Universität Bremen
Fachbereich 3
WiSe 2012
WE AlZAGK
Dozenten: Prof. Hortmann
Prof. Gamst

Ausarbeitung zum Vortrag

Variation eines Irrationalitätsbeweises von Fourier

(nach Waldschmidt 2008, Kapitel 1.2)
vom 17.01.2012

vorgelegt von:

Name:	Thomas Sievers
Studiengang:	Mathematik Diplom
Fachsemester:	11

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Frage, ob eine Zahl irrational ist, beschäftigt Mathematiker schon seit vielen Jahrhunderten. Schon um das 5. Jahrhundert v. Chr. entdeckte Hippasos von Metapont, vermutlich an einem Pentagramm, vielleicht auch an einem Quadrat, dass das Verhältnis von Seitenlänge zu Diagonale nicht durch ganze Zahlen darstellbar ist [vgl. Beu10, S. 56ff].

Für algebraische Zahlen, wie z.B. $\sqrt{2}$, können die Beweise vergleichsweise einfach geführt werden, indem man sich die Kettenbruchentwicklung der Zahl anschaut. Beispielsweise besitzt die Gleichung $x^2 - 2x - 1 = 0$ die Lösung $1 + \sqrt{2}$. Aus der Gleichung erhält man sofort die Kettenbruchdarstellung der Lösung:

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 2 + \frac{1}{x} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

Die Tatsache, dass die Kettenbruchentwicklung nicht abbricht, bedeutet, dass die Zahl $1 + \sqrt{2}$ irrational ist. Schon seit längerer Zeit ist bekannt, dass die Zahl e eine unendliche Kettenbruchentwicklung besitzt,

$$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}}}} = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots]$$

welche sich noch schöner als $e = [1; 0, 1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots]$ schreiben lässt. [Coh06] liefert hierfür z.B. einen vergleichsweise kurzen Beweis.
Ein durch seine Einfachheit bestechender Beweis wurde von Fourier im Jahre 1815 präsentiert. Dieser wird im Folgenden, den Ausführungen von [Wal08] folgend, vorgestellt. Dabei wird auch auf Ausführungen von Liouville aus dem Jahre 1844 eingegangen, die zeigen, dass die Argumente Fouriers weitergehende Folgerungen zulassen als zunächst angenommen.

Die Transzendenz von e wurde später von Hermite bewiesen. 4 Jahre später konnte von Lindemann gezeigt werden, dass sowohl die Zahl π als auch die Zahl e^α transzendent ist, sofern α eine algebraische Zahl ungleich Null ist.

1 e ist irrational

Die Zahl e kann bekanntlich durch eine Reihe dargestellt werden:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

Nun nehme man an, dass e eine rationale Zahl sei, d.h. sie kann durch einen gekürzten Bruch der Form $e = \frac{p}{q}$ dargestellt werden. Nun betrachte man die Differenz der Zahl e und ihrer Approximation durch die Reihendarstellung bis zum N-ten Glied:

$$e - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} = \frac{p}{q} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$$

Die Differenz ist sicher positiv.
Nun erweitere man die Gleichung mit dem Faktor $N!$:

$$N! \left(\frac{p}{q} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \right) =: k$$

Zunächst ist zu bemerken, dass $k \in \mathbb{N}, \quad k > 0$ für hinreichend großes N. Weiterhin gilt aber:

$$\begin{aligned}
N! \left(\frac{p}{q} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \right) &= N! \left(e - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \right) \\
&= N! \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \right) = N! \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \\
&= N! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(N+n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N!}{(N+n)!} \\
&= \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} + \frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)} + \dots \\
&\overset{N \geq 1}{<} \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 1 = 1
\end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$0 < k < 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

Dies stellt einen Widerspruch dar. Damit kann e keine rationale Zahl sein.
[Wal08] zeigt sehr kurz über eine untere Schranke der Binomialkoeffizienten, dass die rechte Seite der Gleichung durch $\frac{e-1}{N+1}$ abgeschätzt werden kann, damit geht sie für $N \to \infty$ gegen Null. Aus diesem Grund kann es sich auf der linken Seite auch nicht um eine natürlich Zahl handeln.

2 e ist nicht quadratisch irrational

Eine ähnliche Argumentation wird verwendet, um zu beweisen, dass die Zahl e nicht quadratisch irrational ist. Es soll gezeigt werden, dass e nicht eine Gleichung der Form $ae^2 + be + c = 0$ erfüllt, mit $a,c \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.
Dazu setze man, wie im vorherigen Abschnitt, einen Term an, in dem die Zahl e bzw. e^2 durch ihre Reihendarstellung bis zum N-ten Glied dargestellt wird:

$$\begin{aligned} N!(ae^2 + be + c) &\approx N!\left(c + b\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n!} + a\sum_{n=0}^{N}\frac{2^n}{n!}\right) \\ &= cN! + \sum_{n=0}^{N}(a2^n + b)\frac{N!}{n!} \end{aligned}$$

Die Reihe wurde an der Stelle N abgebrochen, und es gilt $ae^2 + be + c = 0$. Also muss für den Rest der Reihe R_N gelten:

$$cN! + \sum_{n=0}^{N}(a2^n + b)\frac{N!}{n!} + R_N = 0 \Leftrightarrow cN! + \sum_{n=0}^{N}(a2^n + b)\frac{N!}{n!} = -R_N$$

Also:

$$\begin{aligned} cN! + \sum_{n=0}^{N}(a2^n + b)\frac{N!}{n!} &= -\sum_{n=N+1}^{\infty}(a2^n + b)\frac{N!}{n!} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}(a2^{N+1+n} + b)\frac{N!}{(N+1+n)!} \end{aligned}$$

Die linke Seite der Gleichung stellt eine ganze Zahl dar. Die rechte Seite ist für $N \to \infty$ allerdings schwer abzuschätzen. Diesen Umstand kann man umgehen, indem man statt der Gleichung $ae^2 + be + c = 0$, die Gleichung $ae + b + ce^{-1} = 0$ betrachtet. Man erhält dann:

$$\begin{aligned} \underbrace{bN! + \sum_{n=0}^{N}(a + (-1)^n c)\frac{N!}{n!}}_{\in\mathbb{Z}} &= -\sum_{n=N+1}^{\infty}(a + (-1)^n c)\frac{N!}{n!} \qquad (*) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}(a + (-1)^{N+n} c)\frac{N!}{(N+n)!} \end{aligned}$$

Dieser Term geht nicht mehr gegen unendlich, sondern kann vielmehr abgeschätzt werden. Dazu betrachte man den Betrag:

$$\begin{aligned} &\left|\sum_{n=1}^{\infty}(a + (-1)^{N+n} c)\frac{N!}{(N+n)!}\right| \\ &\leq (|a| + |c|)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N!}{(N+n)!} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (|a| + |c|) \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} + \frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)} + \dots \right) \\
&\leq (|a| + |c|) \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)^2} + \frac{1}{(N+1)^3} + \dots \right) \\
&= (|a| + |c|) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(N+1)^k} \right) = (|a| + |c|) \left(\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(N+1)^k} \right) \\
&= (|a| + |c|) \left(\frac{1}{N+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{N+1}} \right) = \frac{|a| + |c|}{N} \\
&< 1 \text{ für } N > |a| + |c|
\end{aligned}
$$

Nun gilt aber, dass in Gleichung $(*)$ auf der linken Seite eine ganze Zahl steht. Damit ist klar, dass für hinreichend großes N $(N > |a| + |c|)$ gilt, dass:

$$
\sum_{n=1}^{\infty} (a + (-1)^{N+n} c) \frac{N!}{(N+n)!} = 0
$$

Nun lässt sich aber folgende Rekursionsformel für

$$
R_N = \sum_{n=1}^{\infty} (a + (-1)^{N+n} c) \frac{N!}{(N+n)!} = \sum_{n=N+1}^{\infty} (a + (-1)^n c) \frac{N!}{n!}
$$

herleiten, wenn man sich die Differenz $NR_{N-1} - R_N$ anschaut [vgl. Sie49, S. 2f]:

$$
\begin{aligned}
NR_{N-1} - R_N &= N \left(\sum_{n=N}^{\infty} (a + (-1)^n c) \frac{(N-1)!}{n!} \right) - \sum_{n=N+1}^{\infty} (a + (-1)^n c) \frac{N!}{n!} \\
&= \sum_{n=N}^{\infty} (a + (-1)^n c) \frac{N!}{n!} - \sum_{n=N+1}^{\infty} (a + (-1)^n c) \frac{N!}{n!} \\
&= (a + (-1)^n c) \frac{N!}{N!} = a + (-1)^n c
\end{aligned}
$$

Es gilt also: $NR_{N-1} - R_N = a + (-1)^n c$. Dies bedeutet aber, dass von den drei Termen R_{N-1},R_N und R_{N+1} mindestens einer ungleich Null sein muss, sofern nicht $a + c = 0$ und $a - c = 0$ gilt.

Damit ist aber auch sofort $b = 0$ und damit ein Widerspruch zur obigen Annahme konstruiert, und e ist keine quadratische Irrationalzahl.

3 $e^{\sqrt{2}}$ ist irrational

Im Beweis zur Irrationaliät von $e^{\sqrt{2}}$ folgt [Wal08] einem Hinweis von D.M. Masser. Zum Beweis der Irrationalität bedient man sich eines Tricks und betrachtet die Summe:

$$
e^{\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}(1 + (-1)^n)}{n!}
$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n/2}}{(2n)!} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(2n)!} =: \vartheta$$

Es ist ausreichend zu zeigen, dass $\vartheta \notin \mathbb{Q}$ ist. Denn ist $e^{\sqrt{2}} + e^{-\sqrt{2}} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, so ist auch $e^{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, wie sich durch Kontraposition beweisen lässt.

Die Argumentation läuft wieder ähnlich wie in Abschnitt 2. In diesem Falle multipliziert man ϑ mit $\frac{(2N)!}{2^N}$ und schaut sich wieder die Reihendarstellung bis zum N-ten Glied an:

$$\begin{aligned}
&\frac{(2N)!}{2^N}\vartheta - 2\sum_{n=0}^{N}\frac{(2N)!2^n}{2^N(2n)!}\\
&= \frac{(2N)!}{2^N}\vartheta - 2\sum_{n=0}^{N}\frac{(2N)!}{2^{N-n}(2n)!}\\
&= \frac{(2N)!}{2^N}2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(2n)!} - 2\sum_{n=0}^{N}\frac{(2N)!}{2^{N-n}(2n)!}\\
&= 2(2N)!\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{2^N(2n)!} - \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^{N-n}(2n)!}\right)\\
&= 2(2N)!\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^{N-n}(2n)!}\right)\\
&= 2(2N)!\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{N-(N+1+n)}(2(N+1+n))!}\right)\\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2N)!}{2^{-1-n}(2N+2n+2)!}\\
&= 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(2N)!}{(2N+2n+2)!}\\
&= 2\left(\frac{2^1}{(2N+2)(2N+1)} + \frac{2^2}{(2N+4)(2N+3)(2N+2)(2N+1)} + \dots\right)\\
&= 2\left(\frac{1}{(N+1)(2N+1)} + \frac{1}{(N+2)(2N+3)(N+1)(2N+1)} + \dots\right)\\
&\overset{N\geq 1}{<} 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots\right)\\
&= 2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}\right) = 2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n} - 1\right) = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Wenn man sich nun wieder überzeugen kann, dass $\frac{(2N)!}{2^N}\vartheta - 2\sum_{n=0}^{N}\frac{(2N)!}{2^{N-n}(2n)!}$ eine natürliche Zahl größer Null darstellt, so hat man erneut einen Widerspruch konstruiert, da diese Zahl zwischen 0 und $\frac{2}{3}$ liegen müsste. [Wal08] zeigt wieder, dass die rechte Seite sogar mit $N \to \infty$ gegen Null geht. Wobei an dieser Stelle die obige Abschätzung auch ausreichend ist.

Zum Beweis muss man zeigen, dass der Term $\frac{(2N)!}{(2n)!}$ für alle $0 \leq n \leq N$ eine natürliche Zahl ist. Dabei ist $\frac{(2N)!}{2^N}$ nur der Fall $n = 0$ von $\frac{(2N)!}{2^{N-n}(2n)!}$. Für $0 \leq n \leq N$ gilt, dass

$$\frac{(2N)!}{(2n)!} = (2N)(2N-1)(2N-2)\ldots(2n+2)(2n+1)$$

ein Produkt von $2(N-n)$ aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist. Von diesen sind $N-n$ Zahlen gerade. Also ist in dem Produkt auf jeden Fall der Faktor 2^{N-n} zu finden. Damit handelt es sich bei der genannten Summe immer um eine natürliche Zahl größer Null.

4 e^2 ist nicht quadratisch irrational

Es soll gezeigt werden, dass e^2 nicht eine Gleichung der Form $ae^4 + be^2 + c = 0$ erfüllt, mit $a,c \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Dazu betrachtet man analog zum vorherigen Abschnitt die Gleichung $ae^2 + b + ce^{-2} = 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} N!(ae^2 + b + ce^{-2}) &\approx N!\left(b + a\sum_{n=0}^{N}\frac{2^n}{n!} + c\sum_{n=0}^{N}\frac{(-2)^n}{n!}\right) \\ &= bN! + \sum_{n=0}^{N}(a + (-1)^n c)\frac{2^n N!}{n!} \end{aligned}$$

Die Reihe wurde an der Stelle N abgebrochen, und es gilt $ae^2 + b + ce^{-2} = 0$. Man erhält also:

$$\begin{aligned} bN! + \sum_{n=0}^{N}(a + (-1)^n c)\frac{2^n N!}{n!} &= -\sum_{n=N+1}^{\infty}(a + (-1)^n c)\frac{2^n N!}{n!} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}(a + (-1)^{N+1+n} c)\frac{2^{N+1+n} N!}{(N+1+n)!} \\ &= -2^N\sum_{n=0}^{\infty}(a + (-1)^{N+1+n} c)\frac{2^{n+1} N!}{(N+1+n)!} \\ \Leftrightarrow \frac{bN!}{2^{N-1}} + \sum_{n=0}^{N}(a + (-1)^n c)\frac{2^n N!}{2^{N-1} n!} &= -2\sum_{n=0}^{\infty}(a + (-1)^{N+1+n} c)\frac{2^{n+1} N!}{(N+1+n)!} \end{aligned}$$

Aus Gründen, die sich erst später zeigen, möchte man höchstens 2^{N-1} im Nenner stehen haben.
Zunächst kann wieder gezeigt werden, dass die rechte Seite für ein hinreichend großes N verschwindet. Dazu betrachte man wieder:

$$\left|-2\sum_{n=0}^{\infty}(a + (-1)^{N+1+n} c)\frac{2^{n+1} N!}{(N+1+n)!}\right| \leq 2(|a| + |c|)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1} N!}{(N+1+n)!}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2(|a|+|c|)\left(\frac{2^1}{N+1}+\frac{2^2}{(N+1)(N+2)}+\ldots\right) \\
&< 2(|a|+|c|)\left(\frac{2^1}{N+1}+\frac{2^2}{(N+1)^2}+\ldots\right) \\
&= 2(|a|+|c|)\left(\frac{1}{1-\frac{2}{N+1}}-1\right) = 4\frac{|a|+|c|}{N-1} \qquad (**)
\end{aligned}
$$

Wenn nun die linke Seite der Gleichung eine ganze Zahl ist, so ist wiederum klar, dass für hinreichend großes N die gesamte Gleichung identisch Null ist, was wieder zu $a = c = 0$ führt. Es bleibt also zu zeigen, dass die linke Seite eine ganze Zahl ist bzw. sein kann. Fakt ist nämlich, dass die linke Seite nicht für alle N eine ganze Zahl ist. Es kann aber gezeigt werden, dass es unendlich viele N gibt, so dass die Bedingung erfüllt ist. Also gibt es auch N, die die Bedingung $(**)$ erfüllen und für die die linke Seite eine ganze Zahl ist. Hier klärt sich auch auf, warum nur 2^{N-1} im Nenner steht. Zum Beweis:
Es soll gezeigt werden, dass $\frac{2^n N!}{2^{N-1} n!} = \frac{N!}{2^{N-1-n} n!}$ für $0 \leq n \leq N$ für unendlich viele N eine ganze Zahl ist (der Fall $n = 0$ ist der Koeffizient vor b).
Zum Beweis benötigt man den Satz von Legendre. Dieser besagt, dass der Faktor p in der Primfaktorzerlegung von $N!$, die Zahl $N!$ genau

$$v_p(n!) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^j}\right]$$

mal teilt. Dies kann abgeschätzt werden:

$$v_p(n!) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^j}\right] \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{n}{p^j} = n\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p^j} - 1\right) = n\left(\frac{1}{1-1/p} - 1\right) = \frac{n}{p-1}$$

Und speziell $v_2(n!) \leq n$.
Setzt man auf der anderen Seite $N = p^t$, so erhält man:

$$v_p(N!) = p^{t-1} + p^{t-1} + \ldots + p + 1 = \frac{p^t - 1}{p-1} = \frac{N-1}{p-1}$$

Setzt man daher $p = 2$ so erkennt man, dass $v_2(2^t!) = 2^t - 1 = N - 1$ ist. Damit teilt 2^{N-1} die Zahl $N!$. Zusammen erhält man damit für $0 \leq n \leq N$:

$$v_2(N!/n!) \geq N - 1 - n$$

Also teilt 2^{N-1-n} den Faktor $\frac{N!}{n!}$.
Also gibt es unendlich viele Zahlen N (die Zweierpotenzen), für die $\frac{N!}{2^{N-1-n} n!}$ eine natürliche Zahl ist.

5 $e^{\sqrt{3}}$ ist irrational

In einem letzten Schritt kann noch die Irrationalität von $e^{\sqrt{3}}$ gezeigt werden. Man definiert wieder $\vartheta := e^{\sqrt{3}} + e^{-\sqrt{3}}$ und geht erneut von einer abbrechenden Summe aus:

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{3}} + e^{-\sqrt{3}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n/2}(1+(-1)^n)}{n!} \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n/2}}{(2n)!} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!} \end{aligned}$$

Daraus erhält man:

$$\begin{aligned} &\frac{(2N)!}{3^{N-1}}\vartheta - 2\sum_{n=0}^{N} \frac{(2N)!3^n}{3^{N-1}(2n)!} = \frac{(2N)!}{3^{N-1}}\vartheta - 2\sum_{n=0}^{N} \frac{(2N)!}{3^{N-n-1}(2n)!} \\ &= \frac{(2N)!}{3^{N-1}} 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!} - 2\sum_{n=0}^{N} \frac{(2N)!3^n}{3^{N-1}(2n)!} \\ &= 2\frac{(2N)!}{3^{N-1}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{N} \frac{3^n}{(2n)!} \right) \\ &= 2\frac{(2N)!}{3^{N-1}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{N+1+n}}{(2(N+1+n))!} \right) \\ &= 18\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(2N)!}{(2N+2+2n)!} \end{aligned}$$

Die rechte Seite geht wieder gegen Null für hinreichend großes N, wie analog zu den vorhergegangenen Beweisen gezeigt werden kann. Nun muss man wieder erreichen, dass auf der linken Seite eine ganze Zahl steht. Dies ist wie im vorherigen Kapitel nicht für alle N, aber für unendlich viele N der Fall, wie gezeigt werden kann, wenn man $N = \frac{3^t+1}{2}$ wählt. Denn es gilt mit $p = 3$, dass:

$$\begin{aligned} v_3((2N)!) &= \left[\frac{3^t+1}{3}\right] + \left[\frac{3^t+1}{3^2}\right] + \dots \\ &= \left[\frac{3^t}{3} + \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{3^t}{3^2} + \frac{1}{9}\right] + \dots \\ &= 3^{t-1} + 3^{t-2} + \dots + 3 + 1 \\ &= \frac{3^t-1}{3-1} = \frac{3^t-1}{2} = \frac{3^t+1}{2} - 1 = N-1 \end{aligned}$$

Außerdem gilt wieder: $v_3((2n)!) \leq \frac{2n}{3-1} = n$. Damit gilt für $0 \leq n \leq N$:

$$v_3\left(\frac{(2N)!}{(2n)!}\right) \geq N - n - 1$$

Also folgt 3^{N-n-1} teilt $\frac{(2N)!}{(2n)!}$.

Schlussbemerkungen

Alle gezeigten Beweise funktionieren nach dem gleichen Schema. Man schaut sich die Reihenentwicklung der betreffenden Zahl an und bricht diese an einer Stelle ab und erweitert diesen Term mit einer hinreichend großen Zahl N, sodass man eine ganze Zahl erhält. Anschließend schaut man sich den Rest der Reihentwicklung an und zeigt, dass dieser für hinreichend großes N gegen Null geht. So erhält man eine Gleichung, in der auf der einen Seite eine ganze Zahl steht und auf der anderen Seite eine Zahl, die sich echt zwischen Null und Eins bewegt. Auf diese Weise ergibt sich ein Widerspruch.

Man könnte erwarten, dass sich dieses Schema immer weiter, z.B. für e^3 benutzen lassen könnte. Dies scheint aber nicht der Fall zu sein. Ein Grund hierfür hat sich bereits in den beiden letzten Abschnitten angedeutet. In diesen Abschnitten musste vergleichsweise aufwendig gezeigt werden, dass es unendlich viele Zahlen N gibt, für die die erweiterte, abgebrochene Reihendarstellung eine ganze Zahl darstellt. Diese Konstruktion scheint schon für e^3 nicht mehr möglich zu sein.

Literatur

[Beu10] Albrecht BEUTELSPACHER. *Beutelspachers kleines Mathematikum: Die 101 wichtigsten Fragen und Antworten zur Mathematik*. C.H.Beck, 2010 (siehe S. 1).

[Coh06] Henry COHN. „A short proof of the simple continued fraction expansion of e“. *ArXiv Mathematics e-prints* (Jan. 2006). eprint: `arXiv:math/0601660` (siehe S. 1).

[Sie49] Carl Ludwig SIEGEL. *Transcendental numbers*. Princeton University Press, 1949 (siehe S. 4).

[Wal08] Michel WALDSCHMIDT. *Introduction to Diophantine methods irrationality and trancendence*. 2008. URL: `http://www.math.jussieu.fr/~miw/articles/pdf/IntroductionDiophantineMethods.pdf` (siehe S. 1, 2, 4, 5).