Die Thetafunktion

Björn Walker

12.01.2006 und 19.01.2006

Definition der Thetafunktion

Folgende Reihe wird als Thetafunktion bezeichnet:

$$\vartheta(\tau, z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2\tau+2nz)} \qquad\qquad Im(\tau) > 0, z \in \mathbb{C}$$

$\vartheta(\tau, z)$ ist in z sowie in τ eine analytische Funktion, denn:

Sei $\tau := u + iv \ (v > 0),\ z = x + iy$.
Dann gilt $|e^{\pi i(n^2\tau+2nz)}| = e^{Re(\pi i(n^2\tau+2nz))} = e^{-\pi(n^2v+2ny)}$.
Ist nun τ fest und z aus einem beliebigem Kompaktum, so ist
$-(n^2v + 2ny) \leq -\frac{1}{2}n^2v$ für fast alle $n \in \mathbb{Z}$.
Somit ist

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} \text{mit } q := e^{-\frac{\pi}{2}v} < 1$$

eine konvergente Majorante als Teilreihe einer geometrischen Reihe .
Die Thetareihe konvergiert also lokal gleichmäßig und ist deshalb holomorph in z.
Ist nun z fest und τ aus einem beliebigen Kompaktum der oberen Halbebene, dann gibt es eine Konstante $K > 0$ mit $-(n^2v + 2ny) \leq -\frac{1}{2}n^2K$ für fast alle n.
Man erhält eine lokale Majorante wie oben mit $q = e^{-\frac{\pi}{2}K}$, also ist Theta auch in τ holomorph.
Außerdem ist die Thetafunktion gerade in z, also $\vartheta(\tau, z) = \vartheta(\tau, -z)$, wie man leicht der Reihendarstellung entnimmt:

$$\vartheta(\tau, -z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n^2\tau+2n(-z))} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i((-n)^2\tau+2(-n)z)} = \vartheta(\tau, z) \qquad (1)$$

Mit der Thetafunktion lässt sich nun die Existenzaussage des Satzes von Abel beweisen.

Satz von Abel

Eine elliptische Funktion f zu gegebenen Gitter L und Nullstellen $a_1, \dots, a_n$ und Polstellen $b_1, \dots, b_n$ existiert genau dann, wenn gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i \mod L$$

Es reicht, die Existenz einer ganzen Funktion $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zu zeigen mit

I $\sigma(z+w) = e^{az+b}\sigma(z); \quad w \in L;\ a,b \in \mathbb{C}$, wobei a und b nur von w, nicht jedoch von z abhängen dürfen.

II σ hat genau eine einfache Nullstelle z_0 mod L.

Nehmen wir nun noch o.B.d.A an, daß $\sum a_j = \sum b_j$, so ist die gesuchte Funktion gefunden:

$$f(z) := \prod_{j=1}^{n} \frac{\sigma(z_0 + z - a_j)}{\sigma(z_0 + z - b_j)}$$

Denn offenbar hat f das gewünschte Null- und Polstellenverhalten. Außerdem gilt für $w \in L$:

$$\begin{aligned} f(z+w) &= \prod_{j=1}^{n} \frac{\sigma(z_0 + z - a_j + w)}{\sigma(z_0 + z - b_j + w)} \\ &= \prod_{j=1}^{n} \frac{e^{a(z_0+z-a_j)+b}\sigma(z_0 + z - a_j)}{e^{a(z_0+z-b_j)+b}\sigma(z_0 + z - b_j)} = e^{a(\sum b_j - \sum a_j)} f(z) \\ &= f(z) \end{aligned}$$

Mithilfe der Thetafunktion kann ein solches σ für bestimmte Gitter konstruiert werden. Hierzu werden wir $\vartheta(\tau, z)$ nur als Funktion im zweiten Argument auffassen, weshalb ich die Notation $\vartheta_\tau(z) := \vartheta(\tau, z)$ verwende.

Betrachte nun Gitter der Form $L = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, $Im(\tau) > 0$.
Damit $\vartheta_\tau(z+1) = \vartheta_\tau(z)$ da $e^{2\pi i n} = 1$ und

$$\begin{aligned} \vartheta_\tau(z+\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi(n^2\tau + 2n(z+\tau))} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi((n+1)^2\tau - \tau + (2n+2)z - 2z)} \\ &= e^{-\pi i(\tau+2z)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi((n+1)^2\tau + 2(n+1)z)} \\ &= e^{-\pi i(\tau+2z)}\vartheta_\tau(z) \qquad (*) \end{aligned}$$

Somit ergibt sich als allgemeines Transformationsverhalten gegenüber den Gitterpunkten (wobei $k, l \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned} \vartheta_\tau(z + k\tau + l) = \vartheta_\tau(z + k\tau) &= \vartheta_\tau(z + (k-1)\tau)e^{-\pi i(\tau + 2(z+(k-1)\tau))} \\ &= \vartheta_\tau(z + (k-1)\tau)e^{-\pi i((2k-1)\tau + 2z))} \\ &= \vartheta_\tau(z)e^{-\pi i(k^2\tau + 2kz)} \end{aligned}$$

wie sich induktiv ergibt (wegen $\sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = n^2$). Die Thetafunktion erfüllt die Eigenschaft **I**.

Die Thetafunktion hat mod L genau eine einfache Nullstelle. Um das zu zeigen, wählen wir eine um $p \in \mathbb{C}$ verschobene Grundmasche F_p, auf deren Rand ∂F_p sich keine Nullstelle von Theta befindet (man beachte, dass die Nullstellenmenge von Theta diskret ist in $\mathbb{C}$, da ansonsten Theta nach dem Identitätssatz identisch verschwinden würde, was offenbar nicht der Fall ist).
Damit ist es vernünftig, das folgende Nullstellenzählende Integral zu betrachten:

$$\text{Z.z.:} \qquad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial F_p} \frac{\vartheta'_\tau(z)}{\vartheta_\tau(z)}\, dz = 1$$

Dies liefert die gewünschte Aussage über die Nullstelle, da Theta als holomorphe Funktion keine Pole besitzt.

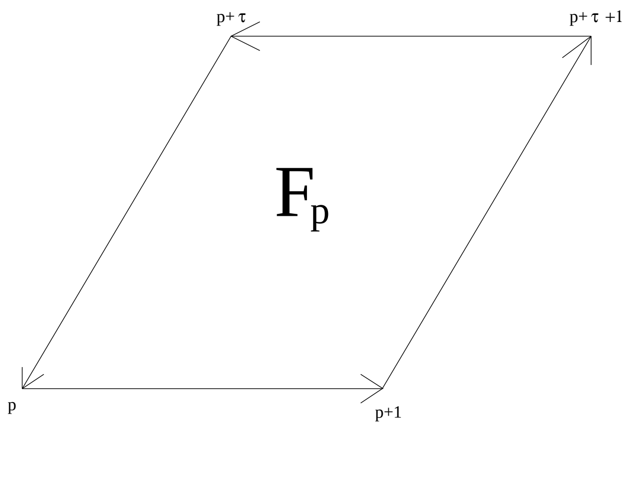
Sei hierzu $g(z) := \dfrac{\vartheta'_\tau(z)}{\vartheta_\tau(z)}$.

Dann ist $g(z+\tau) - g(z) = -2\pi i$, wegen

$$\begin{aligned} g(z+\tau) - g(z) &= \frac{\vartheta'_\tau(z+\tau)}{\vartheta_\tau(z+\tau)} - \frac{\vartheta'_\tau(z)}{\vartheta_\tau(z)} \\ &= \frac{-2\pi i\vartheta_\tau(z+\tau) + e^{-\pi i(\tau+2z)}\vartheta'_\tau(z)}{\vartheta_\tau(z+\tau)} - \frac{e^{-\pi i(\tau+2z)}\vartheta'_\tau(z)}{\vartheta_\tau(z+\tau)} \\ &= -2\pi i, \end{aligned}$$

wie sich aus der Transformationsformel $(*)$ ergibt.
Weiter folgt für das Integral über $g(z)$:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial F_p} g(z)\, dz &= \int\limits_{p}^{p+1} g(z)\, dz + \int\limits_{p+\tau+1}^{p+\tau} g(z)\, dz \\ &= \int\limits_{p}^{p+1} g(z) - g(z+\tau)\, dz = 2\pi i \end{aligned}$$



Man beachte:

$$\int\limits_{p+1}^{p+\tau+1} g(z)\, dz + \int\limits_{p+\tau}^{p} g(z)\, dz = 0$$

wegen $g(z) = g(z+1)$.

Die Nullstelle ist übrigens $\frac{1+\tau}{2}$, denn nach $(*)$ gilt

$$\begin{aligned}\vartheta_\tau(\frac{1+\tau}{2}) = \vartheta_\tau(\frac{1-\tau}{2}+\tau) = \overbrace{e^{-\pi i(\tau+1-\tau)}}^{-1}\vartheta_\tau(\frac{1-\tau}{2})\\ \overset{(1)}{=} -\vartheta_\tau(\frac{-1+\tau}{2}) = -\vartheta_\tau(-\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}+1)\\ = -\vartheta_\tau(\frac{1+\tau}{2}).\end{aligned}$$

Die Thetafunktion genügt also der Eigenschaft **II**.

Somit haben wir nun für jedes Gitter der Form $\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$ eine Funktion σ gefunden, wie sie für die Existenzaussage des Satzes von Abel benötigt wird, nämlich gerade die zugehörige Thetareihe. Glücklicherweise lassen sich alle anderen Gitter auf diesen Fall zurückführen.

Sei ein beliebiges Gitter $L = w_1\mathbb{Z} + w_2\mathbb{Z}$ gegeben, sowie eine Nullstellenmenge $a_1, \dots, a_n$ und Polstellenmenge $b_1, \dots, b_n$ mit $\sum a_i \equiv \sum b_i$ mod L.
Da für jede echt komplexe Zahl z gilt $Im(z) > 0$ oder $Im(z^{-1}) > 0$ nehmen wir o.B.d.A. an, dass für $\tau := \frac{w_2}{w_1}$ gilt $Im(\tau) > 0$ (wäre $\tau \in \mathbb{R}$, dann wären w_1 und w_2 abhängig über $\mathbb{R}$, da $\tau w_1 = w_2$).
Wir betrachten das zugehörige Gitter $L' := \mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$. Für dieses gilt nun die Kongruenz $\sum \frac{a_i}{w_1} \equiv \sum \frac{b_i}{w_1}$ wie man sofort sieht. Nach unserem bisherigem Ergebnis existiert also eine elliptische Funktion $g(z)$ zu L' mit Nullstellen $\frac{a_1}{w_1}, \dots, \frac{a_n}{w_1}$ und Polstellen $\frac{b_1}{w_1}, \dots, \frac{b_n}{w_1}$.
Dann ist aber $f(z) := g(\dfrac{z}{w_1})$ elliptisch zu L, denn:

$$\begin{aligned}f(z+w_1) = g(\frac{z+w_1}{w_1}) = g(\frac{z}{w_1}+1) = g(\frac{z}{w_1}) = f(z)\\ f(z+w_2) = g(\frac{z+w_2}{w_1}) = g(\frac{z}{w_1}\pm\tau) = g(\frac{z}{w_1}) = f(z)\end{aligned}$$

Offenbar hat f auch das gewünschte Null- und Polstellenverhalten, wegen $f(a_i) = g(\frac{a_i}{w_1})$ und $f(b_i) = g(\frac{b_i}{w_1})$.

$\square$

Weitere Anwendung der Thetafunktion

Betrachte folgende Thetareihen als holomorphe Funktionen auf der oberen Halbebene (sprich $Im(z) > 0$):

$$\vartheta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z}$$

$$\tilde{\vartheta}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{\pi i n^2 z}$$

$$\tilde{\tilde{\vartheta}}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n+\frac{1}{2})^2 z}$$

Diese sind wohldefiniert, wie aus der Jacobischen Thetatransformationsformel (JTF) folgt, welche hier nicht weiter erläutert wird (vergleiche Vortrag von Johannes Jaerisch).

$$\sqrt{\frac{z}{i}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n+w)^2 z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi i n^2 z^{-1} + 2\pi i n w} \qquad z, w \in \mathbb{C};\ Im(z) > 0$$

Natürlich ließe sich die Konvergenz auch wie bei der anfänglichen Thetareihe zeigen. Weiterhin genügen die Reihen selber den folgenden Transformationsformeln:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \vartheta(z+1) = \tilde{\vartheta}(z) & \text{d)} \vartheta(-\frac{1}{z}) = \sqrt{\frac{z}{i}}\vartheta(z) \\ \text{b)} \tilde{\vartheta}(z+1) = \vartheta(z) & \text{e)} \tilde{\vartheta}(-\frac{1}{z}) = \sqrt{\frac{z}{i}}\tilde{\tilde{\vartheta}}(z) \\ \text{c)} \tilde{\tilde{\vartheta}}(z+1) = e^{\pi\frac{i}{4}}\tilde{\tilde{\vartheta}}(z) & \text{f)} \tilde{\tilde{\vartheta}}(-\frac{1}{z}) = \sqrt{\frac{z}{i}}\tilde{\vartheta}(z) \end{array}$$

Unten stehende Rechnungen belegen dies.

$$\text{a)} \quad \vartheta(z+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overbrace{e^{\pi i n^2}}^{(-1)^n} e^{\pi i n^2 z} = \tilde{\vartheta}(z) \qquad \text{b) analog}$$

$$\text{c)} \quad \tilde{\tilde{\vartheta}}(z+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(n+\frac{1}{2})^2} e^{\pi i(n+\frac{1}{2})^2 z}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overbrace{e^{\pi i(n^2+n)}}^{1} e^{\pi\frac{i}{4}} e^{\pi i(n+\frac{1}{2})^2 z} = e^{\pi\frac{i}{4}}\tilde{\tilde{\vartheta}}(z)$$

$$\text{d)} \quad \vartheta(-\frac{1}{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2(-\frac{1}{z})} \overset{(JTF\ mit\ w=0)}{=} \sqrt{\frac{z}{i}}\vartheta(z)$$

$$\text{e)} \quad \tilde{\vartheta}(-\frac{1}{z}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n} e^{\pi i n^2(-\frac{1}{z})} \overset{(JTF\ mit\ w=\frac{1}{2})}{=} \sqrt{\frac{z}{i}}\tilde{\tilde{\vartheta}}$$

f) folgt nach e) mittels Ersetzen von z durch $\frac{-1}{z}$.

Mit diesem Wissen folgt nun für die Funktion

$$f(z) := \left(\vartheta(z)\tilde{\vartheta}(z)\tilde{\tilde{\vartheta}}(z)\right)^8,$$

dass sie das gleiche Transformationsverhalten aufweist wie die Diskriminante, also

$$f(z+1) = f(z) \qquad \text{und} \qquad f(-\frac{1}{z}) = z^{12} f(z).$$

Wie in einem anderem Vortrag gezeigt wurde, unterscheidet sich f somit nur um einen Konstanten Faktor von der Diskrimanten. Somit lässt sich also die Diskriminante mithilfe obiger Thetareihen darstellen. Es gilt:

$$\Delta(z) = \frac{(2\pi)^{12}}{2^8} \left(\vartheta(z)\tilde{\vartheta}(z)\tilde{\tilde{\vartheta}}(z) \right)^8 .$$

Quellen

E. Freitag,R. Busam: **Funktionentheorie 1**, Springer, 3. Auflage 2000

David Munford: **Tata lectures on Theta**, Birkhäuser, 1983