Die Thetafunktion als Lösung der Wärmeleitungsgleichung

Schriftliche Ausarbeitung des Vortrages im Januar 2006
gehalten im Seminar 'Elliptische Funktionen und Modulformen'
bei Prof. Dr. Gamst, Prof. Dr. Hortmann und Prof. Dr. Oeljeklaus

vorgelegt von Johannes Jaerisch
an der Universität Bremen
im WS 2006

Einleitung

Diese Ausarbeitung faßt zusammen und ergänzt meinen Vortrag über die Thetafunktion als Lösung der Wärmeleitungsgleichung, den ich im Rahmen des AlZAGK-Seminars 'Elliptische Funktionen und Modulformen' gehalten habe.

Die Thetafunktion $\theta(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(\pi i(n^2\tau + 2nz)\right)$, welche als Hilfsfunktion zur Konstruktion elliptischer Funktionen zu vorgegebenen Null- und Polstellen verwendet werden kann, wird sich im Folgenden als eine Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung $\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 = 0$ auf der Kreislinie $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ herausstellen.

Es wird einleitend das physikalische Modell erläutert, das zur partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 = 0$ als Beschreibung der Wärmeleitung in einem homogenen Stoff führt. Die Funktion $\theta(x, 4\pi it)$ wird dann zunächst heuristisch als Lösung hergeleitet, anschließend wird sie als Fundamentallösung nachgewiesen: es gilt $\theta(\cdot, 4\pi it) \longrightarrow \delta$ als Distribution für $t \longrightarrow 0$. Mit Hilfe der Fundamentallösung können also Lösungen der homogenen Gleichung mit beliebiger periodischer Anfangsbedingung $f \in C^\infty$ (Wärmeverteilung zur Zeit $t = 0$) gewonnen werden.
Abschließend wird mittels der Jacobischen Thetatransformationsformel ein Zusammenhang mit dem Gaußkern $K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left[\frac{-x^2}{4t}\right]$ hergestellt.

1 Physikalisches Modell der Wärmeleitung

Zur Modellierung der Wärmeleitung stellt man sich Wärme als nicht komprimierbare Flüssigkeit vor, welche alles durchfließt. Die gemessene Temperatur an einem Punkt x ist dabei proportional zur Menge an Wärmeenergie pro Volumen ΔV um x. Ein ausgleichender Wärmefluß findet statt in Richtung einer Region geringerer Temperatur, proportional zur Differenz der Temperatur in dieser Richtung. Wärme diffundiert, so daß eine gleichmäßige Verteilung der Konzentration von Wärmeenergie pro Volumen erreicht wird.

Wir gehen von einem hinsichtlich Wärmekapazität und Wärmeleitfähigkeit homogenen und temperaturunabhängigen Stoff aus. Man stellt fest, daß diese Modellannahmen auch für andere Diffusionsprozesse geeignet sind, wie z.B. für die Vermischung zweier Flüssigkeiten durch Diffusion.

Zur mathematischen Formulierung beschreibe $u(x,t)$ die Temperatur am Ort x zur Zeit t. Um die Veränderungsgeschwindigkeit der Wärmeenergie E in einer Region D anzugeben, zerlegt man D in infinitesimal kleine Volumina ΔV. Lokal ist nach Modellannahme

$$\Delta E \sim \Delta u \Delta V$$

mit der ortsabhängigen spezifischen Wärmekapazität $\sigma(x)$ als Proportionalitätskonstante. Also ist

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \sigma(x)\frac{\Delta u}{\Delta t}\Delta V.$$

Damit ergibt sich die Veränderungsgeschwindigkeit der Wärmeenergie E in der Region

D zur Zeit t als

$$\frac{\partial}{\partial t}E(t) = \iiint_D \sigma(x)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)dx. \tag{1}$$

Die Veränderung der Wärmeenergie in einem Volumen D wird nach Modellannahme ausschließlich durch den ausgleichenden Wärmefluß bedingt, welcher durch die Oberfläche S von D in Richtung geringerer Temperatur stattfindet. Zur Beschreibung des Wärmeflusses $\frac{\partial}{\partial t}E(t)$ durch S in D zerlegt man S in infitinesimal kleine Flächenstücke ΔA und stattet S mit dem äußeren Normaleneinheitsfeld $n(x)$ aus. Dann ist der Wärmefluß $\frac{\Delta E}{\Delta t}$ durch ΔA nach D

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} \sim \frac{\partial}{\partial n}u(x,t)\Delta A$$

mit der ortsabhängigen thermischen Wärmeleitfähigkeit $K(x)$ als Proportionalitätskonstante. Zur Orientierung des Wärmeflusses beachtet man, daß bei positiver Ableitung von $u(x,t)$ längs $n(x)$, d.h. bei zunehmender Temperatur außerhalb von D, der Wärmefluß ins Innere von D positiv beschrieben wird. Damit folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}E(t) = \iint_S K(x)\frac{\partial}{\partial n}u(x,t)dx = \iint_S K(x)\nabla u(x,t)\cdot n(x)dx = \iint_{S,n} K(x)\nabla u(x,t)d\vec{S}.$$

Mit dem Divergenzsatz ist

$$\iint_{S,n} K(x)\nabla u(x,t)d\vec{S} = \iiint_D \nabla\cdot[K(x)\nabla u(x,t)]dx. \tag{2}$$

(1) und (2) ergeben

$$\frac{\partial}{\partial t}E(t) = \iiint_D \sigma(x)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)dx = \iiint_D \nabla\cdot[K(x)\nabla u(x,t)]dx \tag{3}$$

für beliebige Regionen D. Also müssen die Integranden in (3) gleich sein. Es folgt

$$\sigma(x)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \nabla\cdot[K(x)\nabla u(x,t)] \tag{4}$$

Nimmt man weiter an, daß $\sigma(x) = \sigma$ und $K(x) = K$ konstant sind und setzt $k := \frac{K}{\sigma}$, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = k\nabla^2 u(x,t) \tag{5}$$

Es genügt, Lösungen $\tilde{u}(x,t)$ für $k = 1$, d.h. von

$$\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 = 0 \tag{6}$$

zu betrachten; Lösungen von (5) erhält man durch $u(x,t) := \tilde{u}(x, \frac{1}{k}t)$.

2 Lösen der Differentialgleichung $\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 = 0$ auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

2.1 Lösungsansatz mittels Fourierentwicklung

Man gewinnt die Thetafunktion als Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ heuristisch durch Fourierentwicklung. Beschreibe f eine periodische Anfangsbedingung und sei $u(x,t)$ eine periodische Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Dann muß gelten:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x}u(x,t) \tag{7}$$

$$u(x+1,t) = u(x,t) \tag{8}$$

$$u(x,0) = f(x). \tag{9}$$

u gestatte in x eine Fourierentwicklung.

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(t)\exp\left[2\pi ikx\right] \tag{10}$$

(7) und (9) liefern mit (10)

$$c_k'(t) = -4\pi^2k^2c_k(t) \tag{11}$$

$$c_k(0) = \widehat{f}(k) \tag{12}$$

mit dem k-ten Fourierkoeffizienten $\widehat{f}(k)$ von f. Dieses Anfangswertproblem wird gelöst durch

$$c_k(t) = \widehat{f}(k)\exp\left[-4\pi^2k^2t\right] \tag{13}$$

Mit der Integraldarstellung von $\widehat{f}(k)$ gibt das

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^1 f(y)\exp\left[-2\pi iky\right]\exp\left[-4\pi^2k^2t\right]\exp\left[2\pi ikx\right]dy \tag{14}$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_0^1 f(y)\exp\left[2\pi ik(x-y)\right]\exp\left[\pi k^2 i(4\pi it)\right]dy \tag{15}$$

Nach Definition der Thetafunktion $\theta(z,\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left(\pi i(n^2\tau + 2nz)\right)$ für $\Im(\tau) > 0$, $z\in\mathbb{C}$ folgt aus (15) für $t > 0$

$$u(x,t) = \int_0^1 f(y)\theta(x-y,4\pi it)dy \tag{16}$$

$$= \left[f * \theta(\cdot,4\pi it)\right](x). \tag{17}$$

2.2 $\theta(x, 4\pi it)$ ist reellwertig

Man verifiziert, daß $\theta(x,4\pi it)\in\mathbb{R}$. Denn es ist

$$\theta(x,4\pi it) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\underbrace{\exp\left[-4\pi^2k^2t\right]}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{\exp\left[2\pi ikx\right]}_{\in\mathbb{C}} \tag{18}$$

Mit der Eulerschen Formel also

$$\theta(x, 4\pi it) = 1 + 2\sum_{k>0} \exp[-4\pi^2 k^2 t] cos[2\pi kx] \in \mathbb{R} \tag{19}$$

2.3 Nachweis von $\theta(x, 4\pi it)$ als Fundamentallösung

Man rechnet nach, daß $\theta(x, 4\pi it)$ für $t > 0$ die Differentialgleichung $\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2 = 0$ löst. Denn es ist:

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(x, 4\pi it) = 2\sum_{k>0} -4\pi^2 k^2 \exp[-4\pi^2 k^2 t] cos[2\pi kx] = \frac{\partial}{\partial x^2}\theta(x, 4\pi it). \tag{20}$$

Zur normalen Konvergenz der gliedweise differenzierten Ableitung der Thetafunktion in (20) bemerkt man, daß

$$\begin{aligned} & 2\sum_{k>0} |-4\pi^2 k^2 \exp[-4\pi^2 k^2 t] \cos[2\pi kx]| \\ \leq \quad & 2\sum_{k>0} 4\pi^2 k^2 q^{k^2} < \infty \text{ mit } q = \exp[-4\pi^2 t] < 1. \end{aligned}$$

Damit löst auch $[f * \theta(\cdot, 4\pi it)](x)$ die Wärmeleitungsgleichung für $t > 0$, denn aufgrund der dominierten Konvergenz kann unter dem Integral differenziert werden.

Zum Nachweis der Randbedingung zeigt man $\theta(\cdot, 4\pi it) \overset{t\to 0}{\longrightarrow} \delta$ in der Topologie der Distributionen. Damit folgt $\int_0^1 f(x-y)\theta(y, 4\pi it)dy \overset{t\to 0}{\longrightarrow} f(x)$ für $f \in C^\infty$ mit Periode 1. Betrachte dazu für eine beliebige periodische Testfunktion ϕ:

$$\int_0^1 \phi(x)\theta(x, 4\pi it)dx \tag{21}$$

ϕ besitzt eine absolut und gleichmäßig konvergente Darstellung als Fourierreihe:

$$\phi(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m \exp[2\pi imx] \tag{22}$$

Damit folgt

$$\int_0^1 \phi(x)\theta(x, 4\pi it)dx \tag{23}$$

$$= \int_0^1 \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_m \exp[-4\pi^2 n^2 t] \exp[2\pi i(n+m)x]dx \tag{24}$$

$$= \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_m \exp[-4\pi^2 n^2 t] \underbrace{\int_0^1 \exp[2\pi i(n+m)x]dx}_{0 \text{ für } n+m\neq 0} \tag{25}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{-n} \exp[-4\pi^2 n^2 t] \tag{26}$$

$$\overset{t\to 0}{\longrightarrow} \phi(0) \tag{27}$$

wegen $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n = \phi(0)$ und der gleichmäßigen Konvergenz von $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{-n} \exp[-4\pi^2 n^2 t]$ auf $\mathbb{R}_0^+$.

Das zeigt $\theta(\cdot, 4\pi it) \overset{t\to 0}{\longrightarrow} \delta$ und damit gilt

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to 0}[f * \theta(\cdot, 4\pi it)](x) \\
=&\lim_{t\to 0}\int f(x-y)\theta(y, 4\pi it)dy \\
=&\lim_{t\to 0}\int \tilde{f}(y)\theta(y, 4\pi it)dy \qquad \text{mit } \tilde{f}(y) = f(x-y) \\
=&\delta(\tilde{f}) \\
=&\tilde{f}(0) \\
=&f(x)
\end{aligned}
$$

3 Jacobische Thetatransformationsformel

Lemma 3.1.1. *Jede in einem Parallelstreifen $D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : a < y < b\}$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$ analytische Funktion f mit Periode 1 läßt sich in eine normal konvergente Fourierreihe $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \exp[2\pi inz]$ entwickeln. Dabei sind die Fourierkoeffizienten gegeben durch $a_n = \int_0^1 f(z)\exp[-2\pi inz]dx$ mit $\Im(z) \in (a, b)$ beliebig.*

Beweis. Man zeigt zunächst, daß es eine analytische Abbildung $g : R \longrightarrow \mathbb{C}$ gibt, so daß $f(z) = g(\exp[2\pi iz])$ gilt, wobei $R = \{z \in \mathbb{C} : \exp[-2\pi i] < |z| < \exp[-2\pi a]\}$ das Ringgebiet bezeichne, welches das Bild von D unter der Abbildung $q : \quad z \longmapsto \exp[2\pi iz]$ ist. Man definiert $g(q(z)) := f(z)$. Das ist wohldefiniert, denn es ist $q(z) = q(z')$ genau dann, wenn $z - z' \in \mathbb{Z}$ und dann ist $f(z) = f(z')$.
Zum Nachweis, daß g analytisch ist, stellt man fest, daß die Abbildung q lokal konform ist, also auch ihre Umkehrabbildung analytisch ist. Wegen $q' \neq 0$ liefert nämlich der reelle Umkehrsatz zunächst, daß q als Abbildung von $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ lokal ein $C^\infty-$Diffeomorphismus ist. Da die Menge der invertierbaren $\mathbb{C}-$linearen Abbildungen eine Gruppe bildet, ist die Ableitung der Umkehrabbildung komplex linear, die Umkehrabbildung also analytisch. Damit ist g lokal als Kompositum analytischer Abbildungen gegeben, also selbst analytisch.
Es läßt sich die auf dem Kreisring R analytische Abbildung g in eine normal konvergente Laurentreihe entwickeln, nämlich:

$$g(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \tag{28}$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = \exp[-2\pi y], y \in (a;b)} \frac{g(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \tag{29}$$

$$= \int_0^1 \frac{g(\exp[2\pi iz]) \exp[2\pi iz]}{\exp[2\pi iz]^{n+1}} dx \tag{30}$$

$$= \int_0^1 \frac{g(\exp[2\pi iz])}{\exp[2\pi inz]} dx \tag{31}$$

$$= \int_0^1 f(z) \exp[-2\pi inz] dx \tag{32}$$

durch die Substitution $\zeta = \exp[2\pi iz]$ mit $z = x + iy$, $y \in (a;b)$.

□

Lemma 3.1.2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[\pi izu^2] du = \sqrt{\frac{z}{i}}^{-1}, \quad z \in \mathbb{H}$$

Beweis. Zeige zunächst, daß $z \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\pi izu^2] du$ und $z \longmapsto \sqrt{\frac{z}{i}}^{-1}$ in $\mathbb{H}$ analytisch sind. Für $z \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\pi izu^2] du$ genügt es zu zeigen, daß für jedes $a > 0$ die Funktion $z \longmapsto \exp[\pi izu^2]$ auf $\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > a\}$ eine integrierbare Majorante besitzt. Diese ist $\exp[\pi iau^2]$.

Die Funktion $z \longmapsto \sqrt{\frac{z}{i}}$ mit $\sqrt{\frac{z}{i}} := \exp[\frac{1}{2} \log \frac{z}{i}]$, welche über den Hauptzweig des Logarithmus definiert wird, ist analytisch für $z \in \mathbb{H}$.
Man zeigt die Gleichheit der Funktionen für $z = iy, \quad y > 0$. Mit dem Identitätssatz folgt dann die Gleichheit der analytischen Funktionen auf dem Gebiet $\mathbb{H}$. Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\pi yu^2] du = \sqrt{y}^{-1} \tag{33}$$

mit der Substitution $u\sqrt{\pi}\sqrt{y} = v$ äquivalent zu

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{y}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-v^2] dv = \sqrt{y}^{-1}. \tag{34}$$

Diese Gleichheit aber folgt aus dem Wert des Gaußintegrals $\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-v^2] dv = \sqrt{\pi}$.

□

Theorem 3.1.3 (Jacobische Thetatransformationsformel)**.**

$$\theta(w, -\frac{1}{z}) = \sqrt{\frac{z}{i}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp[\pi iz(n+w)^2] \quad w \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{H}$$

Beweis. Sei $z \in \mathbb{H}$. Betrachte $f(w) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp[\pi i z (n+w)^2], \quad w \in \mathbb{C}$. Zum Nachweis der normalen Konvergenz variiere w in einem Kompaktum K. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\Re(\pi i z (n+w)^2) \\
=& -\pi(n^2 \Im(z) + 2n\Im(zw) + \Im(zw^2)) \\
=& -\pi\Im(z) n^2 (1 + \frac{2}{n}\Im(zw) + \frac{\Im(zw^2)}{n^2})
\end{aligned}$$

Wegen der Beschränktheit von $w \in K$ folgt $\Re(\pi i z(n+w)^2) < -\pi\Im(z)\frac{n^2}{2}$ für fast alle $n \in \mathbb{Z}$. Also ist $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\exp[\pi i z(n+w)^2]|$ im wesentlichen beschränkt durch $\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{n^2} < \infty$ mit $q := \exp[-\frac{1}{2}\Im(z)\pi] < 1$. Daher ist die Reihendarstellung von f normal konvergent, f also analytisch.
Aufgrund von $f(w+1) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp[\pi i z((n+1)+w)^2] = f(w)$ hat f die Periode 1 und besitzt nach Lemma 3.1.1 eine normal konvergente Fourierentwicklung

$$f(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \exp[2\pi i n w] \tag{35}$$

mit

$$a_n = \int_0^1 f(w)\exp[-2\pi i n w]du, \quad w = u + iv, v \in \mathbb{R} \text{ beliebig.} \tag{36}$$

$$a_n = \int_0^1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp[\pi i z(n+w)^2 - 2\pi i n w]du \tag{37}$$

Vertauschung von Integration und Summation sowie die Substitution $u + n = u$ liefern

$$a_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} \exp[\pi i z w^2 - 2\pi i n w]du \tag{38}$$

wegen der Periodizität der Exponentialfunktion.

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\pi i z w^2 - 2\pi i n w]du \tag{39}$$

Quadratische Ergänzung $zw^2 - 2nw = z(w - \frac{n}{z})^2 - \frac{n^2}{z}$ gibt

$$a_n = \exp[-\pi i \frac{n^2}{z}] \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\pi i z(w - \frac{n}{z})^2]du \tag{40}$$

Wähle nun v so, daß $w - \frac{n}{z} \in \mathbb{R}$, also $w - \frac{n}{z} = u + k \in \mathbb{R}$ für ein $k \in \mathbb{R}$. Eine weitere Substitution $u \longmapsto u - k$ liefert dann

$$a_n = \exp[-\pi i \frac{n^2}{z}] \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\pi i z u^2]du \tag{41}$$

Mit Lemma 3.1.2 ist dann

$$a_n = \exp[-\pi i \frac{n^2}{z}] \sqrt{\frac{z}{i}}^{-1} \tag{42}$$

und damit

$$f(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp[\pi i n^2 (-\frac{1}{z})] \sqrt{\frac{z}{i}}^{-1} \exp[2\pi i n w] \tag{43}$$

$$= \theta(w, -\frac{1}{z}) \sqrt{\frac{z}{i}}^{-1} \tag{44}$$

□

3.2 Zusammenhang zwischen $\theta(x, 4\pi it)$ und dem Gaußkern $K(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp[\frac{-x^2}{4t}]$

Proposition 3.2.1. *Für $f \in C^\infty$ mit Periode 1 ist*

$$[f * \theta(\cdot, 4\pi it)](x) = [f * K(\cdot, t)](x), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Beweis. Mittels der Thetatransformationsformel 3.1.3 (setze $w = y$ und $z = \frac{i}{4\pi t}$) stellt man fest:

$$\theta(y, 4\pi it) \tag{45}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp[\pi i \frac{i}{4\pi t}(n+y)^2] \tag{46}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp[-\frac{(n+y)^2}{4t}] \tag{47}$$

Damit folgt

$$[f * \theta(\cdot, 4\pi it)](x) \tag{48}$$

$$= \int_0^1 f(x-y)\theta(y, 4\pi it) dy \tag{49}$$

Mit der Substitution $n + y = v$ und der Periodizität von f ergibt sich :

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(x - v + n) \exp[-\frac{-v^2}{4t}] dv \tag{50}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-v) \exp[-\frac{-v^2}{4t}] dv \tag{51}$$

$$= [f * K(\cdot, t)](x) \tag{52}$$

□

Literatur

[1] R. Busam, E. Freitag: *Funktionentheorie*. Springer, Berlin etc.,1993

[2] G. B. Folland *Fourier analysis and its applications*. The Wadsworth Brooks / Cole mathematics series, 1992

[3] G. B. Folland: *Introduction to partial differential equations*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1995

[4] D. Mumford: Tata Lectures on Theta I. Birkhäuser, Boston etc. 1983.