Das Abelsche Theorem

Tim Nikolayzik

30. Mai 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation

Dieser Vortrag behandelt das Abelsche Theorem. Es sagt aus, unter welchen Bedingungen eine elliptische Funktion zu vorgegebenen Pol- und Nullstellen existiert. Bekannt ist ja, dass eine elliptische Funktion f gleichviele Pol- wie Nullstellen hat (mit Vielfachheiten gerechnet): das ist die Ordnung von f. Die Bedingung ist allerdings nicht hinreichend, denn zum Beispiel existiert keine elliptische Funktion der Ordnung 1. Sei L das von zwei $\mathbb{R}$-linear unabhänigen $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ aufgespannte Gitter. Gesucht ist nun eine elliptische Funktion f mit Nullstellen in $a_1, \ldots, a_n$ und mit Polstellen in $b_1, \ldots, b_n$. Dabei sei im Folgenden vorausgesetzt, dass kein a_j mit einem b_i modulo L äquivalent ist. Zugelassen ist aber, dass die Funktion mehrfache Nullstellen bzw. Polstellen haben kann, die entsprechenden Punkte a_j bzw. b_j modulo L treten dann entsprechend ihrer Vielfachheit auf. Es soll also gelten

$$\begin{aligned} f(z) = 0 \quad &\Longleftrightarrow z \equiv a_j \mod L \text{ für ein } j, \\ f(z) = \infty &\Longleftrightarrow z \equiv b_j \mod L \text{ für ein } j. \end{aligned}$$

Die Nullstellenordnung von f in a_j ist gleich der Anzahl aller k mit

$$a_k \equiv a_j \mod L.$$

Entsprechendes gelte für die Pole.

2 Hilfsmittel

Um das Abelsche Theorem beweisen zu können, benötigt man einige Hilfsmittel. Als erstes nimmt man den Weierstraßschen Produktsatz zu Hilfe, um eine ganze Funktion σ zu konstruieren, die Nullstellen erster Ordnung in den Gitterpunkten von L hat.

Definition 1. *Die Weierstraßschen Elementarfaktoren werden definiert durch:*

$$E_0(z) := (1 - z), \quad E_k(z) := (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^k}{k}\right), \ k \in \mathbb{N}.$$

Damit kann man nun den Weierstraßschen Produktsatz formulieren.

Satz 2. *(Weierstraßscher Produktsatz)*
Sei $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ eine Abzählung einer unendlichen diskreten Menge $S \subset \mathbb{C}$, $0 \notin S$, so das stets $|s_k| \leq |s_{k+1}|$ gilt. Dann ist

$$\lim_{n \to \infty} |s_n| = \infty.$$

Weiter sei $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge natürlicher Zahlen. Ist die Folge $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ so gewählt, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n \left| \frac{z}{s_n} \right|^{k_n + 1}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, so konvergiert das Weierstraßprodukt

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(E_{k_n} \left(\frac{z}{s_n} \right) \right)^{m_n}$$

normal in $\mathbb{C}$ und definiert eine in $\mathbb{C}$ analytische Funktion f, deren Nullstellen genau in den Punkten $s_1, s_2, s_3, \ldots$ liegen und die vorgeschriebenen Ordnungen m_i haben. Die Funktion $f_0(z) := z^{m_0} f(z)$ hat zusätzlich noch eine Nullstelle der Ordnung m_0 im Nullpunkt.

Beweis. Siehe z.B. [1] □

Mit dem Satz soll nun eine wichtige Funktion konstruiert werden.

Satz 3. *Die Funktion σ wird definiert durch das unendliche Produkt*

$$\sigma(z) := z \prod_{\omega \in L - \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \cdot \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2\right).$$

Sie konvergiert in $\mathbb{C}$ normal und stellt daher eine ganze Funktion dar. σ hat Nullstellen erster Ordnung in den Gitterpunkten von L und außerhalb von L keine.

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ definiere

$$L_k := \{t_1\omega_1 + t_2\omega_2 : \ t_1, t_2 \in \mathbb{Z}, \max\{|t_1|, |t_2|\} = k\}.$$

Diese Menge besitzt $8k$ Elemente für $k \geq 1$, und es gilt $L = \bigcup_{k=0}^{\infty} L_k$. Mit Hilfe dieser Zerlegung zählt man nun die Punkte von L folgendermaßen ab:

$$s_0 = 0,\ s_1 = \omega_1,\ s_2 = \omega_1 + \omega_2,\ s_3 = \omega_2,\ s_4 = -\omega_1 + \omega_2,$$
$$s_5 = -\omega_1,\ s_6 = -\omega_1 - \omega_2,\ s_7 = -\omega_2,\ s_8 = \omega_1 - \omega_2,\ s_9 = 2\omega_1,\ \ldots$$

Damit gilt dann $\lim_{n\to\infty} |s_n| = \infty$. Als nächstes soll nun gezeigt werden, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z}{s_n}\right|^3 < \infty.$$

Es existiert eine Konstante d, so dass für $\omega \in L_k$ immer $|\omega| \geq kd$ gilt. Damit erhält man dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z}{s_n}\right|^3 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s_n \in L_k} \left|\frac{z}{s_n}\right|^3 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s_n \in L_k} \left(\frac{|z|}{kd}\right)^3 = \sum_{k=1}^{\infty} 8k \left(\frac{|z|}{kd}\right)^3 = \frac{8|z|^3}{d^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty.$$

Man hat nun eine Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gefunden, nämlich $k_n = 2, n \in \mathbb{N}$. Der Weierstrasssche Produktsatz ergibt nun, dass

$$\sigma(z) := z \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{z}{s_n}\right) \exp\left(\frac{z}{s_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{s_n}\right)^2\right) \right]$$

eine Funktion mit den gewünschten Eigenschaften ist. Da das Produkt absolut konvergent ist, kommt es auf die Reihenfolge der Faktoren nicht an, und man schreibt daher auch

$$\sigma(z) = z \prod_{\omega \in L - \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\omega}\right) \cdot \exp\left(\frac{z}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2\right).$$

□

Die Funktion σ ist keine elliptische Funktion, sie besitzt aber bzgl. des Gitters L eine Transformationseigenschaft. Diese Eigenschaft wird benötigt, um eine eliptischen Funktion zu gegebenen Null- und Polstellen zu konstruieren.

Lemma 4. *Für die Funktion σ gilt*

$$\sigma(z+\omega) = e^{az+b}\sigma(z), \ \ z \in \mathbb{C}, \ \omega \in L.$$

Dabei sind a, b gewisse komplexe Zahlen, welche von ω abhängen dürfen, aber nicht von z.

Beweis. $\sigma(z)$ und $\sigma(z+\omega)$ haben dieselben Nullstellen. Daher ist $\sigma(z+\omega)/\sigma(z)$ eine in ganz $\mathbb{C}$ analytische Funktion ohne Nullstellen. Es existiert daher eine ganze Funktion $h(z)$ so, dass

$$\frac{\sigma(z+\omega)}{\sigma(z)} = e^{h(z)} \tag{1}$$

gilt. Damit hat man schon fast die gewünschte Form, denn es ist

$$\sigma(z+\omega) = e^{h(z)}\sigma(z). \tag{2}$$

Bleibt also noch zu zeigen, dass

$$h'' = 0$$

gilt. Aus (2) folgt nun

$$\sigma'(z+\omega) = \sigma'(z)e^{h(z)} + \sigma(z)h'(z)e^{h(z)}.$$

Einsetzen von (1) ergibt

$$h'(z) = \frac{\sigma'(z+\omega)}{\sigma(z+\omega)} - \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}.$$

Zu zeigen ist also

$$\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)'(z+\omega) = \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)'(z),$$

also umformuliert:

$$\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)' \text{ ist eine elliptische Funktion.}$$

Also nächstes wird die „logarithmische Ableitung“

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} (= (\ln \circ \sigma)'(z))$$

berechnet. Durch Anwendung der Produktregel ergibt sich:

$$\begin{aligned}\sigma'(z) &= \prod_{\omega\in L-\{0\}}\left(1-\frac{z}{\omega}\right)\cdot\exp\left(\frac{z}{\omega}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2\right)+z\left(\prod_{\omega\in L-\{0\}}\left(1-\frac{z}{\omega}\right)\cdot\exp\left(\frac{z}{\omega}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2\right)\right)'\\ &= \frac{1}{z}\sigma(z)+z\left(\prod_{\omega\in L-\{0\}}\left(1-\frac{z}{\omega}\right)\cdot\exp\left(\frac{z}{\omega}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\omega}\right)^2\right)\right)'.\end{aligned}$$

Durch Ausklammern und weiteres anwenden der Produktregel erhält man schließlich:

$$\sigma'(z)=\frac{1}{z}\sigma(z)+\sigma(z)\sum_{\omega\in L-\{0\}}\left[\frac{-1/\omega}{1-z/\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{z}{\omega^2}\right].$$

Damit ergibt sich die „logarithmische Ableitung“ zu:

$$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}=\frac{1}{z}+\sum_{\omega\in L-\{0\}}\left[\frac{-1/\omega}{1-z/\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{z}{\omega^2}\right]=\frac{1}{z}+\sum_{\omega\in L-\{0\}}\left[\frac{1}{-\omega+z}+\frac{1}{\omega}+\frac{z}{\omega^2}\right].$$

Nach weiterem Ableiten erhält man insgesamt:

$$\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)'(z)=-\frac{1}{z^2}+\sum_{\omega\in L-\{0\}}\left(-\frac{1}{(z-\omega)^2}+\frac{1}{\omega^2}\right)=-\wp(z).$$

□

3 Das Abelsche Theorem

Theorem 1. *(von Abel)*
Eine elliptische Funktion zu vorgegebenen Nullstellen $a_1,\dots,a_n$ und Polstellen $b_1,\dots,b_n$, mit $a_i\not\equiv b_j \mod L$, existiert dann und nur dann, wenn

$$a_1+\ldots+a_n\equiv b_1+\ldots+b_n \mod L. \tag{3}$$

Bemerkung. An dieser Stelle sieht man auch noch mal, dass keine elliptische Funktion der Ordnung 1 existieren kann.

Beweis. Dank Lemma 4 ist eine der beiden Richtungen leicht zu zeigen. Als erstes wird die Bedingung (3) ein wenig umgeformt. Man kann nämlich sogar annehmen, dass

$$a_1+\ldots+a_n=b_1+\ldots+b_n \tag{4}$$

gilt, indem man einen der Punkte, z.B. a_1, durch einen modulo L äquivalenten Punkt ersetzt. Sei σ die analytische Funktion aus Satz 3. Damit konstruiere nun eine Funktion $f(z)$ durch:

$$f(z)=\frac{\prod_{i=1}^{n}\sigma(z-a_i)}{\prod_{i=1}^{n}\sigma(z-b_i)}$$

Aus den Eigenschaften von σ folgt, dass $f(z)$ die gewünschten Null- und Polstelleneigenschaften hat. Nun ist also noch zu zeigen, dass $f(z)$ eine elliptische Funktion ist. Dazu benutzt man jetzt die Transformationseigenschaft von σ. Nach Lemma 4 gilt für $\omega \in L$:

$$f(z+\omega) = \frac{\prod_{i=1}^{n} e^{a(z-a_i)+b}}{\prod_{i=1}^{n} e^{a(z-b_i)+b}} f(z) \stackrel{(4)}{=} f(z).$$

Bemerkung. Die Funktion f ist bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Denn nach dem ersten Liouvilleschen Satz ist der Quotient zweier elliptischer Funktionen mit demselben Null- und Pollstellenverhalten konstant.

Für die andere Richtung nimmt man an, dass eine elliptische Funktion f mit dem gewünschten Verhalten existiert. Man wählt einen Punkt $a \in \mathbb{C}$, so dass auf dem Rand der verschobenen Grundmasche

$$\mathcal{F}_a = \{a + t_1\omega + t_2\omega : 0 \le t_1, t_2 \le 1\}$$

weder Pole noch Nullstellen sind. Da sich die Bedingung (3) nicht ändert, wenn man die Punkte a_j und b_j modulo L abändert, kann man

$$a_j, b_j \in \mathring{\mathcal{F}}_a$$

annehmen. Betrachte nun das Null- und Polstellenzählende Integral

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{F}_a} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta.$$

Es gilt:

$$I = \sum_{i=0}^{n} ord(f; a_i) \cdot \underbrace{n(\partial\mathcal{F}_a, a_i)}_{=1} \cdot a_i + \sum_{i=0}^{n} ord(f; b_i) \cdot \underbrace{n(\partial\mathcal{F}_a, b_i)}_{=1} \cdot b_i.$$

Da mehrfache Null- und Polstellen entsprechend ihrer Vielfachheit mehrfach vorkommen, gilt dann

$$I = a_1 + \ldots + a_n - b_1 + \ldots + b_n.$$

Also muss gezeigt werden, dass $I \in L$. Dazu sollen jetzt jeweils die Integrale zweier gegenüberliegender Seiten verglichen werden. Im Folgenden sei $\int_y^z$ mit $y, z \in \mathbb{C}$ abkürzend geschrieben für $\int_\gamma$ mit $\gamma \colon [r, r+1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) := y + (t-r)(z-y), t \in [r, r+1]$. Fertig ist man wenn man

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{a}^{a+\omega_1} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta + \int_{a+\omega_1+\omega_2}^{a+\omega_2} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \right) \in L$$

und

$$\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{a}^{a+\omega_2} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta + \int_{a+\omega_1+\omega_2}^{a+\omega_1} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \right) \in L$$

zeigen kann. Allgemein gilt

$$\int\limits_{a+\omega_1+\omega_2}^{a+\omega_2} g(\zeta)\,d\zeta = -\int\limits_{a+\omega_2}^{a+\omega_1+\omega_2} g(\zeta)\,d\zeta = -\int\limits_{a}^{a+\omega_1} g(\zeta+\omega_2)\,d\zeta.$$

Für den Spezialfall

$$g(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)}$$

gilt, da $f'(z)$ wieder eine elliptische Funktion ist,

$$\begin{aligned} g(z) - g(z+\omega_2) &= z\frac{f'(z)}{f(z)} - (z+\omega_2)\frac{f'(z+\omega_2)}{f(z+\omega_2)} \\ &= z\frac{f'(z)}{f(z)} - z\frac{f'(z)}{f(z)} - \omega_2\frac{f'(z)}{f(z)} \\ &= -\omega_2\frac{f'(z)}{f(z)}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich dann

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{a}^{a+\omega_1} g(\zeta)\,d\zeta + \int\limits_{a+\omega_1}^{a+\omega_1+\omega_2} g(\zeta)\,d\zeta + \int\limits_{a+\omega_1+\omega_2}^{a+\omega_2} g(\zeta)\,d\zeta + \int\limits_{a+\omega_2}^{a} g(\zeta)\,d\zeta\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{a}^{a+\omega_1} g(\zeta)\,d\zeta - \int\limits_{a+\omega_1+\omega_2}^{a+\omega_1} g(\zeta)\,d\zeta - \int\limits_{a}^{a+\omega_1} g(\zeta+\omega_2)\,d\zeta + \int\limits_{a+\omega_2}^{a} g(\zeta)\,d\zeta\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{a}^{a+\omega_1} g(\zeta) - g(\zeta+\omega_2)\,d\zeta + \int\limits_{a}^{a+\omega_2} g(\zeta+\omega_1)\,d\zeta + \int\limits_{a+\omega_2}^{a} g(\zeta)\,d\zeta\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{a}^{a+\omega_1} -\omega_2\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta + \int\limits_{a}^{a+\omega_2} \omega_1\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta\right) \\ &= \frac{-\omega_2}{2\pi i}\int\limits_{a}^{a+\omega_1} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta + \frac{\omega_1}{2\pi i}\int\limits_{a}^{a+\omega_2} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta. \end{aligned}$$

Man ist fertig wenn man zeigen kann, dass

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a}^{a+\omega_j} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta \in \mathbb{Z}, \quad j = 1,2$$

gilt. Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ der Integrationsweg mit $\gamma(t) = a + t\cdot\omega_1$, $t \in [0,1]$. Man definiert dann $\widetilde{\gamma}\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\widetilde{\gamma}(t) := f(a+t\cdot\omega_1)$, $t \in [0,1]$. Da $f(z)$ eine elliptische Funktion ist, gilt $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{\gamma}(1)$, d.h. $\widetilde{\gamma}$ ist geschlossen. Vorausgesetzt war, dass auf dem Rand von $\mathcal{F}_a$ keine Nullstellen liegen, damit ist also insgesamt $\widetilde{\gamma}$ ein geschlossener Integrationsweg in $\mathbb{C}-\{0\}$. Man erhält

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a}^{a+\omega_1}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{1}\frac{f'(a+t\cdot\omega_1)}{f(a+t\cdot\omega_1)}\omega_1\,dt$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widetilde{\gamma}}\frac{1}{u}\,du = n(\widetilde{\gamma},0)\in\mathbb{Z}.$$

Analog erhält man

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a}^{a+\omega_2}\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,d\zeta\in\mathbb{Z}.$$

□

4 Bemerkungen

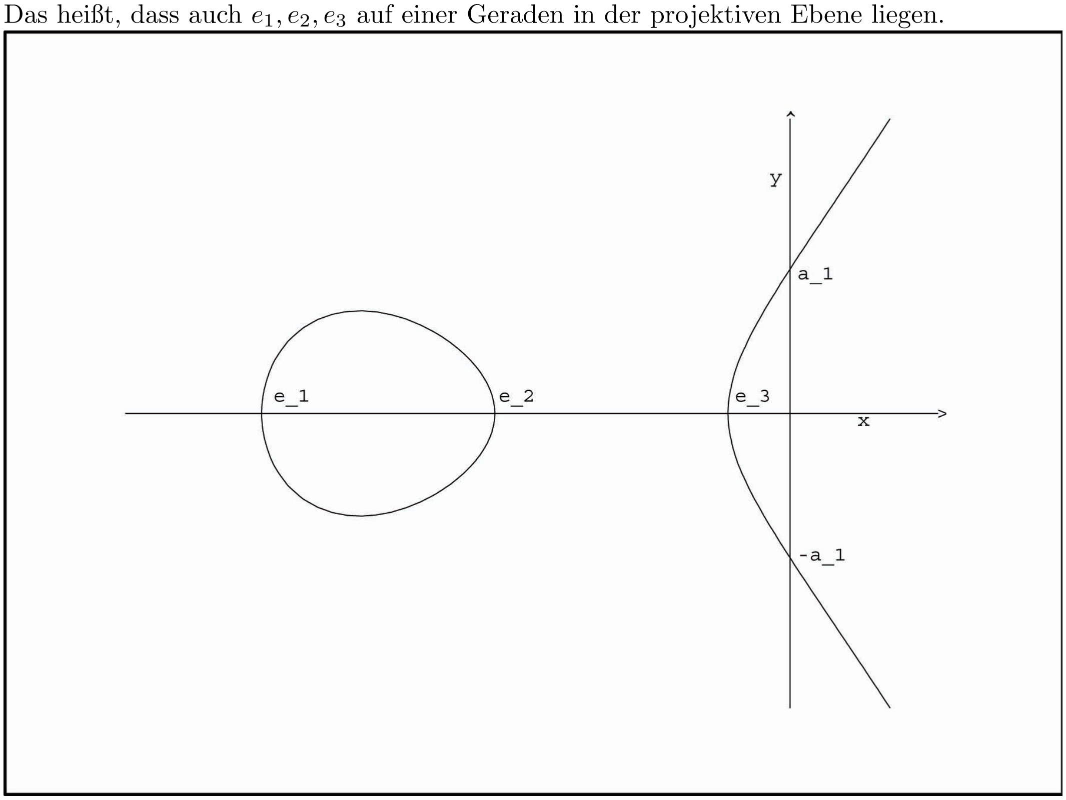
Mit dem Abelschen Theorem kann man sich jetzt die Lage der Nullstellen der $\wp$-Funktion bzw von $\wp'$ verdeutlichen. $\wp$ besitzt in den Gitterpunkten einen Pol weiter Ordnung. Das Theorem von Abel ergibt nun für die beiden Nullstellen a_1, a_2, dass gilt

$$a_1 + a_2 \equiv 0 \mod L.$$

In der projektiven Ebene bedeutet dies, dass a_1, a_2 auf einer Geraden durch den Punkt $[0,0,1]$ liegen, d.h. auf einer Parallelen zur y-Achse. Es ist also $a_2 \equiv -a_1 \mod L$. Für die Nullstellen e_1, e_2, e_3 von $\wp'$ ergibt sich dann, da $\wp'$ einen Pol der Ordnung 3 in den Gitterpunkten besitzt:

$$e_1 + e_2 + e_3 \equiv 0 \mod L.$$

Das heißt, dass auch e_1, e_2, e_3 auf einer Geraden in der projektiven Ebene liegen.



Literatur

[1] Freitag,Busam, *Funktionentheorie 1*. Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 2000.

[2] Fischer,Lieb, *Funktionentheorie*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1992.