ad ①: Wir betrachten die Funktion

$$G_N \colon S_1 \to \mathbb{C}, z \mapsto = -\pi^2\left(\tfrac{N-1}{3} + 8\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n,\, N\nmid d} d\, q^n\right),$$

die im Inneren der Einheitskreisscheibe S_1 holomorph ist.
Da $G_{2,N} = G_N \circ \exp(2\pi i \cdot)$ ist und da die Verknüpfung holomorpher Funktionen wieder holomorph ist, ist $G_{2,N}$ holomorph auf $\mathcal{H}$.

Ad ②: Sei $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$ beliebig. Dann ist $\gamma' := \left(\begin{smallmatrix} a & Nb \\ c/N & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und mit $\tau \in \mathcal{H}$ ergibt sich:

$$\gamma'(N\tau) = \frac{aN\tau + Nb}{\frac{c}{N}N\tau + d} = N\frac{a\tau + b}{c\tau + d} = N\gamma(\tau).$$

Hiermit und mit obigem Lemma erhält man:

$$\begin{aligned} G_{2,N}\big(\gamma(\tau)\big) &= G_2\big(\gamma(\tau)\big) - NG_2\big(N\gamma(\tau)\big) \\ &= G_2\big(\gamma(\tau)\big) - NG_2\big(\gamma'(N\tau)\big) \\ &= (c\tau + d)^2\big[G_2(\tau) - \tfrac{\pi}{\operatorname{Im}\tau}\big] + \tfrac{\pi}{\operatorname{Im}\gamma(\tau)} \\ &\qquad - N\Big((\tfrac{c}{N}N\tau + d)^2\big[G_2(N\tau) - \tfrac{\pi}{\operatorname{Im}N\tau}\big] + \tfrac{\pi}{\operatorname{Im}N\gamma(\tau)}\Big) \\ &= (c\tau + d)^2\big[G_2(\tau) - NG_2(N\tau)\big]. \end{aligned}$$

Ad ③: $G_{2,N}$ besitzt nach Lemma 2 (☞ Anhang) folgende Fourierentwicklung:

$$\begin{aligned} G_{2,N}(\tau) &= -\pi^2\left(\tfrac{N-1}{3} + 8\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{d|m,\, N\nmid d} d\, q_N^{Nm}\right) \quad \text{mit } q_N^N = q = e^{2\pi i\tau} \\ &= -\pi^2\left(\tfrac{N-1}{3} + 8\sum_{n, N|n} \sum_{d|\frac{n}{N},\, N\nmid d} d\, q_N^n\right) =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n q_N^n. \end{aligned}$$

Für die Koeffizienten a_n zu $n > 0$ gilt dabei:

$$\begin{aligned} N \nmid n\colon &\quad |a_n| = 0, \\ N \mid n\colon &\quad |a_n| = 8\pi^2\left|\sum_{d|\frac{n}{N},\, N\nmid d} d\right| \leq 8\pi^2\left|\sum_{d|\frac{n}{N}} d\right| \leq 8\pi^2\left(\frac{n}{N}\right)^2. \end{aligned}$$

Mit $C := \frac{8\pi^2}{N^2}$ und $r := 2$ haben wir geeignete Koeffizienten gefunden.

Also ist $G_{2,N} \in \mathcal{M}_2(\Gamma_0(N))$. ∎

Lösung des Vierquadrateproblems

Wir betrachten nun speziell die Modulformen $G_{2,2}$ und $G_{2,4}$. Die Fourierentwicklungen dieser Modulformen sind (☞ Anhang, Lemma 2):

$$G_{2,2}(\tau) = -\tfrac{\pi^2}{3}\left(1 + 24\sum_{n=1}^{\infty}\ \sum_{d|n,\,2\nmid d} d\, q^n\right), \quad G_{2,4}(\tau) = -\pi^2\left(1 + 8\sum_{n=1}^{\infty}\ \sum_{d|n,\,4\nmid d} d\, q^n\right).$$

Offensichtlich sind $G_{2,2}$ und $G_{2,4}$ linear unabhängig.

Wie wir eben gesehen haben, ist $G_{2,N} \in \mathcal{M}_2(\Gamma_0(2)) \subset \mathcal{M}_2(\Gamma_0(4))$; die Inklusion gilt wegen $\Gamma_0(4) \subset \Gamma_0(2)$ und $G_{2,4} \in \mathcal{M}_2(\Gamma_0(4))$. Da $\dim \mathcal{M}_2(\Gamma_0(4)) = 2$ ist (ohne Beweis!), bilden $G_{2,2}$ und $G_{2,4}$ eine Basis von $\mathcal{M}_2(\Gamma_0(4))$.

Nun kommen wir zum Vierquadrateproblem zurück: Oben haben wir die Potenzreihe $\Theta(\cdot,k)$ betrachtet, die durch die Darstellungszahl $r(n,k)$ generiert wurde. Speziell für $\Theta(\tau,4) = \sum_{n=0}^{\infty} r(n,4)q^n$ haben wir $\Theta(\cdot,4) \in \mathcal{M}_2(\Gamma_0(4))$ gefunden, weshalb $\Theta(\cdot,4)$ eine Linearkombination von $G_{2,2}$ und $G_{2,4}$ sein muß:

$$\Theta(\cdot,4) = aG_{2,2} + bG_{2,4}, \quad a,b \in \mathbb{C}.$$

Vergleicht man die Reihen

$$\begin{aligned} \Theta(\tau,4) &= 1 + 8q + \ldots, \\ -\tfrac{3}{\pi^2}G_{2,2}(\tau) &= 1 + 24q + \ldots, \\ -\tfrac{1}{\pi^2}G_{2,4}(\tau) &= 1 + 8q + \ldots, \end{aligned}$$

so ergibt sich $a = 0, b = -\frac{1}{\pi^2}$, also: $\Theta(\tau,4) = -\frac{1}{\pi^2}G_{2,4}$.

Für die Anzahl der Möglichkeiten, eine natürliche Zahl $n \geq 1$ als Summe der Quadrate von 4 ganzen Zahlen darzustellen, folgt damit:

$$\boxed{r(n,4) = 8\sum_{d|n,\,4\nmid d} d}$$

Etwa:

n	$r(n,4)$
1	8·1 = 8
2	8·(1+2) = 24
3	8·(1+3) = 32
4	8·(1+2) = 24
5	8·(1+5) = 48
6	8·(1+2+3+6) = 96
7	8·(1+7) = 64
8	8·(1+2) = 24
9	8·(1+3+9) = 102
10	8·(1+2+5) = 64
11	8·(1+11) = 96
12	8·(1+2+3+6) = 96
13	8·(1+13) = 112
14	8·(1+2+7+14) = 192
15	8·(1+3+5+15) = 208
16	8·(1+2) = 24
17	8·(1+17) = 144
18	8·(1+2+3+6+9+18) = 312
19	8·(1+19) = 160
20	8·(1+2+5+10) = 144

$

Anhang

Lemma 1: Seien $k, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ mit $k = k_1 + k_2$. Dann gilt für die Darstellungszahl

$$r(n,k) = \sum_{n_1+n_2=n} r(n_1,k_1)r(n_2,k_2,).$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
r(n,k) &= \#\Big\{ v \in \mathbb{Z}^k \;\Big|\; n = \textstyle\sum_{j=1}^{k} v_j^2 \Big\} \\
&= \#\Big\{ (v,w) \in \mathbb{Z}^{k_1} \times \mathbb{Z}^{k_2} \;\Big|\; n_1 = \textstyle\sum_{\alpha=1}^{k_1} v_\alpha^2, \quad n_2 = \textstyle\sum_{\beta=1}^{k_2} w_\beta^2, \quad n_1+n_2 = n \Big\} \\
&= \sum_{n_1+n_2=n} \#\Big\{ (v,w) \in \mathbb{Z}^{k_1} \times \mathbb{Z}^{k_2} \;\Big|\; n_1 = \textstyle\sum_{\alpha=1}^{k_1} v_\alpha^2, \quad n_2 = \textstyle\sum_{\beta=1}^{k_2} w_\beta^2 \Big\} \\
&= \sum_{n_1+n_2=n} \#\Big\{ v \in \mathbb{Z}^{k_1} \;\Big|\; n_1 = \textstyle\sum_{\alpha=1}^{k_1} v_\alpha^2 \Big\} \cdot \#\Big\{ w \in \mathbb{Z}^{k_2} \;\Big|\; n_2 = \textstyle\sum_{\beta=1}^{k_2} w_\beta^2 \Big\} \\
&= \sum_{n_1+n_2=n} r(n_1,k_1)r(n_2,k_2).
\end{aligned}$$

■

Lemma 2: Die Modulform $G_{2,N}$ mit $G_{2,N}(\tau) = G_2(\tau) - NG_2(N\tau)$ besitzt die Fourierentwicklungen:

$$G_{2,N}(\tau) = -\pi^2 \Big(\tfrac{N-1}{3} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n,\, N\nmid d} d\; q^n \Big).$$

Beweis: Die Fourierentwicklung von G_2 lautet (☞ vgl. Seite 5):

$$G_2(\tau) = 2\zeta(2) - 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} d\; q^n \quad \text{mit } \zeta(2) = \tfrac{\pi^2}{6} \text{ und } q = e^{2\pi i \tau}.$$

Damit ergibt sich für $G_{2,N}$ folgende Fourierentwicklung:

$$\begin{aligned}
G_{2,N}(\tau) &= G_2(\tau) - NG_2(N\tau) \\
&= 2(1-N)\frac{\pi^2}{6} - 8\pi^2 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} d\; q^n - N \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} d\; q^{Nn} \Big) \\
&= -\pi^2 \Big(\tfrac{N-1}{3} + 8 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} d\; q^n \quad - \sum_{\nu=1,\, N|\nu}^{\infty} \sum_{Nd|\nu} Nd\; q^\nu \Big) \Big) \\
&= -\pi^2 \Big(\tfrac{N-1}{3} + 8 \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} d\; q^n \quad - \sum_{\nu=1,\, N|\nu}^{\infty} \sum_{\delta|\nu,\, N|\delta} \delta\; q^\nu \Big) \Big) \\
&= -\pi^2 \Big(\tfrac{N-1}{3} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n,\, N\nmid d} d\; q^n \Big).
\end{aligned}$$

■

Literatur

Diamond, Fred und Jerry Shurman.
A First Course in Modular Forms.
Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2005.

Freitag, Eberhard und Rolf Busam.
Funktionentheorie 1. 3., neu bearb. und erw. Aufl.
Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2000.

Königsberger, Konrad.
Analysis I. 6., durchgesehene Aufl.
Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2004.

Königsberger, Konrad.
Analysis II. 5., korrigierte Aufl.
Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2004.