Seminararbeit

Hironaka Zerlegung

Erkan Gür

Universität Bremen
Fachbereich Mathematik

Gutachter: Prof. Dr. Jens Gamst

Seminar der WE A ℓ ZAGK WiSe2004/05 Erkan Gür

Datum: 23.05.05

Kurze Einführung: Cohen Macaulay & Hironaka Zerlegung

Definition 1. Sei $R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus ...$ eine graduierte $\mathbb{C}$ - Algebra der Dimension n. Ein System $(\theta_1, ..., \theta_n)$ von homogenen Elementen positiven Grades aus R heißt homogenes Parametersystem, wenn R ein endlich erzeugter $\mathbb{C}[\theta_1, ..., \theta_n]$ - Modul ist.

Bemerkung: Insbesondere sind dann $\theta_1, ..., \theta_n$ algebraisch unabhängig.

Theorem 2. Sei R eine graduierte $\mathbb{C}$ -Algebra der Dimension n. Dann sind die folgenden beiden Bedingungen äquivalent:

a) Es gibt ein homogenes Parametersystem $\theta_1, ..., \theta_n$, so daß R ein endlich erzeugter *freier* $\mathbb{C}[\theta_1, ..., \theta_n]$ - Modul ist. D. h. es existieren homogene Elemente $\eta_1, ..., \eta_t \in R$, so daß gilt:

$$R = \bigoplus_{i=1}^{t} \eta_i \mathbb{C}[\theta_1, ..., \theta_n] \qquad (*)$$

b) Der Ring R ist für jedes homogene Parametersystem $\phi_1, ..., \phi_n$ von R ein endlich erzeugter freier $\mathbb{C}[\phi_1, ..., \phi_n]$ - Modul.

Die Elemente $\eta_1, ..., \eta_t$ geben eine Darstellung $(*)$ genau dann, wenn sie eine Basis des $\mathbb{C}$ - Vektorraums $R/\langle \theta_1, ..., \theta_n \rangle$ liefern.

Beweis: siehe B. Sturmfels, Seite 38f., Theorem 2.3.1.

Bernd Sturmfels, Algorithms in Invariant Theory - Springer Verlag 1993

Eine graduierte $\mathbb{C}$- Algebra R, welche die Bedingungen a) und b) aus Theorem 2 erfüllt, nennt man eine Cohen-Macaulay-Algebra (CM-Algebra). Die Zerlegung ($*$) heißt Hironaka-Zerlegung einer Cohen-Macaulay-Algebra. Die folgende Formel ist eine direkte Konsequenz der Berechnung der Hilbertreihe für graduierte Polynomringe:

Korollar 3. Sei R eine n- dimensionale graduierte Cohen-Macaulay-Algebra mit Hironaka-Zerlegung ($*$). Für die Hilbertreihe von R folgt dann:

$$
\begin{aligned}
H(R,z) &= H\left(\bigoplus_{i=1}^{t}\eta_i\mathbb{C}[\theta_1,...,\theta_n],z\right)\\
&= H\left(\eta_1\mathbb{C}[\theta_1,...,\theta_n]\oplus...\oplus\eta_t\mathbb{C}[\theta_1,...,\theta_n],z\right)\\
&= \sum_{d\geq 0}\dim_{\mathbb{C}}\left(\eta_1\mathbb{C}[\theta_1,...,\theta_n]_d\right)z^d+\sum_{d\geq 0}\dim_{\mathbb{C}}\left(\eta_2\mathbb{C}[\theta_1,...,\theta_n]_d\right)z^d\\
&\qquad +...+\sum_{d\geq 0}\dim_{\mathbb{C}}\left(\eta_t\mathbb{C}[\theta_1,...,\theta_n]_d\right)z^d\\
&= \sum_{d\geq \eta_1}\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}[\theta_1,...,\theta_n]_{d-\deg\eta_1}\right)z^d+\sum_{d\geq \eta_2}\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}[\theta_1,...,\theta_n]_{d-\deg\eta_2}\right)z^d\\
&\qquad +...+\sum_{d\geq \eta_t}\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}[\theta_1,...,\theta_n]_{d-\deg\eta_t}\right)z^d\\
&= \sum_{d\geq 0}\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}[\theta_1,...,\theta_n]_d\right)z^{d+\deg\eta_1}+\sum_{d\geq 0}\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}[\theta_1,...,\theta_n]_d\right)z^{d+\deg\eta_2}\\
&\qquad +...+\sum_{d\geq 0}\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}[\theta_1,...,\theta_n]_d\right)z^{d+\deg\eta_t}\\
&= \sum_{d\geq 0}\dim_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}[\theta_1,...,\theta_n]_d\,z^d\right)\left(z^{\deg\eta_1}+...+z^{\deg\eta_t}\right)\\
&= H\left(\mathbb{C}[\theta_1,...,\theta_n],z\right)\left(z^{\deg\eta_1}+...+z^{\deg\eta_t}\right)
\end{aligned}
$$

Wir haben gesehen: $H\left(\mathbb{C}[\theta_1,...,\theta_n],z\right)=\dfrac{1}{\prod_{j=1}^{n}\left(1-z^{\deg\theta_j}\right)}$, also folgt

$$H(R,z)=\frac{\sum_{i=1}^{t}z^{\deg\eta_i}}{\prod_{j=1}^{n}\left(1-z^{\deg\theta_j}\right)}$$

□

Theorem 4. (Hochster und Eagon). Der Invariantenring $\mathbb{C}[x]^\Gamma$ einer endlichen Matrixgruppe $\Gamma \subset GL(\mathbb{C}^n)$ ist eine Cohen-Macaulay-Algebra.

Beweis: Der Reynolds Operator $*$ hat folgende Eigenschaften:

i) $*$ ist $\mathbb{C}$- linear
ii) $*(\mathbb{C}[x]) = \mathbb{C}[x]^\Gamma$
iii) $*|_{\mathbb{C}[x]^\Gamma} = id_{\mathbb{C}[x]^\Gamma}$

d.h. der Reynolds Operator ist ein Projektionsoperator. Also gilt: $\mathbb{C}[x] = im(*) + \ker(*) = \mathbb{C}[x]^\Gamma \oplus U$ mit $U := \{f \in \mathbb{C}[x] \mid f^* = 0\} = \ker(*)$ und $\mathbb{C}[x]^\Gamma := \{f \in \mathbb{C}[x] \mid f = f^*\} = im(*)$. U ist die Menge aller Polynome, die mit dem Reynolds Operator auf die Null abgebildet werden.

Betrachte nun den Polynomring $\mathbb{C}[x]$ als ein $\mathbb{C}[x]^\Gamma$- Modul. $\mathbb{C}[x]$ ist modulendlich über $\mathbb{C}[x]^\Gamma$ (siehe Endlichkeitsbeweise). Da $\mathbb{C}[x]^\Gamma$ eine $\mathbb{C}$- Algebra ist, $\mathbb{C}$ ein Körper und $\mathbb{C}[x]^\Gamma$ endlich erzeugt ist (nach dem Hilbertschen Endlichkeitssatz), gibt es nach dem Noetherschen Normalisierungslemma algebraisch unabhängige Elemente $\theta_1,...,\theta_n \in \mathbb{C}[x]^\Gamma$ über $\mathbb{C}$, so dass $\mathbb{C}[x]^\Gamma$ modulendlich über $\mathbb{C}[\theta_1,...,\theta_n] \subset \mathbb{C}[x]^\Gamma$ ist. Somit folgt, daß auch $\mathbb{C}[x]$ modulendlich über $\mathbb{C}[\theta_1,...,\theta_n]$ ist. Also ist $\theta_1,...,\theta_n$ ein homogenes Parametersystem für $\mathbb{C}[x]$.

Da wir beweisen wollen, daß der Polynomring $\mathbb{C}[x]$ für das homogene Parametersystem $\theta_1,...,\theta_n$ eine Cohen-Macaulay-Algebra ist, bleibt die Freiheit noch zu zeigen.

$\mathbb{C}[x]$ ist in natürlicher Weise ein endlich erzeugter freier Modul über sich selbst. Betrachte die Koordinatenfunktionen $x_1,...,x_n$ als homogenes Parametersystem für den Polynomring $\mathbb{C}[x]$, dann ist $\mathbb{C}[x]$ eine Cohen-Macaulay-Algebra. Nach Theorem 2 "$(a) \Rightarrow (b)$" ist $\mathbb{C}[x]$ also auch ein endlich erzeugter freier $\mathbb{C}[\theta_1,...,\theta_n]$- Modul.

Aus der Modul Zerlegung $\mathbb{C}[x] = \mathbb{C}[x]^\Gamma \oplus U$ erhalten wir eine endlichdimensionale $\mathbb{C}$- Vektorraum Zerlegung:

$\mathbb{C}[x]/\langle\theta_1,...,\theta_n\rangle = \mathbb{C}[x]^\Gamma/\langle\theta_1,...,\theta_n\rangle \oplus U/(\theta_1 U + ... + \theta_n U)$ durch die Abbildung:

$$f + \sum h_i\theta_i \mapsto f^* + \sum h_i^*\theta_i + (f - f^*) + \sum (h_i - h_i^*)\theta_i$$

Jeder endlichdimensionale Vektorraum besitzt auch eine endliche Basis. Wir können daher eine homogene $\mathbb{C}$- Basis $\bar{\eta}_1,...,\bar{\eta}_t,\bar{\eta}_{t+1},...,\bar{\eta}_s$ für $\mathbb{C}[x]/\langle\theta_1,...,\theta_n\rangle$ wählen, so daß $\bar{\eta}_1,...,\bar{\eta}_t$ eine

$\mathbb{C}$- Basis für $\mathbb{C}[x]^\Gamma / \langle \theta_1,...,\theta_n \rangle$ ist und $\overline{\eta}_{t+1},...,\overline{\eta}_s$ eine $\mathbb{C}$- Basis für $U/(\theta_1 U + ... + \theta_n U)$.

Nehme $\overline{\eta}_1,...,\overline{\eta}_t$ als Bilder homogener Elemente $\eta_1,...,\eta_t$ in $\mathbb{C}[x]^\Gamma$ und $\overline{\eta}_{t+1},...,\overline{\eta}_s$ als Bilder homogener Elemente $\eta_{t+1},...,\eta_s$ in U. Nach der Kennzeichnung in Theorem 2 gilt $\mathbb{C}[x] = \bigoplus_{i=1}^{s} \eta_i \mathbb{C}[\theta_1,...,\theta_n]$. Dies impliziert die gewünschte Hironaka-Zerlegung $\mathbb{C}[x]^\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{t} \eta_i \mathbb{C}[\theta_1,...,\theta_n]$, somit ist der Invariantenring $\mathbb{C}[x]^\Gamma$ eine Cohen-Macaulay-Algebra.

□

Im Folgendem werden wir sehen, daß die Hironaka-Zerlegung $\mathbb{C}[x]^\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{t} \eta_i \mathbb{C}[\theta_1,...,\theta_n]$ eine gute Möglichkeit ist, um den Invariantenring einer endlichen Matrixgruppe Γ darzustellen. Insbesondere ist $\{\theta_1,...,\theta_n,\eta_1,...,\eta_t\}$ eine Menge fundamentaler Invarianten für Γ. Die Polynome θ_i aus dem homogenen Parametersystem werden Primärinvarianten genannt, während die η_j Sekundärinvarianten genannt werden. Wir bezeichnen die jeweiligen Grade mit $d_i := \deg(\theta_i)$ und $e_j := \deg(\eta_j)$.

Beachte, daß für eine gegebene Gruppe Γ viele unterschiedliche Hironaka Zerlegungen existieren. Auch die Grade der primären und sekundären Invarianten sind nicht eindeutig bestimmt. Denn mit $\{\theta_1,...,\theta_1\}$ ist auch $\{\theta_1^{\alpha_1},...,\theta_1^{\alpha_n}\}$ eine Menge von Primärinvarianten.

Beispiel: Sei $\Gamma = \{1\} \subset GL(\mathbb{C}^1)$, dann gilt:

$$\mathbb{C}[x]^\Gamma = \mathbb{C}[x] = \mathbb{C}[x^2] \oplus x\mathbb{C}[x^2] = \mathbb{C}[x^3] \oplus x\mathbb{C}[x^3] \oplus x^2\mathbb{C}[x^3] = ...$$

Aber es gibt doch eine gewisse Eindeutigkeitseigenschaft: Nehmen wir an, daß wir bereits die Grade $d_i, i = 1,...,n$ der Primärinvarianten kennen. Dann kann die Anzahl t der Sekundärinvarianten mit einer Formel explizit berechnet werden. Aus dem Beweis zu Theorem 4 geht hervor, daß die ganze Zahl t dem Rang des Invariantenrings $\mathbb{C}[x]^\Gamma$ als freier $\mathbb{C}[\theta_1,...,\theta_n]$- Modul entspricht. Auch die Grade $e_1,...,e_t$ der Sekundärinvarianten sind durch die Zahlen $d_1,...,d_n$ eindeutig bestimmt.

Proposition 5. Seien $d_1, d_2 ..., d_n$ die Grade der Primärinvarianten einer Matrixgruppe Γ. Dann gilt:

a) Die Anzahl der Sekundärinvarianten ist $t = \dfrac{d_1 d_2 ... d_n}{|\Gamma|}$,

b) Die Grade (mit Vielfachheiten) der Sekundärinvarianten sind die Exponenten der erzeugenden Funktion $\underbrace{\Phi_\Gamma(z)}_{\substack{\text{Molienreihe des} \\ \text{Invariantenrings}}} \cdot \prod_{j=1}^{n} \left(1 - z^{d_j}\right) = z^{e_1} + z^{e_2} + ... + z^{e_t}$.

Beweis: Da wir wissen, daß der Invariantenring eine Cohen-Macaulay-Algebra ist, können wir die Molienreihe des Invariantenrings $\mathbb{C}[x]^{\Gamma}$ mit der Formel für die Hilbertreihe einer Cohen-Macaulay-Algebra aus Korollar 3 gleichsetzen:

$$\frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\pi\in\Gamma}\frac{1}{\det(id-z\pi)}=\frac{\sum_{i=1}^{t}z^{e_i}}{\prod_{j=1}^{n}\left(1-z^{d_j}\right)}. \tag{5.1}$$

Multiplizieren wir beide Seiten von (5.1) mit $(1-z)^n$, so erhalten wir

$$\frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\pi\in\Gamma}\frac{(1-z)^n}{\det(id-z\pi)}=\frac{\sum_{i=1}^{t}z^{e_i}(1-z)^n}{\prod_{j=1}^{n}\left(1-z^{d_j}\right)}=\frac{\sum_{i=1}^{t}z^{e_i}\overbrace{(1-z)(1-z)\dots(1-z)}^{n-mal}}{\underbrace{\left(1-z^{d_1}\right)\left(1-z^{d_2}\right)\dots\left(1-z^{d_n}\right)}_{n-mal}}$$

Mit $\frac{(1-z)}{\left(1-z^{d_i}\right)}=\frac{1}{\left(1+z+z^2+\dots+z^{d_i-1}\right)}, i=1,\dots,n$ folgt dann:

$$=\frac{\sum_{i=1}^{t}z^{e_i}}{\left(1+z+z^2+\dots+z^{d_1-1}\right)\dots\left(1+z+z^2+\dots+z^{d_n-1}\right)}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{t}z^{e_i}}{\prod_{j=1}^{n}\left(1+z+z^2+\dots+z^{d_j-1}\right)}. \tag{5.2}$$

Konvergiere nun in (5.2) $z\mapsto 1$. Der Ausdruck $\frac{(1-z)^n}{\det(id-z\pi)}$ konvergiert gegen 0, bis auf den Summanden, wo π das Einselement ist. Für diesen Summanden erhalten wir 1, und daher konvergiert die linke Seite der Gleichung (5.2) gegen $\frac{1}{|\Gamma|}$. Auf der rechten Seite erhalten wir $\frac{t}{d_1d_2\dots d_n}$. Damit gilt $\frac{1}{|\Gamma|}=\frac{t}{d_1d_2\dots d_n}$, also $t=\frac{d_1d_2\dots d_n}{|\Gamma|}$, dies beweist Aussage a).

Aussage b) folgt direkt aus der Formel für die Hilbertreihe.

□

Beispiel: Betrachte die Matrixgruppe

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \subset GL\left(\mathbb{C}^3\right)$$

Da Γ von der Matrix $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ erzeugt wird, handelt es sich hierbei um eine 3-Dimensionale Darstellung einer zyklischen Gruppe der Ordnung 4.

Nach dem Satz von Molien hat der Invariantenring die Hilbertreihe

$$\Phi_\Gamma(z) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\begin{vmatrix} 1-z & 0 & 0 \\ 0 & 1-z & 0 \\ 0 & 0 & 1-z \end{vmatrix}} + \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -z & 0 \\ z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+z \end{vmatrix}} + \frac{1}{\begin{vmatrix} 1+z & 0 & 0 \\ 0 & 1+z & 0 \\ 0 & 0 & 1-z \end{vmatrix}} + \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & z & 0 \\ -z & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+z \end{vmatrix}} \right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1-z)^3} + \frac{1}{(1+z)(1+z^2)} + \frac{1}{(1+z)^2(1-z)} \right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{(1+z)^2(1+z^2) + 2(1+z)(1-z)^3 + (1+z^2)(1-z)^2}{(1+z)^2(1+z^2)(1-z)^3} \right)$$

$$= \frac{4z^3 + 4z^2 - 4z + 4}{4(1+z)^2(1+z^2)(1-z)^3}$$

$$= \frac{z^3 + z^2 - z + 1}{(1+z)^2(1+z^2)(1-z)^3}$$

$$= 1 + 2z^2 + 2z^3 + 5z^4 + 4z^5 + 8z^6 + 8z^7 + 13z^8 + 12z^9 + 18z^{10} + \ldots$$

Bestimmung der Invarianten vom Grad 2: Betrachte $*: \mathbb{C}_2[x_1, x_2, x_3] \to \mathbb{C}_2[x_1, x_2, x_3]^\Gamma$
mit Polynomen $p(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + fx_2x_3 + g$,
Basis ist $\left(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3\right)$,

setze $x_1^2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, x_2^2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, x_3^2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, x_1x_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, x_1x_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, x_2x_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Mit dem Reynolds Operator folgt: $*(p) = \frac{1}{4}\left(A_1p + A_2p + A_3p + A_4p\right)$ *für alle* p.

Die Matrizen A_1, A_2, A_3, A_4 entstehen durch die Aktion von $\pi \in \Gamma$ auf den homogenen Polynomen vom Grad 2, genauer: $A_i := \left(B_{i1}, B_{i2}, B_{i3}, B_{i4}, B_{i5}, B_{i6}\right) \quad i = 1,\ldots,4$, wobei B_{ij} die j-te Spalte der Matrix A_i ist, für $j = 1,\ldots,6$. Für die Spalten B_{ij} gelten:

$B_{i1} = \pi_i \circ x_1^2,\quad B_{i2} = \pi_i \circ x_2^2,\quad B_{i3} = \pi_i \circ x_3^2,\quad B_{i4} = \pi_i \circ x_1x_2,\quad B_{i5} = \pi_i \circ x_1x_3,\quad B_{i6} = \pi_i \circ x_2x_3$

$$A_1 = \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&-1&0\end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&0&-1\end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

$$*(p) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&2&0&0&0&0\\2&2&0&0&0&0\\0&0&4&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}p = \begin{pmatrix}1/2&1/2&0&0&0&0\\1/2&1/2&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}p$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \tfrac{1}{2}(p_1 + p_2) \\ b_2 &= \tfrac{1}{2}(p_1 + p_2) \\ b_3 &= x_3 \\ b_4 &= 0 \\ b_5 &= 0 \\ b_6 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=x_1^2 + x_2^2} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=x_3^2}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$x_1^2 + x_2^2$ und x_3^2 sind Basis der Invarianten vom Grad 2.

Bestimmung der Invarianten vom Grad 3 und 4: analog, bzw. verwende Computeralgebrasystem (CAS MuPAD,...).

Die folgenden drei Invarianten $\theta_1 := x_1^2 + x_2^2, \theta_2 := x_3^2, \theta_3 := x_1^4 + x_2^4$ sind algebraisch unabhängig, und der Nullvektor ist die einzige gemeinsame Nullstelle über $\mathbb{C}$. Denn mit $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$ folgt $\theta_1^2 - \theta_3 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - \left(x_1^4 + x_2^4\right) = 2x_1^2 x_2^2 = 0$, also $x_1 = 0$ (und dann $x_2 = 0$ wegen $\theta_3 = 0$) oder $x_2 = 0$ (und dann $x_1 = 0$ wegen $\theta_3 = 0$), d.h. in jedem Fall $x_1 = 0 = x_2$, und $x_3 = 0$ ohnehin.

Hieraus folgt mit dem Hilbertschen Nullstellensatz und dem Pseudo-Nakayama-Lemma, daß $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ modulendlich über $\mathbb{C}[\theta_1, \theta_2, \theta_3]$ ist, also auch $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]^\Gamma$ modulendlich über $\mathbb{C}[\theta_1, \theta_2, \theta_3]$. Somit können die $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ als Primärinvarianten gewählt werden.

Zum Beweis des Hilbertschen Nullstellensatzes und dem Pseudo-Nakayama-Lemma siehe
H. Derksen, G. Kemper: Computational Invariant Theory, Springer Verlag, New York 2002
Proposition 3.3.1, Seite 80.

Nach Proposition 5 fehlen uns vier Sekundärinvarianten $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, deren Grade e_1, e_2, e_3, e_4 bestimmt sind durch die Formel

$$z^{e_1} + z^{e_2} + z^{e_3} + z^{e_4} = \Phi_\Gamma(z) \cdot \left(1 - z^{d_1}\right)\left(1 - z^{d_2}\right)\left(1 - z^{d_3}\right)$$

$$= \frac{\left(z^3 + z^2 - z + 1\right)\left(1 - z^2\right)\left(1 - z^4\right)}{\left(1 + z\right)^2 \left(1 + z^2\right)\left(1 - z\right)^3}$$

$$= 1z^0 + 2z^3 + z^4$$

Die Grade können nun einfach abgelesen werden: $e_1 = 0, e_2 = e_3 = 3, e_4 = 4$. Nach Anwendung des Reynolds Operators

$$*: f \mapsto \frac{1}{4}\left[f\left(x_1, x_2, x_3\right) + f\left(-x_2, x_1, -x_3\right) + f\left(-x_1, -x_2, x_3\right) + f\left(x_2, -x_1, -x_3\right)\right]$$

auf alle Monome vom Grad 3 und 4 erhalten wir die gewünschten Sekundärinvarianten

$$\eta_1 := 1, \quad \eta_2 := x_1 x_2 x_3, \quad \eta_3 := x_1{}^2 x_3 - x_2{}^2 x_3, \quad \eta_4 := x_1{}^3 x_2 - x_1 x_2{}^3.$$

Mit Hilfe der Gröbner Basis Methode oder durch Selbstnachrechnen stellen wir fest, daß keine nicht- triviale polynomiale Beziehung der Form $\sum_{i=1}^{4} \eta_i p_i\left(\theta_1, \theta_2, \theta_3\right) = 0$ existiert. Somit hat der Invariantenring die Hironaka-Zerlegung

$$\mathbb{C}\left[x_1, x_2, x_3\right]^\Gamma = \mathbb{C}\left[\theta_1, \theta_2, \theta_3\right] \oplus \eta_2 \mathbb{C}\left[\theta_1, \theta_2, \theta_3\right] \oplus \eta_3 \mathbb{C}\left[\theta_1, \theta_2, \theta_3\right] \oplus \eta_4 \mathbb{C}\left[\theta_1, \theta_2, \theta_3\right]$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{4} \eta_i \mathbb{C}\left[\theta_1, \theta_2, \theta_3\right].$$

Literaturverzeichnis

Bernd Sturmfels, Algorithms in Invariant Theory - Springer Verlag, Wien 1993

Prof. Dr. H.-G. Gräbe, Theorie der Invarianten endlicher Gruppen, Notizen zur Vorlesung, Wintersemester 2003/04, http://www. informatik.uni-leipzig.de/~graebe

Harm Derksen, Gregor Kemper, Computational Invariant Theory, Springer Verlag, New York etc. 2002