Die Liouvilleschen Sätze

Georg **lippold** Lippold. Martin **malb** Albrecht

14. Dezember 2005

Inhaltsverzeichnis

Elliptische Funktionen

Meromorphe Funktionen

Begriff: Eine *meromorphe Funktion* auf D ist eine Abbildung

$$f : D \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

die um jeden Punkt von D eine Laurent-Entwicklung mit endlichem Hauptteil[1] hat:

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-a)k} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n (z-a)^n$$

Ist dabei $a_{-k} \neq 0$ dann hat f eine Polstelle der Ordnung k. a_{-1} gibt das Residuum von f in a an:

$$res_a f = a_{-1}$$

alternativ: Eine Abbildung der Form

$$f : D \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

mit folgenden Eigenschaften heißt *meromorphe Funktion*:

1. Die Menge der Unendlichkeitsstellen

   $$S = f^{-1}(\infty) = \{a \in D; f(a) = \infty\}$$

   ist diskret in D.

2. Die Einschränkung

   $$\begin{aligned} f_0 &: D - S \longrightarrow \mathbb{C}, \\ f_0(z) &= f(z) \text{ für } z \in D, z \notin S, \end{aligned}$$

   ist analytisch.

3. Die Unendlichkeitsstellen von f sind Pole von f_0.

Der Körper der meromorphen Funktionen

Ist D offen und zusammenhängend, ist auch die Nullstellenmenge einer meromorphen Funktion diskret (außer bei $f \equiv 0$). Die Operationen werden folgendermaßen bestimmt:

Die Summer zweier meromorpher Funktionen f und g ist folgendermaßen erklärt: Zunächst betrachtet man die analytische Funktion

$$f(z) + g(z) \text{ auf } \mathbb{C} - (S \cup T), S = f^{-1}(\infty), T = g^{-1}(\infty) \tag{1}$$

[1] der Teil mit negativem Exponenten

Diese hat in $S \cup T$ nur außerwesentliche[2] (möglicherweise hebbare) Singularitäten.

Wir setzen also:

$$\begin{aligned} (f+g)(a) &:= \lim_{z \to a}(f(z)+g(z)) \\ (&:= \infty, \text{ falls a ein Pol von } f(z)+g(z) \text{ ist}) \end{aligned}$$

und erhalten so eine meromorphe Funktion

$$f+g : D \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}.$$

Ähnlich definiert man $f \cdot g$ und den Quotienten f/g und erhält so den Körper der meromorphen Funktionen.

Definition: *Eine Teilmenge $L \subset \mathbb{C}$ heißt Gitter, wenn es zwei $\mathbb{R}$-lineare unabhängige*[3] *„Vektoren" ω_1 und ω_2 in $\mathbb{C}$ gibt, so dass*

$$L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 = \{m\omega_1 + n\omega_2; m, n \in \mathbb{Z}\}$$

gilt.

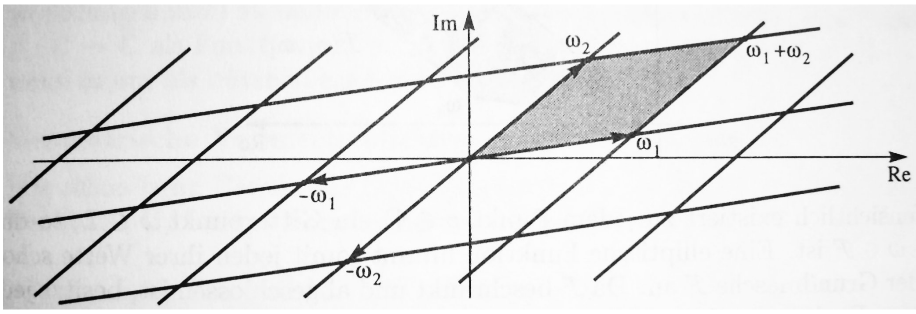

Abbildung 1: aus [Freitag, S.253]

Definition: Eine elliptische Funktion zum Gitter L ist eine meromorphe Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

mit der Eigenschaft

$$f(z+\omega) = f(z) \text{ für } \omega \in L \text{ und } z \in \mathbb{C}.$$

Dabei genügt es für die Erzeugenden ω_1 und ω_2 von L zu fordern

$$f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2) = f(z).$$

Deswegen nennt man elliptische Funktionen auch *doppelt periodisch.*

Die Menge $\mathcal{P}$ der Polstellen einer elliptischen Funkltion ist selbst „periodisch",

$$a \in \mathcal{P} \Longrightarrow a + \omega \in \mathcal{P} \text{ für } \omega \in L.$$

Gleiches gilt für die Nullstellenmenge.

[2] Außerwesentlich heisst: Die Funktion „flattert" nicht in der Nähe der Singularität wie z.B. $\exp^{\frac{1}{z}}$ $\Rightarrow$ Der Hauptteil hat endlich viele Summanden.

[3] Zwei komplexe Zahlen sind genau dann $\mathbb{R}$-linear unabhängig, wenn beide von 0 verschieden und ihr Quotient nicht reell ist.

Der Periodentorus

Sei f eine elliptische Funktion zum Gitter L. Wenn z und w zwei Punkte aus $\mathbb{C}$ sind, deren Differenz in L enthalten ist, so gilt $f(z) = f(w)$. Daher liegt es nahe die Faktorgruppe $\mathbb{C}/L$ einzuführen. Die Elemente dieser Faktorgruppe sind Äquivalenzklassen mit folgende Äquivalenzrelation

$$z \equiv w \ mod \ L \Longleftrightarrow z - w \in L$$

Damit ist die Äuqivalenzklasse von z als

$$[z] \equiv \{w \in \mathbb{C}, w - z \in L\} = z + L$$

bestimmt.

Die Definition

$$[z] + [w] := [z + w]$$

hängt öffenbar nicht vom Repräsentanten z oder w ab. Durch diese Addition wird auf $\mathbb{C}/L$ eine Struktur als *abelsche Gruppe* definiert.

Ist f nun eine elliptische Funktion zum Gitter L, dann existiert eine eindeutig besimmte Abbildung

$$\widehat{f} : \mathbb{C}/L \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

so dass gilt

$$\begin{array}{ccccc} \text{z} & \in & \mathbb{C} & \longrightarrow_f & \overline{\mathbb{C}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \| \\ z & \in & \mathbb{C}/L & \longrightarrow_{\widehat{f}} & \overline{\mathbb{C}} \end{array}$$

Dabei gilt wieder, dass

$$\widehat{f}([z]) := f(z)$$

nicht von der Wahl des Repräsentanten z abhängt.

Wir können jetzt also f als Funktion of $\mathbb{C}/L$ betrachten.

Veranschaulichung: Jeder Punkt aus $\mathbb{C}/L$ hat einen Repräsentanten in der Grundmasche $\mathcal{F}$. Zwei Punkte $w, z \in \mathcal{F}$ definieren genau dann denselben Punkt in $\mathbb{C}/L$, wenn sie übereinstimmen oder auf dem Rand gegenüberliegen. Ein geomerisches Modell erhält man also indem man die gegenüberliegenden Seiten miteinander verheftet:

1. Liouvillescher Satz

Elliptische Funktionen ohne Polstellen sind konstant

Beweis: Mit den Erzeugenden ω_1 und ω_2 von L bilden wir den Fundamentalbereich, die Grundmasche bzw. das Periodenparallelogramm

$$\mathcal{F} = \{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 | 0 \leq t_1, t_2, \leq 1\}.$$

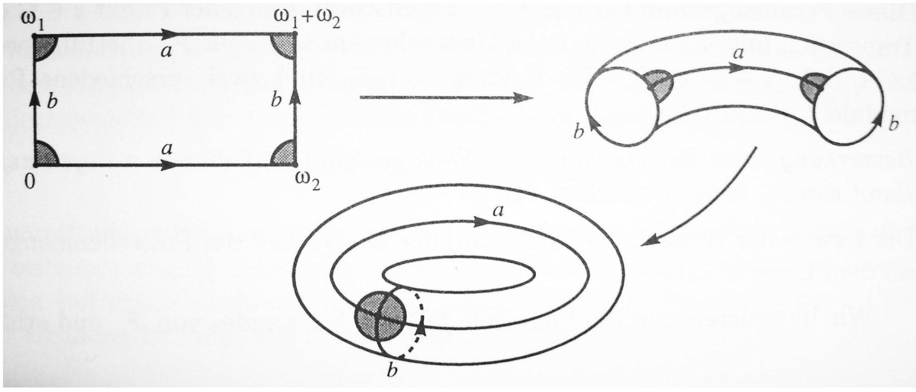

Abbildung 2: Der Periodentorus: Abbildung aus [Freitag, S.255]

Offensichtlich existiert zu jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ ein Gitterpunkt $\omega \in L$, so dass $z - \omega \in \mathcal{F}$ ist. Damit nimmt jede elliptische Funktion ihre Werte schon im Fundamentalbereich $\mathcal{F}$ an. Da $\mathcal{F}$ beschränkt und abgeschlossen ist, besitzt jede stetige Funktion auf $\mathcal{F}$ ein Maximum. Eine elliptische Funktion ohne Pole ist also auf $\mathcal{F}$ und damit auf $\mathbb{C}$ beschränkt und damit konstant, nach dem

Liouvillescher Satz über komplex beschränkte Funktionen

Eine komplexe Funktion, die auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt ist, ist konstant.

Beweis: Sei f eine komplex differenzierbare Funktion (einmal kompl. diffbar $\Rightarrow$ unendl. oft kompl. diffbar). Dann ist f als Taylor-Reihe darstellbar:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \cdot (z - z_0)^k$$

Um den Funktionswert an der Stelle z auszurechnen, kann man auch einfach das Umlaufintegral um z ausrechnen:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\delta K} f(\zeta) \cdot \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

Damit ist dann $f^{(k)}(z)$:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\delta K} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{(k+1)}} d\zeta$$

Die Standardabschätzung für das Kurvenintegral von f ist definiert als

$$|\oint_{\delta K} f| \leq L(\delta K) \cdot c \text{ wenn } |f(z)| \leq c \text{ für alle } z \in \delta K$$

Für $k = 1$ und einen Umlaufkreis der Länge $2\pi ri$ folgt damit:

$$|f'(z)| = |\frac{1}{2\pi i} \oint_{\delta K} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi r \frac{c}{r^2} \to 0 \, (r \to \infty)$$

Die Ableitung f' ist aber genau dann 0, wenn f konstant ist.

2. Liouvillescher Satz

Ist f elliptisch zum Gitter L, so hat $f \texttt{ mod } L$ nur endlich viele Polstellen und es gilt:

$$\sum_{z \texttt{ mod } L} \texttt{res}_z f = 0$$

Beweis: Man konstruiere zu L einen Fundamentalbereich (Grundmasche) F, analog zum Periodentorus (s.o). Da Polstellenmenge von L diskret ist, gibt es einen Wert $a \in \mathbb{C}$, so dass das Translat $F_a = a + F$ keine Polstellen auf seinem Rand hat.

Betrachte nun das Umlaufintegral $\oint_{\delta F_a} f$:

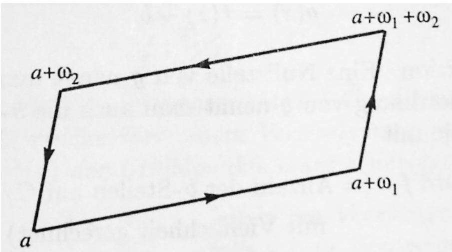

Abbildung 3: aus [Freitag, S.257]

Die Integralstücke $(a, a+\omega_1)$ und $(a+\omega_1+\omega_2, a+\omega_2)$ sind gleich lang und werden in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Weiterhin hat f auf beiden Stücken identische Werte, da f periodisch ist. Das gleiche gilt für $(a + \omega_1, a + \omega_1 + \omega_2)$ und $(a + \omega_2, a)$. Also gilt:

$$\oint_{\delta F_a} f = 0 = 2\pi i \sum_{z \in F_a} \texttt{res}_z f = 2\pi i \sum_{z \texttt{ mod } L} \texttt{res}_z f$$

3. Liouvillescher Satz

Ist f eine nicht konstante elliptische Funktion zum Gitter L, so nimmt f `mod` L jeden Wert mit Vielfachheit gerechnet gleich oft an.

Beweis: Mit f ist auch f' und damit auch $g = \frac{f'}{f}$ elliptisch.

Jetzt gilt es zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall Falls f einen Pol k-ter Ordnung in z_0 hat, gilt:

$$(z - z_0)^k f = f_1 \Rightarrow f = \frac{f_1}{(z - z_0)^k} \text{ mit } f_1(z_0) \neq 0$$

f_1 ist dann holomorph.

$$\Rightarrow f' = \frac{f_1'(z - z_0)^k - k(z - z_0)^{k-1} f_1}{(z - z_0)^{2k}}$$

Damit ist dann $\frac{f'}{f}$:

$$\begin{aligned} \frac{f'}{f} &= \frac{f_1'(z - z_0)^k - k(z - z_0)^{k-1} f_1}{(z - z_0)^{2k}} \cdot \frac{(z - z_0)^k}{f_1} \\ &= \frac{f_1'}{f_1} - \frac{k}{(z - z_0)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathtt{res}_{z_0} \frac{f'}{f} = -k < 0$$

da $\frac{f_1'}{f_1}$ in z_0 holomorph ist, da $f_1(z_0) \neq 0$.

2. Fall Falls f eine Nullstelle l-ter Ordnung in z_0 hat, gilt:

$$f = (z - z_0)^l \cdot f_1, \qquad f_1 \text{ holomorph}, f_1(z_0) \neq 0$$

Damit wird dann

$$f' = l(z - z_0)^{l-1} f_1 + (z - z_0)^l f_1'$$

Also ist

$$\begin{aligned} \frac{f'}{f} &= \frac{l(z - z_0)^{l-1} f_1 + (z - z_0)^l f_1'}{(z - z_0)^l f_1} \\ &= \frac{l}{z - z_0} + \frac{f_1'}{f_1} \end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\mathtt{res}_{z_0} \frac{f'}{f} = l > 0$$

Nach dem 2. Liouvilleschen Satz gilt

$$\sum_{z \texttt{ mod } L} \texttt{res}_z f = 0 \Rightarrow \sum \text{Polstellenordnung} = \sum \text{Nullstellenordnung}$$

Mit $h = f + b$ gilt dieses nicht nur für die Nullstellen, sondern auch für jeden anderen Wert von f.

Literatur

[Freitag] Freitag, Busam: *Funktionentheorie 1*. 3., neu bearb. und erw. Aufl. Springer Verlag, Berlin, 2000