Seminar der WE AℓZAGK
WS 2005-2006

Die Modulfunktion.

Shaybel Ksenia

26. Januar 2006

1. Einleitung.

Die bisherigen Untersuchungen haben sich auf die Betrachtung eines festen Gitters $L \subset \mathbb{C}$ beschränkt. Im Folgenden wird es das Ziel sein, stattdessen die Mannigfaltigkeit aller Äquivalenzklassen von Gittern zu betrachten.

2. Äquivalenz von Gittern.

Recall: Ein Gitter $L \subset \mathbb{C}$ ist eine additive Untergruppe, die von zwei über $\mathbb{R}$ linear unabhängigen komplexen Zahlen aufgespannt wird. Kurz: $L = \mathbb{Z}w_1 \oplus \mathbb{Z}w_2$.
Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion zu L liefert dann einen Isomorphismus von $\mathbb{C}/L$ mit der elliptischen Kurve, die gegeben ist durch

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

wobei $g_2 = 60 \sum' \frac{1}{w^4}$, $g_3 = 140 \sum' \frac{1}{w^6}$.
Nämlich per: $z \mapsto [1, \wp(z), \wp'(z)]$ für z nicht in L und $z \mapsto [0, 0, 1]$, wenn $z \in L$.

Definition. Zwei Gitter L und L' heißen äquivalent, wenn es ein $a \neq 0$ in $\mathbb{C}$ gibt mit $aL = L'$.
Hat man $aL = L'$, so induziert die Multiplikation mit a einen analytischen Isomorphismus:

$$\varphi : \mathbb{C}/L \cong \mathbb{C}/L'$$

der zugehörigen elliptischen Kurven.

3. Gitterbasen.

$L = \mathbb{Z}w_1 \oplus \mathbb{Z}w_2$ sei ein Gitter in $\mathbb{C}$. Da w_1 und w_2 über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sein sollen, hat man $\tau = \frac{w_1}{w_2}$ nicht in $\mathbb{R}$, indem man gegebenenfalls die Numerierung der Erzeugenden abändert, erhält man ohne Einschränkung $Im\tau > 0$, dass heißt τ gehört zur oberen Halbebene $\mathfrak{H}$.
Das zu L äquivalente Gitter

$$L_\tau = \mathbb{Z}_\tau \oplus \mathbb{Z} = \frac{1}{w_2} L$$

liefert dann bis auf Isomorphe dieselbe elliptische Kurve wie L. Daher repräsentiert man Gitter $L \subset \mathbb{C}$ meistens durch Punkte $\tau \in \mathfrak{H}$.
Ist w_1', w_2' eine weitere Gitterbasis von L, so hat man

$$w_1' = aw_1 + bw_2, w_2' = cw_1 + dw_2$$

mit einer invertierbaren ganzzahligen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Gl_2(\mathbb{Z}).$$

Für den durch (w_1, w_2) gegebenen Punkt $\tau \in \mathfrak{H}$ gilt dann

$$\tau' = \frac{aw_1+bw_2}{cw_1+dw_2} = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}.$$

Man rechnet:

$$Im(\tau') = \frac{detAIm\tau}{|c\tau+d|^2}.$$

Wegen $A \in Gl_2(\mathbb{Z})$ hat man $detA \in \{1, -1\}$. Damit $\tau' \in \mathfrak{H}$, muss aber $detA > 0$ gelten, und es folgt:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{Z}).$$

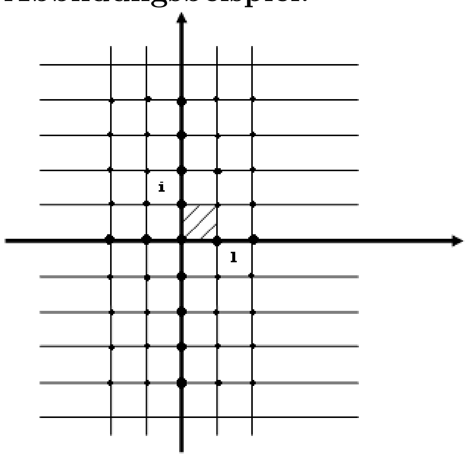
Etwas formeller gesagt:
$A \in Sl_2(\mathbb{Z})$ liefert eine Transformation $\mu_A : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ durch $\mu_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ und wegen $\mu_A \mu_B = \mu_{AB}, \mu_E = id$ hat man eine Operation von $Sl_2(\mathbb{Z})$ auf der oberen Halbebene $\mathfrak{H}$.

Beispiele:
$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gibt $\mu_T(z) = z + 1$,
$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gibt $\mu_S(z) = -\frac{1}{z}$.
Die Äquivalenzklassen von Gittern entsprechen den Orbits der Punkte $\tau \in \mathfrak{H}$ bei der Operation von $Sl_2(\mathbb{Z})$.

4. Die Eisensteinreihen.

Die Konstanten in der Differentialgleichung der $\wp$-Funktion zu einem Gitter L:
$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3,$$
sind gegeben durch
$$g_2 = 60 \sum{}' \frac{1}{w^4},\ g_3 = 140 \sum{}' \frac{1}{w^6}.$$
Allgemein betrachtet man die Eisensteinreihe G_k zu L:
$$G_k(L) = \sum{}' \frac{1}{w^k}.$$
Wir wissen, dass $G_k(L)$ für $k > 2$ konvergiert.
Uns interessiert die Abhängigkeit der Eisensteinreihen vom Gitter. Offenbar gilt:
$$G_k(aL) = a^{-k} G_k(L).$$
Folgerungen:
1. Man hat $(-1)L = L$, also $G_k(L) = G_k(-L) = (-1)^{-k} G_k(L)$.
Daher $G_k(L) = 0$ für k ungerade.

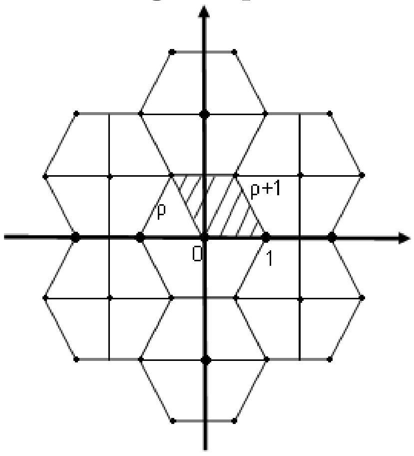
2. Für das Gitter $\mathbb{Z}_i = \mathbb{Z}i \oplus \mathbb{Z}$ gilt $i\mathbb{Z}_i = \mathbb{Z}_i$,
also $G_k(\mathbb{Z}_i) = i^{-k} G_k(\mathbb{Z}_i)$.
Daher $G_k(\mathbb{Z}_i) = 0$ für $k = 6, 10...$.
(NB. $G_2(L)$ ist nicht absolut konvergiert, daher ist $k = 4$ der erste relevante Index).
Abbildungsbeispiel:



Quadrat Gitter,
Basis (1,i)
Fundamentalmasche mit Ecken 0,1,i,1+i

3. Für das Gitter $\mathbb{Z}_\rho = \mathbb{Z}\rho \oplus \mathbb{Z}$ mit $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ gilt $\rho\mathbb{Z}_\rho = \mathbb{Z}_\rho$,
also $G_k(\mathbb{Z}_\rho) = \rho^{-k} G_k(\mathbb{Z}_\rho)$.
Daher $G_k(\mathbb{Z}_\rho) = 0$ für $k = 4, 10....$

Abbildungsbeispiel:



Sechseck Gitter,
Basis (1,ρ)
Fundamentalmashe mit Ecken 0,1,ρ,ρ+1

Bei Sechseckgitter mit Gitterbasis $(1, \rho = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3})$:
Ecken der Fundamentalmasche: $(0, 1, \rho, \rho + 1)$.
$\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist primitive 3^{te} Einheitswurzel.
$\rho, \rho^2, \rho^3 = 1$ sind die 3 komplexen Zahlen z mit $z^3 = 1$.
Beachte: $\rho^3 - 1 = (\rho - 1)(\rho^2 + \rho + 1) = 0 \Rightarrow \rho^2 + \rho + 1 = 0$.
$\rho + 1 = e^{\frac{2\pi i}{6}} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist primitive 6^{te} Einheitswurzel.
D.h. $(\rho + 1)^k$ mit $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ sind die 6 komplexen Zahlen z mit $z^6 = 1$.
Denn: $(\rho + 1)^2 = (\rho^2 + 2\rho + 1) = \rho$, also $(\rho + 1)^2 \neq 1, (\rho + 1)^6 = \rho^3 = 1$.
Zeige noch: $(\rho + 1)^3 \neq 1$.
Indirekt: $(\rho + 1)^3 = 1, (\rho + 1)^2 = \rho \Rightarrow \rho(\rho + 1) = 1 \Rightarrow \rho^2 + \rho = 1$. Wiederspruch zu $\rho^2 + \rho + 1 = 0$.

$\square$

Mit einer Gitterbasis (w_1, w_2) von L:
$$G_k(L) = \sum{}' \frac{1}{(mw_1 + nw_2)^k} = \frac{1}{w_2^k} \sum{}' \frac{1}{(m\tau + n)^k}, \text{ wobei } \tau = \frac{w_1}{w_2}.$$
Man setzt daher für $\tau \in \mathfrak{H}$:
$$G_k(\tau) = \sum{}' \frac{1}{(m\tau + n)^k} \text{ und hat } \frac{1}{w_2^k} G_k(\tau) = G_k(L).$$

Transformationslemma.
Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{Z})$ gilt:
$$G_k\left(\frac{a\tau + d}{c\tau + d}\right) \frac{1}{(c\tau + d)^k} = G_k(\tau).$$

Beweis:
A macht aus einer Gitterbasis (w_1, w_2) von L die neue Gitterbasis (w_1', w_2') mit
$w_1' = aw_1 + bw_2, w_2' = cw_1 + dw_2$.
Also $\tau' = \frac{w_1'}{w_2'} = \frac{aw_1 + bw_2}{cw_1 + dw_2} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$ und $\frac{1}{w_2^k} G_k(\tau) = G_k(L) = \frac{1}{(w_2')^k} G_k(\tau') = \frac{1}{w_2^k (c\tau + d)^k} G_k(\tau')$,

also in der Tat:

$$G_k(\tau) = \frac{1}{(c\tau+d)^k} G_k(\tau').$$

□

Anders geschrieben:

$$G_k(\tau') = (c\tau + d)^k G_k(\tau).$$

Insbesondere mit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bzw. $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$G_k(\tau + 1) = G_k(\tau),$$
$$G_k(\tfrac{-1}{\tau}) = (-\tau)^k G_k(\tau).$$

Konvergenzlemma.
Zu Schranken $c > 0, \delta > 0$ existiert eine Konstante $k > 0$, so dass

$$|x\tau + y|^2 \geq k(x^2 + y^2),$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gleichmässig für τ im vertikalen Rechteckstreifen

$$|Re\tau| \leq c, Im\tau \geq \delta.$$

Beweis:
Es reicht, für $x^2 + y^2 = 1$ eine Abschätzung $|x\tau + y|^2 \geq k > 0$ zu gewinnen. Aber:
$|x\tau + y|^2 = (x\tau + y)(x\overline{\tau} + y) = (xRe(\tau) + y + ixIm(\tau))(xRe(\tau) + y - ixIm(\tau)) = (xRe(\tau) + y)^2 + (xIm(\tau))^2 \geq (xRe(\tau) + y)^2 + (x\delta)^2$.
Und die Funktion $(x, y, Re(\tau)) \longmapsto (xRe(\tau) + y)^2 + (x\delta)^2$ hat auf der Menge $x^2 + y^2 = 1$, $|Re(\tau)| \leq c$ ein Minimum $k > 0$.

□

Also ist $G_k(\tau) = \sum' \frac{1}{(m\tau+n)^k}$, für $k > 2$, gleichmässig konvergent in den oben betrachteten vertikalen Rechteckstreifen und liefert daher eine analytische Funktion auf der oberen Halbebene.

5. Die Modulfunktion.

Zurück zu $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$, mit $g_2(\tau) = 60G_4(\tau)$, $g_3(\tau) = 140G_6(\tau)$.
Wir wissen: $\Delta(\tau) = g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau) \neq 0$.
Recall:

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$$

gibt $\Delta = 16(e_1 - e_2)^2(e_1 - e_3)^2(e_2 - e_3)^2$ und e_1, e_2, e_3 sind paarweise verschieden.
Begründung: $\wp'$ hat 3 verschiedene Nulstellen $modL$, nähmlich $\frac{w_1}{2}, \frac{w_2}{2}, \frac{w_1+w_2}{2}$. In ihnen nimmt $\wp$ die Werte e_1, e_2, e_3 jeweils mit Vielfachheit 2 an, gäbe es daher eine Koinzidenz $e_i = e_j$, so würde dieser Wert mit Vielfachheit 4 angenommen.
Man erhält daher eine analytische Funktion auf der oberen Halbebene durch

$$j(\tau) = \frac{g_2^3(\tau)}{\Delta(\tau)}.$$

Die Modulfunktion j ist invariant unter $Sl_2(\mathbb{Z})$:

$$j(\tfrac{a\tau+b}{c\tau+d}) = j(\tau) \text{ für } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbb{Z}).$$

Denn unter $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ transformiert sich g_2 mit dem Faktor $(c\tau+d)^4$, g_3 mit dem Faktor $(c\tau+d)^6$ und also $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ mit dem Faktor $(c\tau+d)^{12}$, so dass $j = \frac{g_2^3}{\Delta}$ insgesamt invariant ist.

Spezielle Werte.
1. $j(i) = 1$.
Denn wegen $i(\mathbb{Z}i \oplus \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ folgt $G_6(i) = i^{-6}G_6(i)$, also $G_6(i) = 0$, und damit $g_3(i) = 0$.
Mit $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ kann auch schreiben

$$j = \frac{\Delta + 27g_3^2}{\Delta} = 1 + \frac{27g_3^2}{\Delta},$$

und es folgt $j(i) = 1$.

2. $j(\rho) = j(-\frac{1}{\rho}) = 0$ für $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.
Wegen $\rho(\mathbb{Z}\rho \oplus \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\rho \oplus \mathbb{Z}$ folgt $G_4(\rho) = \rho^{-4}G_4(\rho)$, also $G_4(\rho) = 0$ und damit $g_2(\rho) = 0$.
Das gibt dann $j(\rho) = \frac{g_2^3(\rho)}{\Delta(\rho)} = 0$, also auch $j(-\frac{1}{\rho}) = 0$.

3. $lim|j(\tau)|_{Im(\tau)\to\infty} = \infty$.
Mit bekannten Werten der $\wp$-Funktion hat man:
$limG_4(\tau)_{Im(\tau)\to\infty} = 2\rho(4) = 2\frac{\pi^4}{60}, limG_6(\tau)_{Im(\tau)\to\infty} = 2\rho(6) = 2\frac{\pi^6}{945}$.
Damit rechnet man $lim\Delta(\tau)_{Im(\tau)\to 0} = 0$ und hat die Behauptung.

Literatur

1.M.Koecher/ A.Krieg. " Elliptische Funktionen und Modulformen ", Springer 1998.
2.E.Freitag/ R.Busam. "Funktionentheorie", Springer 1993.