Zur Funktionalgleichung der Zetafunktion

von Ingolf Meyer

1 Einleitung

Bis jetzt haben wir die Zetafunktion folgendermaßen erklärt

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

und damit eine analytische Funktion für Re(s)>1 erhalten. Im folgenden soll die Zetafunktion zuerst auf eine möglichst große Teilmenge von $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden und im Anschluss daran eine Funktionalgleichung für die Zetafunktion abgeleitet werden. Diese wird zum Beweis des Primzahlsatzes erforderlich sein.

2 Das Fortsetzungsproblem

Wir beginnen mit einem Hilfssatz:

Lemma 1. *Für Re(s)>1 gilt*

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} t^{s-1} dt.$$

Beweis. Wenn der Re(s)>0 hat man die folgende Darstellung der Gammafunktion

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$$

und erhält daraus nach Substitution von t durch nt

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-\mathrm{nt}} t^{s-1} n^s dt.$$

Dividieren wir nun durch n^s und summieren über alle n von 1 bis ∞, dann ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \Gamma(s)\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\mathrm{nt}} t^{s-1} dt,$$

falls Re(s)>1. Es bleibt zu zeigen, dass Summation und Integration vertauschbar[1] sind, dann erhält man nämlich wegen der geometrischen Reihe

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} t^{s-1} dt. \qquad \square$$

Um die Zetafunktion jetzt fortzusetzen, betrachten wir das leicht variierte Integral

$$H_{\varepsilon,\delta}(s) = \int_{\gamma_{\varepsilon,\delta}} \frac{e^z}{e^z-1} z^{s-1} dz$$

über den folgenden Integrationsweg:

1. Dazu benutzt man den Satz über die monotone Konvergenz der Lebesgue-Theorie.

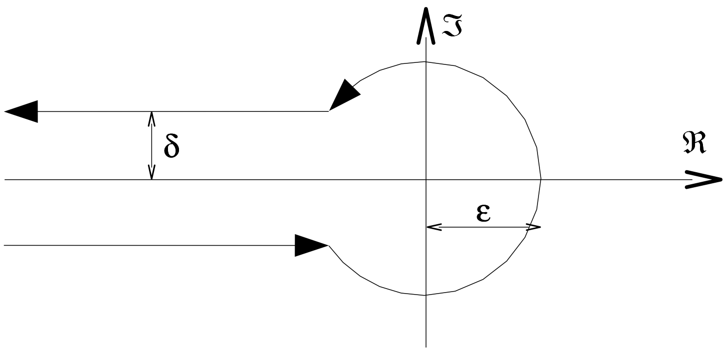

Abbildung 1.

Dabei soll $0 < \delta < \varepsilon < 1$ gelten. Man stellt fest, dass $H_{\varepsilon,\delta}(s)$ eine ganze Funktion ist, d.h. $H_{\varepsilon,\delta}(s)$ ist überall auf $\mathbb{C}$ analytisch. Damit definieren wir nun eine neue Funktion, in dem wir ε und δ gegen Null streben lassen, wobei jedoch stets die Ungleichung $0 < \delta < \varepsilon < 1$ erfüllt sein soll.

Definiere dann das Hankelintegral

$$H(s) = \lim_{\varepsilon,\delta \to 0} H_{\varepsilon,\delta}(s).$$

Man kann sich jetzt überlegen, dass H(s)[2] ebenfalls eine ganze Funktion ist und es gilt der folgende Satz:

Satz 2. *Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit Re(s)>1 gilt:*

$$H(s) = -2i\sin(\pi s)\Gamma(s)\zeta(s).$$

Beweis. Das Hankelintegral besteht aus drei Teilen, die wir gesondert betrachten wollen. Zuerst betrachten wir den Teil A_δ, d.h. das Integral auf der Halbgraden von $-\varepsilon$ bis $-\infty$ im dritten Quadranten

$$A_\delta = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{t-i\delta}}{e^{t-i\delta}-1}(t-i\delta)^{s-1}dt.$$

Substituiert man nun $t = -\tau$ ergibt sich

$$A_\delta = -\int_{\infty}^{\varepsilon} \frac{e^{-\tau-i\delta}}{e^{-\tau-i\delta}-1}(-\tau-i\delta)^{s-1}d\tau.$$

Für $\delta \to 0$ geht $(\tau + i\delta)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-\tau+i\delta)}$ gegen $\tau^{s-1}e^{-(s-1)i\pi}$, wegen

$$\lim_{\delta\to 0}\log(-\tau+i\delta) = \log|-\tau| - i\pi = \log(\tau) - i\pi.$$

Beim Grenzübergang $\delta \to 0$ erhalten wir dann insgesamt:

$$\begin{aligned} A_\delta \to A &= -\int_{\infty}^{\varepsilon} \frac{e^{-\tau}}{e^{-\tau}-1}\tau^{s-1}e^{-(s-1)i\pi}d\tau \\ &= e^{-(s-1)i\pi}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{e^{-\tau}-1}\tau^{s-1}d\tau \\ &= e^{-i\pi s}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{1-e^{-\tau}}\tau^{s-1}d\tau \end{aligned}$$

2. vgl. [1], Seite 409, Lemma 1.1

Lassen wir jetzt noch ε gegen Null gehen und ist der Realteil von s größer als 1, erhalten wir schließlich:

$$A \to A^* = e^{-i\pi s}\Gamma(s)\zeta(s).$$

Führt man die analoge Rechnung für die Halbgerade im vierten Quadranten durch, dann ergibt sich hier für B:

$$B \to B^* = -e^{i\pi s}\Gamma(s)\zeta(s).$$

Es bleibt der dritte Teil zu betrachten, d.h die Integration über den Kreisbogen mit Radius ε, die wir C_ε nennen wollen.

$$C_\varepsilon = \int_{K_\varepsilon} \frac{e^z}{e^z - 1} z^{s-1} \mathrm{dz}$$

Hier schätzen wir ab:

$$\left| \int_{K_\varepsilon} \frac{e^z}{e^z - 1} z^{s-1} \mathrm{dz} \right| \leqslant 2\pi\varepsilon \frac{1}{2\varepsilon} \kappa\, \varepsilon^{\mathrm{Re}(s-1)}$$

für genügend kleines ε und eine geeignete Konstante κ. Dabei benutzen wir die folgenden Abschätzungen:

- $|e^z - 1| \geqslant \frac{1}{2}|z|$ für $|z| \leqslant \frac{1}{2}$
- $|z^{s-1}| \leqslant \kappa |z|^{\mathrm{Re}(s-1)}$, wobei κ eine geeignete Konstante ist.

Damit ist klar, dass, wenn ε gegen Null strebt, auch C_ε gegen Null strebt.
Summiert man nun, dann gilt:

$$A^* + B^* + C^* = -2i \sin(\pi s)\Gamma(s)\zeta(s)$$

und es folgt die Behauptung. □

Satz 2.2 liefert damit eine analytische Fortsetzung der Zetafunktion als meromorphe Funktion auf ganz $\mathbb{C}$, indem man einfach die Gleichung als Definitionsgleichung der Zetafunktion versteht:

$$\zeta(s) := -\frac{1}{2i} \frac{1}{\sin(\pi s) \cdot \Gamma(s)} H(s).$$

Dabei können wir die folgenden Dinge über Polstellen sagen: Da H eine ganze Funktion ist, können Pole nur durch Nullstellen von $\sin(\pi s) \cdot \Gamma(s)$ auftreten. Die Gammafunktion hat aber keine Nullstellen, also sind nur die Nullstellen des Sinus entscheidend.

Da die Gammafunktion bei $0, -1, -2, -3, \ldots$ Pole erster Ordnung hat, heben sich diese dort mit die Nullstellen von $\sin(\pi s)$ weg, und es bleiben lediglich mögliche Pole bei den positiven, ganzen Zahlen übrig. Da die Zetafunktion aber für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ analytisch ist, bleibt nur ein möglicher Pol bei s=1. Dort liegt aber auch tatsächlich ein Pol vor, denn die Zetafunktion läuft hier ja gegen die harmonische Reihe.

3 Die Funktionalgleichung der Zetafunktion

Nachdem wir die Zetafunktion nun auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortgesetzt haben, können wir jetzt relativ einfach die Funktionalgleichung herleiten. Dabei benutzen wir ein weiteren Integrationsweg, der folgendermaßen aussieht:

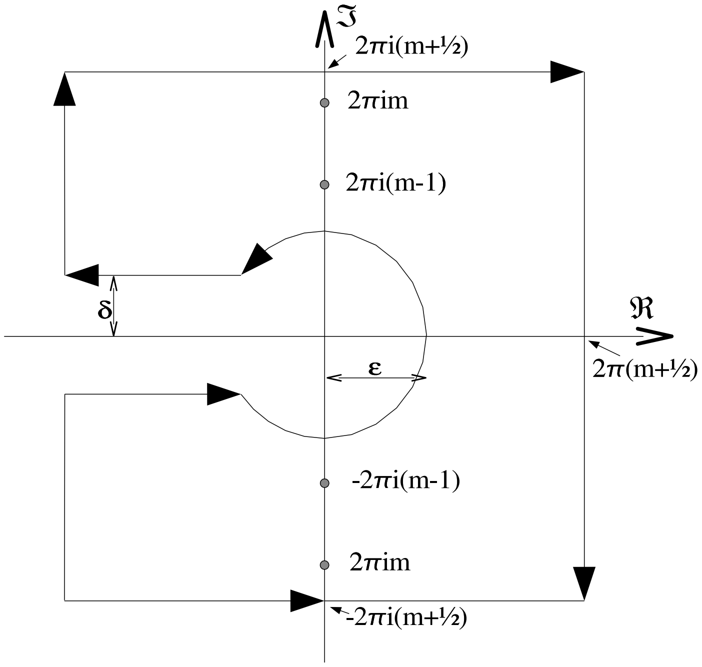

Abbildung 2.

Wir wollen diesen Integrationsweg $\tilde{\gamma}_m$ nennen, wobei wir die Abhängigkeit von ε und δ nicht zusätzlich aufschreiben, um kein überflüssiges Indexgewimmel zu bekommen.

Satz 3. *Für Re(s)<0 gilt:*

$$H(s) = (2\pi)^s \cdot 2i\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

Beweis. Wir integrieren über den Weg $\tilde{\gamma}_m$ und erhalten mit dem Residuensatz

$$\int_{\tilde{\gamma}_m} \frac{e^z}{e^z-1} z^{s-1}\mathrm{dz} = -2\pi i \sum \text{Residuen innerhalb von } \tilde{\gamma}_m$$

Dabei hat das Residuum bei $2\pi i\, n$ den Wert:

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{2\pi i n}\frac{e^z}{e^z-1}z^{s-1} &= (2\pi i\, n)^{s-1}\operatorname{res}_{2\pi i n}\frac{e^z}{e^z-1} = (2\pi i\, n)^{s-1} \\ &= e^{(s-1)\log(2\pi i n)} = e^{(s-1)\log|2\pi n|}\cdot\begin{cases} e^{i\frac{\pi}{2}(s-1)} & ,\text{falls } n>0 \\ e^{-i\frac{\pi}{2}(s-1)} & ,\text{falls } n<0 \end{cases} \\ &= |2\pi n|^{s-1}\begin{cases} -i\, e^{i\frac{\pi}{2}s} & ,n>0 \\ i\, e^{-i\frac{\pi}{2}s} & ,n<0 \end{cases} \end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir,falls wir m gegen unendlich gehen lassen, so für die Summe der Residuen:

$$-2\pi i \sum_{n\in\mathbb{N}^*} 2(2\,\pi n)^{s-1} i\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) = (2\pi)^s\cdot 2i\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

falls der Re(1-s)>1, falls Re(s)<0. Man muss nun nur noch zeigen, dass das Integral über das äußere "Quadrat" für $m\to\infty$ verschwindet, dann geht nämlich das Integral über $\tilde{\gamma}_m$ in das Hankelintegral über und die Behauptung ist bewiesen. Wir wollen diese Abschätzungen hier nicht durchführen, da man jede Seite für sich betrachten muss, aber es handelt sich im wesentlichen um die Standardabschätzung mit *Länge*Maximum*. □

Damit haben wir bis jetzt die folgende Funktionalgleichung für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) < 0$ bewiesen:

$$-\sin(\pi s)\Gamma(s)\zeta(s) = (2\pi)^s \cdot \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s)$$

Diese läßt sich durch Anwenden einiger Formeln über die Gammafunktion[3] in die folgende etwas symmetrischere Form bringen, die aufgrund des Identitätssatzes dann für alle $s \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\boxed{\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = -\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s)}$$

Literaturverzeichnis

[1] Serge Lang. *Complex Analysis*. Springer, New York, fourth edition, 1999.

[2] Bernhard Riemann. Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe. *Monatsberichte der Berliner Akademie*, 1859.

3. vgl. [1], Seite 438f, Theorem 4.5 und 4.6