13.08.2010

Seminar: WE AlZAGK
Die Pellsche Gleichung
Dozenten: Gamst, Hortmann, Oeljeklaus
Name: Seban Albrecht
Matr.nr.: 2145244
Anschrift: Seehauserstr. 6a, 28879 Grasberg
Handy-Nr: 01755585525

problema bovinum des Archimedes

Seban Albrecht

Version 1, 05.11.2009
Version 2, 21.04.2010
Version 3, 13.08.2010

Wie viele Rinder hat der Sonnengott Helios?
Seien α der weißen, β der schwarzen, γ der scheckigen und δ der braunen Stiere Anzahlen, die Anzahl der Kühe sei gegeben wie die der Stiere, mit zusätzlichem Strich. Dann sind die Bedingungen an die Anzahl der Tiere wie folgt in zwei Teile aufgeteilt.

Teil 1

$$\alpha = \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\right)\beta + \delta \qquad \alpha' = \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right)(\beta + \beta')$$

$$\beta = \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}\right)\gamma + \delta \qquad \beta' = \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}\right)(\gamma + \gamma')$$

$$\gamma = \left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7}\right)\alpha + \delta \qquad \gamma' = \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6}\right)(\delta + \delta')$$

$$\delta' = \left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7}\right)(\alpha + \alpha')$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta' \in \mathbb{N}$

Teil 2
„Wenn sich die weisshaarigen Stiere an Zahl den schwarzen sich mischten, standen sie genau gleichseitig nach Tiefe und Breite.“[1]
Das heißt:

$$\sqrt{\alpha + \beta} \in \mathbb{N} \text{ oder anders } \exists n \in \mathbb{N} \ : \ \alpha + \beta = n^2$$

„Die braunen dagegen und die scheckigen zu einem Ganzen vereinigt, standen in aufsteigender Form, von einem anfangend die Dreiecksfigur hervorbringend, ...“[2]
Das heißt:

$$\exists m \in \mathbb{N} \ : \ \gamma + \delta = 1 + 2 + 3 + ... + m = \frac{m(m+1)}{2} = \frac{(2m+1)^2 - 1}{8}$$

Falls es mehr als eine Lösung unter den Bedingungen von Teil 1 und 2 gibt, so stellt die kleinste Lösung die Größe der Herde des Sonnengottes Helios dar. Das heißt:

$$\text{Sei } \{\sigma_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \alpha_i', \beta_i', \gamma_i', \delta_i') |\ \sigma_i \text{ ist Lösung von Teil 1 und 2}\}, \text{ wobei } i \in I \text{ und } \sigma_i \in \mathbb{N}^8$$

$$\text{Dann ist die Größe der Herde } H := min_{i \in I}(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \delta_i + \alpha_i' + \beta_i' + \gamma_i' + \delta_i')$$

[1] [1] S.131, 8.Gleichung
[2] [1] S.131, 9.Gleichung

Lösung Teil 1:
Die allgemeine Lösung der ersten drei Gleichungen ist:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2226 \\ 1602 \\ 1580 \\ 891 \end{pmatrix} * t \quad , \text{wobei } t \in \mathbb{N}$$

Nach den letzten vier Gleichungen kann t nur eine Lösung aller Gleichungen sein, wenn $t = 4657 * s$ mit $s \in \mathbb{N}$. So erhält man folgende Lösung:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2226 \\ 1602 \\ 1580 \\ 891 \end{pmatrix} * 4657 * s \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \\ \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.206.360 \\ 4.893.246 \\ 3.515.820 \\ 5.439.213 \end{pmatrix} * s \quad , \text{wobei } s \in \mathbb{N}$$ [3]

Also ist die Größe der Herde mindestens (für $s = 1$): $H = 50.389.082$

Lösung Teil 2:

$$\text{Bedingung: } \alpha + \beta = n^2 \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt:} \quad \alpha + \beta &= (10.366.482 + 7.260.514) * s \\ &= (2226 + 1602) * 4657 * s \\ &= 3828 * 4657 * s \\ &= 2^2 * 3 * 11 * 29 * 4657 * s \end{aligned}$$

Da 3, 11 und 4657 Primzahlen sind, kann $\alpha + \beta$ nur eine Quadratzahl sein, wenn s von folgender Form ist (und so die Primfakoren zu einer Quadratzahl ergänzt.):

$$s = 3 * 11 * 29 * 4657 * w^2 \text{ ,wobei } w \in \mathbb{N}$$

Damit ist die, bis jetzt, kleinste Lösung mit $\underline{w = 1}$ gefunden. Also gilt:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \\ \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2226 * 4657 \\ 1602 * 4657 \\ 1580 * 4657 \\ 891 * 4657 \\ 7.206.360 \\ 4.893.246 \\ 3.515.820 \\ 5.439.213 \end{pmatrix} * s = \begin{pmatrix} 2226 * 4657 \\ 1602 * 4657 \\ 1580 * 4657 \\ 891 * 4657 \\ 7.206.360 \\ 4.893.246 \\ 3.515.820 \\ 5.439.213 \end{pmatrix} * 3 * 11 * 29 * 4657 = \begin{pmatrix} 46.200.808.287.018 \\ 33.249.638.308.986 \\ 32.793.026.546.940 \\ 18.492.776.362.863 \\ 32.116.937.723.640 \\ 21.807.969.217.254 \\ 15.669.127.269.180 \\ 24.241.207.098.537 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4,6 \\ 3,3 \\ 3,3 \\ 1,8 \\ 3,2 \\ 2,2 \\ 1,6 \\ 2,4 \end{pmatrix} * 10^{13}$$

Also ist die Größe der Herde mindestens: $H = 224.571.490.814.418 \approx 2,2 * 10^{14}$

Ein kleiner Vergleich an dieser Stelle:
Die gesamte Landoberfläche der Erde liegt bei etwa 148.9 $Mio\ km^2$ (also bei $1.489 * 10^8\ km^2$). Nehmen wir an, dass eines dieser Tiere nur 2 m^2 ($0,000002\ km^2 = 2 * 10^{-6}\ km^2$) benötigt, so würden alle Tiere einen Platz von etwa ($2.2 * 10^{14} * 2 * 10^{-6} =$)$4.4 * 10^8$ benötigen. Damit ist der Landteil der Erde schon überfüllt. Die Gesamtoberfläche wäre aber, mit etwa 510 $Mio\ km^2$, gerade noch groß genug.

$$\text{Bedingung: } \exists m \in \mathbb{N} \ : \ \gamma + \delta = 1 + 2 + 3 + ... + m = \frac{m\,(m+1)}{2} = \frac{(2m+1)^2 - 1}{8}$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt:} \quad \gamma + \delta &= (7.358.060 + 4.149.387) * s \\ &= (1580 + 891) * 4657 * s \\ &= 2471 * 4657 * s \\ &= 7 * 353 * 4657 * s \\ &= 7 * 353 * 4657 * 3 * 11 * 29 * 4657 * w^2 \end{aligned}$$

[3] Vgl. [2] S.184

Also gilt für die Bedingung auch folgende Formulierung:

(1) $$\underbrace{8*3*7*11*29*353*4657^2}_{=:d_v}*\underbrace{w^2}_{=:b_v^2}=\underbrace{(2m+1)^2}_{=:a_v^2}-1$$

(2) $$\Leftrightarrow a_v^2-d_v*b_v^2=1$$

Da das eine Pellsche Gleichung darstellt, wissen wir, dass unendlich viele Lösungen existieren.

Anmerkung bzw. Vorschau:
Beispiel (Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{13}$):

Sei nun $\zeta_0 := \sqrt{13}$, dann bildet man a_n und ζ_n folgendermaßen: $a_n := \lfloor \zeta_n \rfloor$ und $\zeta_{n+1} := \frac{1}{\zeta - a_n}$. Damit ist $a_0 = 3$.

$$\zeta_1=\frac{1}{\sqrt{13}-3}=\frac{\sqrt{13}+3}{4}=1+\frac{\sqrt{13}-1}{4}\implies a_1=1,\ \frac{1}{\zeta_2}=\frac{\sqrt{13}-1}{4}$$

$$\zeta_2=\frac{4}{\sqrt{13}-1}=\frac{\sqrt{13}+1}{3}=1+\frac{\sqrt{13}-2}{3}\implies a_2=1,\ \frac{1}{\zeta_3}=\frac{\sqrt{13}-2}{3}$$

$$\zeta_3=\frac{3}{\sqrt{13}-2}=\frac{\sqrt{13}+2}{3}=1+\frac{\sqrt{13}-1}{3}\implies a_3=1,\ \frac{1}{\zeta_4}=\frac{\sqrt{13}-1}{3}$$

$$\zeta_4=\frac{3}{\sqrt{13}-1}=\frac{\sqrt{13}+1}{4}=1+\frac{\sqrt{13}-3}{4}\implies a_4=1,\ \frac{1}{\zeta_5}=\frac{\sqrt{13}-3}{4}$$

$$\zeta_5=\frac{4}{\sqrt{13}-3}=3+\sqrt{13}=6+\sqrt{13}-3\implies a_5=6,\ \frac{1}{\zeta_6}=\sqrt{13}-3 \text{ und } \zeta_6=\zeta_1$$

Statt $\sqrt{13}=3+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\sqrt{13}}}}}}$ schreibt man nun: $\sqrt{13}=(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5+\frac{1}{\zeta_6})=(a_0,\overline{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5})=$ $(3,1,1,1,1,3+\sqrt{13})=(3,\overline{1,1,1,1,6})$

Bemerkung 1:
Bricht man den Kettenbruch $(a_0,a_1,a_2,...)$ nach dem i-ten Glied ab $i\in\mathbb{N}$, so heißt $\frac{r_i}{s_i}=(a_0,a_1,\ldots,a_i)$ sein i-ter Näherungsbruch, dieser ist induktiv berechenbar:

$$r_i=a_ir_{i-1}+r_{i-2},\quad r_{-1}=1,\quad r_{-2}=0$$
$$s_i=a_is_{i-1}+s_{i-2},\quad s_{-1}=0,\quad s_{-2}=1$$

Bemerkung 2:
Besitzt der Kettenbruch für $\sqrt{d}$ eine minimale Periode mit der Länge l:

$$\sqrt{d}=(a_0,\overline{a_1,a_2,...,a_{l-1},a_l})$$

Berechnet man den $(l-1)$-ten Näherungsbruch r_{l-1}/s_{l-1} des Kettenbruchs für $\sqrt{d}$ und setzt:

Falls l gerade $a:=r_{l-1}$ und $b:=s_{l-1}$.

Falls l ungerade $a:=r_{l-1}^2+d*s_{l-1}^2$ und $b:=2*r_{l-1}*s_{l-1}$.

So ist (a,b) die Fundamentallösung der Pellschen Gleichung a^2-d*b^2.

Fortsetzung von Lösung Teil 2:
Mit Hilfe des Kettenbruchverfahrens kann nun, zumindest theoretisch, eine Lösung gefunden werden. Die Periodenlänge des Kettenbruches für $\sqrt{d_v}$ ist 203.254 , daher ist folgende Umformulierung sinnvoll.

$$(1) \Leftrightarrow \underbrace{2*3*7*11*29*353*4657}_{=:d} * \underbrace{(2*4657*w)^2}_{=:b^2} = \underbrace{(2m+1)^2}_{=:a^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow a^2 - d*b^2 = 1$$

Die Periodenlänge des Kettenbruches für $\sqrt{d} = \sqrt{4729494}$ ist lediglich 92. Somit ist die kleinste Lösung der Pellschen Gleichung:

$$a_1 = 109.931.986.732.829.734.979.866.232.821.433.543.901.088.049 \approx 10993 * 10^{40}$$

$$b_1 = 50549485234315033074477819735540408986340 \approx 5 * 10^{40}$$

Also gilt:

$$a_n + b_n\sqrt{4.729.494} = (a_1 + b_1\sqrt{4.729.494})^n \text{ ,wobei } n \in \mathbb{N}$$

und $\{a_n, b_n | n \in \mathbb{N}\}$ ist die Menge aller Lösungen.

Gesucht ist nun $n \in \mathbb{N}$, so dass b_n teilbar durch $2 * 4657$, dann ist offensichtlich $w := \frac{b_n}{2*4657}$ zu setzen und somit ist die Lösung (a_n, w).

„Notiz von Amthor“[4]:
Sei p ungerade Primzahl, die d nicht teilt,
seien (a_n, b_n) die Lösungen von $a^2 - db^2 = 1$, wobei $n \in \mathbb{N}$
und sei n die kleinste natürliche Zahl, für die p Teiler von b_n ist.

Dann gilt:
n teilt $p-1$, falls d ein quadratischer Rest modulo p ist,
bzw. n teilt $p+1$, falls d ein quadratischer Nichtrest modulo p ist.

Mit dem Quadratischem Reziprozitätsgesetz[5] erhält man sofort, dass 4.729.494 ein quadratischer Nichtrest modulo 4657 ist, also gilt:
Das kleinste $n \in \mathbb{N}$, für das b_n teilbar durch 4657 ist, ist Teiler von $4657 + 1 = 4658 = 2 * 17 * 137$.
Also $n \in \{1, 2, 17, 34, 137, 274, 2329, 4658\}$

Außerdem folgt aus $a_n + b_n\sqrt{d} = (a_1 + b_1\sqrt{d})^n$:

$$(a_1+b_1\sqrt{d})^{n+m} = (a_1+b_1\sqrt{d})^n(a_1+b_1\sqrt{d})^m = (a_n+b_n\sqrt{d})(a_m+b_m\sqrt{d}) = \underbrace{a_na_m + b_nb_md}_{=a_{n+m}} + \underbrace{(a_nb_m + a_mb_n)}_{=b_{n+m}}\sqrt{d}$$

Für $m = n$ folgt:

$$a_{n+m} = a_{2n} = a_n^2 + db_n^2 \underbrace{=}_{a_n^2 - db_n^2 = 1} 2a_n^2 - 1 \quad \text{und} \quad b_{2n} = 2a_nb_n$$

Für $m = 1$ folgt:

$$a_{n+1} = aa_n + dbb_n \text{ und } b_{n+1} = ab_n + ba_n$$

Damit berechnet man a_n und b_n für: $n = 1, 2, 4, 8, 16, 17, 34, 68, 136, 137, 274, 548, 1096, 2192$

Für $n = 1, 2, 17, 34, 137$ und 274 stellt sich heraus, dass b_n nicht teilbar durch 4657 ist.
Aber b_{2329} ist durch 4657 und 2 teilbar. Die Teilbarkeit durch 2 folgt aus den obigen Gleichungen.

Damit gilt $w := \frac{b_{2329}}{2*4657}$.

Nun setzen wir dieses w ein, so kennen wir die Größe der Herde des Sonnengottes Helios:

$$H \approx 7,76 * 10^{206.544}$$

Zur Veranschaulichung:
Um eine Vorstellung über die Größe der Zahl zu geben, folgende Beispiele.

Gehen wir von 50 Zeichen pro Zeile und 50 Zeilen pro Seite aus, dann haben auf einer Seite 2500 Zeichen

[4] Vgl. [3] Satz 4, 5
[5] Vgl. [3] S.9, Zeile 9

Platz. So würde die Darstellung der Summe oder einer der acht Größen über 82.5 Seiten beanspruchen. Also benötigt man für die vollständige Darstellung 742.5 Seiten.

Ein anderer Vergleich, sieht man den für uns sichtbaren Weltraum (Durchmesser gleicht in etwa dem des Milchstraßenringes) als eine Kugel mit einem Durchmesser von 7700 Lichtjahren, dann ist das Volumen dieser Kugel in Kubikmillimetern $\approx \frac{1}{6}\pi(76181 * 10^{18})^3 = 2315 * 10^{65}$.
In einen Kubikmillimeter passen etwa 50.000 Millionen Bakterien (der Sorte monas prodigiosa). Also würden in diese Kugel etwa 10^{79} dieser Tiere passen.
(Der Durchmesser müsste 11470 mal nacheinander millionenfach genommen werden, damit alle H Bakterien platz haben.)[6]

[6] Vgl. [1] S.170f

Literatur

[1] B. Krumbiegel und A. Amthor, Das Problema bovinum des Archimedes, Historisch-literarische Abteilung der Zeitschrift für Mathematik und Physik 25, 1880, 121-136 und 153-171

[2] H. W. Lenstra Jr., Solving the Pell Equation, Notices of the AMS 49, 2002, 182-192

[3] C. Grenzebach, AlZAGK-Seminar: Pellsche Gleichung: Kettenbruchverfahren und das Archimedische problema bovinum, 2002

[4] F. Schwarz, Wie viele Rinder hat der Sonnengott?, DMV-Mitteilungen 2/97, 1997, 13-18