Differenzierbare Homomorphismen von Matrizen-Gruppen

Referat über das 3.Kapitel des Buches:
Matrix Groups von Morton L. Curtis

Von: Lars Naujok
Gehalten am: 12.05.2003

A : Kurven im Vektorraum

In diesem Abschnitt wird die Dimension einer Matrizen-Gruppe definiert und behandelt. Wir werden sehen, daß die Dimension einer Matrizen-Gruppe die Dimension vom Raum des Tangential-Vektors ist. Dazu sind ein paar Vorüberlegungen nötig:

Definition: V sei ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, (a,b)$\in\mathbb{R}$ ein Intervall.
1) Eine stetige Abbildung γ: (a,b)$\to$ V heisst *Kurve* in V.
2) Sei c $\in$ (a,b), h $\in \mathbb{R}$, dann ist γ *differenzierbar* in c, wenn

$$\lim_{h\to 0}((\gamma(c+h)-\gamma(c))*\frac{1}{h}) = \gamma'(c)$$

existiert. (Wir verwenden zur Definition des Grenzwertes die euklidische Norm.)
Wenn dieser Grenzwert existiert, dann ist γ'(c) ein Vektor in V und wird *Tangential-Vektor* zu γ in γ(c) genannt.
3) Wir wählen eine Basis von V. Diese stellt γ als $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ dar mit $\gamma_i \in \mathbb{R}$, somit existiert γ'(c) genau dann, wenn jedes γ_i'(c), i=1,...,n existiert. Also ist

$$\gamma'(c) = (\gamma_1'(c), \ldots, \gamma_n'(c))$$

Nun wollen wir zeigen, dass $M_n(\mathbb{R})$, $M_n(\mathbb{C})$ und $M_n(\mathbb{H})$ relle Vektorräume mit den Dimensionen n^2, $2n^2$ und $4n^2$ sind:

Bezeichnung: Sei G eine Matrizen-Gruppe in $M_n(\mathbb{K})$, mit $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$, (a,b) $\in \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine *Kurve* in G ist eine Kurve in $M_n(\mathbb{K})$ mit allen Werten γ(u) in G, für u $\in$ (a,b).

Definition:

Sei G eine Matrizen-Gruppe in $M_n(\mathbb{K})$, mit $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$, (a,b) $\in \mathbb{R}$ ein Intervall, $\gamma, \sigma : (a,b) \to G$ Kurven, dann ist die *Produktkurve* definiert als:

$$(\gamma\sigma)(u) = \gamma(u)\sigma(u), u \in (a,b)$$

Satz 1

Sei G eine Matrizen-Gruppe in $M_n(\mathbb{K})$, mit $\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$, (a,b) $\in \mathbb{R}$ ein Intervall, γ,σ: (a,b) $\to$ G Kurven, beide differenzierbar in c $\in$ (a,b). Dann ist die Produktkurve $\gamma\sigma$ differenzierbar in c mit

$$(\gamma\sigma)'(c) = \gamma(c)\sigma'(c) + \gamma'(c)\sigma(c)$$

Beweis: Sei $\gamma(u) = (\gamma_{ij}(u))$,$\sigma(u) = (\sigma_{ij}(u))$ mit u $\in$ (a,b).
γ_{ij} ist also der ij-te Eintrag in der Matrix, die γ beschreibt. Dann ist:

$$(\gamma\sigma)(u) = \sum_k \gamma_{ik}(u)\sigma_{kj}(u)$$

Somit also:

$$(\gamma\sigma)'(u) = (\sum_k \gamma_{ik}'(u)\sigma_{kj}(u) + \gamma_{ik}(u)\sigma_{kj}'(u)) = \gamma'(u)\sigma(u) + \gamma(u)\sigma'(u)$$

□

Satz 2

Sei G eine Matrizen-Gruppe in $M_n(\mathbb{K})$, mit $\mathbb{K} = \mathbb{R},\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$, (a,b) $\in \mathbb{R}$ ein Intervall. T sei nun die Menge aller Tangential-Vektoren in I von differenzierbaren Kurven $\gamma : (a, b) \to$ G mit 0 $\in$ (a,b) und $\gamma(0)$=I, wobei I die Identität, die Einheitsmatrix darstellt. Dann ist T ein Untervektorraum von $M_n(\mathbb{K})$.

Beweis: Dazu muss T folgende Eigenschaften haben: 1) 0 $\in$ T , 2) T muss abgeschlossen gegenüber der Addition sein , 3) T muss abgeschlossen gegenüber der Skalar-Multiplikation sein !
ad 1): klar, da $\gamma(t) =$ I für t $\in$ (a,b), also ist $\gamma'(0)$=0
ad 2): Dazu benutzen wir die Produktkurve, denn es gilt: $(\gamma\sigma)(0) = \gamma(0)\sigma(0) =$II=I. Die Produktkurve erfüllt also die Bedingungen. Wenn $\gamma'(0)$ und $\sigma'(0)$ in T sind, gilt:

$$(\gamma\sigma)'(0) = \gamma'(0)\sigma(0) + \gamma(0)\sigma'(0) = \gamma'(0) + \sigma'(0)$$

Also ist T abgeschlossen gegenüber der Addition.
ad 3): Sei $\gamma'(0) \in T$ und r $\in \mathbb{K}$ (das bedeutet, dass man r hinreichend klein wählen muss, um den Defintionsbereich der Kurve nicht zu verlassen !) und $\sigma(u) = \gamma(ru)$ mit u $\in$ (a,b), dann gilt:
$\sigma(0) = \gamma(0) =$ I, σ ist differenzierbar mit $\sigma'(0) = r\gamma'(0)$.
Also ist T auch abgeschlossen gegenüber der Skalarmultiplikation, somit ist T ein Untervektorraum von $M_n(\mathbb{K})$.

□

Bemerkung: T ist endlichdimensional, da $M_n(\mathbb{K})$ endlichdimensional ist !

Defintion:

Sei G eine Matrizen-Gruppe in $M_n(\mathbb{K})$, mit $\mathbb{K}= \mathbb{R},\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$, (a,b) $\in \mathbb{R}$ ein Intervall. Die *Dimension* der Matrizen-Gruppe ist dann die Dimension des Vektorraums T (der Menge der Tangential-Vektoren in I von Kurven γ: (a,b) $\to$ G).

Beispiel 1 : U(1) $\cong$ Menge aller komplexen Zahlen der Länge 1, dann hat U(1) die Dimension 1
Denn: Es gibt nur eine einzige Kurve, die U(1) beschreibt, nämlich die Kurve γ, die den Einheitskreis zeichnet. Daher existiert genau ein Tangential-Vektor in I, somit hat U(1) die Dimension 1.

Beispiel 2 : Sp(1) $\cong$ Menge aller Quaternionen der Länge 1, dann: dim Sp(1) =3
Denn: Sei γ:(a,b) $\to$ Sp(1) eine glatte Kurve mit $\gamma(0)$=1 (glatt bedeutet stetig differenzierbar). Dann ist $\gamma'(0)$ ein Element von $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$. Dazu zeigen wir zunächst, dass $\gamma'(0)$ in dem aufgespannten Raum von i,j,k liegt, also ist $\gamma'(0)$ ein Quaternion mit rellem Nullteil. Sei $\gamma(t)$=x(t) + iy(t) + jz(t) + kw(t) mit t $\in$ (a,b) und x(0)=1, y(0)=0, z(0)=0, w(0)=0. x(0) ist somit ein Maximum der Funktion x, so dass gilt: $\gamma'(0)$= 0 + i$y'(0)$ + j$z'(0)$ + k$w'(0)$, wie gefordert, also der Dimension 3 ist.
Umgekehrt: Sei q=iμ + jν + kλ ein Quaternion mit reelem Nullteil. Nun muss also eine Kurve existieren, so dass $\gamma'(0)$=q gilt, also die Dimension 3 hat.

$$\gamma(t) = \sqrt{1 - \sin^2 \mu t - \sin^2 \nu t - \sin^2 \lambda t} + i \sin \mu t + j \sin \nu t + k \sin \lambda t$$

ist so eine Kurve, mit t $\in$ [0,ε), also für kleine t. Hier muss man nur die Ableitung machen, dann erhält man q.

Beispiel 3 : dim Gl(n,$\mathbb{R}$)=n^2
Dazu benutzen wir die Determinaten-Funktion det: $M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, die stetig ist und det(I) = 1. Um die Identität I existiert eine ε-Kugel in $M_n(\mathbb{R})$, so dass für jede Matrix A in dieser ε-Kugel gilt: det A $\neq$ 0; das heisst A $\in$ Gl(n,$\mathbb{R}$). Wenn v nun ein Vektor in $M_n(\mathbb{R})$ ist, d.h. v ist eine Matrix, definieren wir dazu eine Kurve σ in $M_n(\mathbb{R})$ durch $\sigma(t) = tv + I$. Dann ist $\sigma(0) = I$ und $\sigma'(0)$=v und für kleine t ist $\sigma(t)$ in Gl(n,$\mathbb{R}$). Daher ist der Tangenten-Raum T ganz $M_n(\mathbb{R})$, welcher die Dimension n^2 hat.

Ein ähnliches Argument zeigt: dim Gl(n,$\mathbb{C}$)= $2n^2$, sowie dim Gl(n,$\mathbb{H}$) = $4n^2$.

Definition:

Eine Matrix A $\in M_n(\mathbb{K})$ mit $\mathbb{K}$=$\mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ ist *schief − symmetrisch*, wenn gilt:

$$A + {}^tA = 0$$

Das bedeutet, das in einer schiefsymmetrischen Matrix alle Diagonalterme 0 sind und a_{ij}=(-a_{ji}) gilt.

Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

ist eine schiefsymmetrische Matrix.

Satz 3

Sei so(n) die Menge aller schiefsymmetrischen Matrizen in $M_n(\mathbb{R})$. Dann ist so(n) ein Unter-Vektorraum von $M_n(\mathbb{R})$ mit der Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Beweis: Dazu müssen wieder die drei Unter-Vektorraum-Axiome nachgeprüft werden: ad 1): 0 $\in$ so(n), klar, da die Null-Matrix offensichtlich schief-symmetrisch ist.
ad 2): Seien A,B $\in$ so(n), dann: $(A + B) + {}^t (A + B) = A + {}^t A + B + {}^t B = 0$, also ist so(n) abgeschlossen gegenüber der Addition
ad 3): Sei A $\in$ so(n), r $\in \mathbb{R}$, dann gilt: ${}^t(rA) = r\,{}^tA$ so dass $rA + {}^t(rA) = r(A + {}^tA)$ =0, also ist so(n) auch abgeschlossen gegenüber der Skalarmultiplikation.
Zur Dimension: Wähle eine Basis von so(n). Jetzt ist E_{ij} die Matrix, in der alle Komponenten 0 sind, nur der ij-te Eintrag ist 1 und der ji-te ist (-1). Sei jetzt i <j, dann bilden diese Matrizen E_{ij} die Basis von so(n). Wenn n=2 ist, benötigt man eine Matrix, wenn n=3 ist, braucht man 1 + 2 = 3 Matrizen, n=4: 1 + 2 + 3 = 6 Matrizen, also allgemein:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

□

Definition:

Eine Matrix B $\in M_n(\mathbb{C})$ ist *schief − hermitesch*, wenn gilt:

$$B + {}^t\overline{B} = 0$$

Somit ist b_{jk}=c+id und $b_{kj} = (-c + id)$, ausserdem sind alle Diagonalterme rein imaginär.

Beispiel:

$$B = \begin{bmatrix} i & 5+i5 & 3+i3 \\ -5+i5 & i & 2+i2 \\ -3+i3 & -2+i2 & i \end{bmatrix}$$

ist eine schief-hermitesche Matrix.

Satz 4

Sei su(n) die Menge aller schief-hermiteschen Matrizen in $M_n(\mathbb{C})$. Dann ist su(n) $\subset M_n(\mathbb{C})$ ein reeller Vektorraum mit der Dimension $n + 2\frac{n(n-1)}{2} = n^2$

Beweis: Zur Verifikation des reellen Vektorraumes müssen die Vektorraum-Axiome erfüllt sein. Alternativ kann man auch die 3 Unter-Vektorraum-Axiome nachweisen! Auf die Verifikation wird hier aber verzichtet.
Zur Dimension: Wähle eine Basis von su(n). Zunächst einmal braucht man n Matrizen um die Diagonalterme, die rein imaginär sind, darstellen zu können. Weiter ist G_{jk} die Matrix, in der alle Komponenten 0 sind nur der jk-te Eintrag ist 1, also reell, der kj-te Eintrag ist (-1). Somit erhalten wir für j < k wie in Satz 3 die Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. Nun ist H_{jk} die Matrix, in der alle Komponenten 0 sind, ausser der jk-te Eintrag, der ist rein imaginär, genauso wie der kj-te Eintrag. Für j < k erhalten wir also wieder die Dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.
Zusammenfassend erhalten wir:

$$n + 2\frac{n(n-1)}{2} = n^2$$

□

Definition:

Sei C $\in M_n(\mathbb{H})$, dann ist C *schief − symplektisch*, wenn gilt:

$$C + {}^t\overline{C} = 0$$

Bemerkung: Sei sp(n) die Menge aller schief-symplektischen Matrizen in $M_n(\mathbb{H})$, dann ist sp(n) ein reeller Vektorraum mit der Dimension $3n + 4\frac{n(n-1)}{2} = n(2n+1)$

Satz 5

Sei β eine Kurve in $M_n(\mathbb{K})$ durch die Identität mit $\beta(0)$=I. Dann gilt:
Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt: In O(n) (Das ist die Orthogonale Gruppe der n x n -Matrizen) ist $\beta'(0)$ schief-symmetrisch
Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt: In U(n) (Das ist die unitäre Gruppe der n x n - Matrizen) ist $\beta'(0)$ schief-hermitesch
Für $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ gilt: In Sp(n) (Das ist die symplektische Gruppe der n x n -Matrizen) ist $\beta'(0)$ schief-symplektisch

Beweis: In allen drei Fällen ist die Produktkurve konstant: $\beta(u) *^t \beta(u) = I$ für u $\in$ (a,b). Also ist die Ableitung 0. Somit gilt nach Satz 1:

$$0 = (\beta(0) *^t \beta(0))' = \beta'(0) *^t \beta(0) + \beta(0) *^t \beta'(0) = \beta'(0) * I + I * \beta'(0) = \beta'(0) + {}^t\beta'(0)$$

Also ist $\beta'(0)$ schief-symmetrisch. Analog für schief-hermitesch und schief-symplektisch.

□

Bemerkung: Es gilt:
dim O(n) $\leq \frac{n(n-1)}{2}$, dim U(n) $\leq n^2$, dim Sp(n) $\leq$ n(2n+1)
Später wird die jeweilige Gleichheit gezeigt !

B : Glatter Homomorphismus

Bemerkung: G,H seien Matrizen-Gruppen in $M_n(\mathbb{K})$, mit $\mathbb{K}= \mathbb{R},\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$. Sei ϕ: G $\to$ H ein Homomorphismus von Matrizen-Gruppen, ρ: (a,b) $\to$ G eine Kurve mit einem offenem Intervall in $\mathbb{R}$, dann ergibt $\phi \circ \rho$: (a,b) $\to$ H eine Kurve mit $(\phi \circ \rho)(u)=\phi(\rho(u))$ in H mit u $\in$ (a,b).
Von jetzt an ist, wenn von einem Homomorphismus gesprochen wird, ein stetiger Homomorphismus gemeint.

Definition:

Seien G,H Matrizen-Gruppen in $M_n(\mathbb{K})$, mit $\mathbb{K}= \mathbb{R},\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$, (a,b) $\in \mathbb{R}$ ein Intervall. Ein *Homomorphismus* ϕ : G $\to$ H ist *glatt* (stetig differenzierbar), wenn für jede differenzierbare Kurve ρ: (a,b) $\to$ G auch $\phi \circ \rho$ differenzierbar ist.

Definition:

Seien G,H Matrizen-Gruppen in $M_n(\mathbb{K})$, mit $\mathbb{K}= \mathbb{R},\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$, (a,b) $\in \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei ϕ : G $\to$ H ein glatter Homomorphismus und die Kurve ρ : (a,b) $\to$ G differenzierbar. Wenn $\rho'(0)$ ein Tangential-Vektor (in der Identität nach G) ist, dann ist $d_\phi(\rho'(0))$ ein Tangential-Vektor (in der Identität nach H) mit

$$d_\phi(\rho'(0)) = (\phi \circ \rho)'(0)$$

T_G bezeichnet nun die Menge aller Tangential-Vektoren in G, T_H die Menge aller Tangential-Vektoren in H. Die sich ergebende Abbildung $d_\phi : T_G \to T_H$ nennt man *Differential* von ϕ.

Satz 6

$d_\phi : T_G \to T_H$ ist eine lineare Abbildung.

Beweis: ad Addition: Seien $\rho'(0)$ und $\sigma'(0)$ in T_G. Dann ist $\rho(0)$=I und $\sigma(0)$=I. Damit:

$$d_\phi(\rho'(0)+\sigma'(0)) = d_\phi(\rho'(0)*\rho(0)+\sigma'(0)*\sigma(0)) = d_\phi((\rho*\sigma)'(0)) = (\phi\circ(\rho*\sigma))'(0)$$

$$\overset{\phi Homomorphismus}{=} (\phi\circ\rho)'(0)*(\phi\circ\sigma)'(0) = (\phi\circ\rho)'(0)*(\phi\circ\rho)(0)+(\phi\circ\sigma)'(0)*(\phi\circ\sigma)(0)$$
$$= (\phi\circ\rho)'(0) + (\phi\circ\sigma)'(0) = d_\phi(\rho'(0)) + d_\phi(\sigma'(0))$$

ad Skalar-Multiplikation: Sei r $\in \mathbb{R}$ und ρ'(0) in T_G, dann gilt:

$$d_\phi((r*\rho)'(0)) = (\phi\circ(r*\rho))'(0) = r*(\phi\circ\rho)'(0) = r*d_\phi(\rho'(0))$$

□

Satz 7

Seien G,H,K Matrizen-Gruppen in $M_n(\mathbb{K})$, mit $\mathbb{K}= \mathbb{R},\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$, ϕ: G $\to$ H, ψ: H $\to$ K glatte Homomorphismen, dann ist auch $\psi \circ \phi$ ein glatter Homomorphismus mit

$$d(\psi\circ\phi) = d_\psi \circ d_\phi$$

Beweis: Seien ϕ, ψ glatte Homomorphismen, dann ist klar, dass das Kompositum auch ein glater Homomorphismus ist. Weiter: Sei γ: (a,b) $\to$ G mit einem Intervall (a,b) $\in \mathbb{R}$ eine differenzierbare Kurve, $\gamma'(0)$ ein Tangential-Vektor von G in I. Damit:

$$d(\psi \circ \phi)(\gamma'(0)) = (\psi \circ \phi \circ \gamma)'(0) = d_\psi(\phi \circ \gamma)'(0) = d_\psi \circ d_\phi(\gamma'(0))$$

□

Satz 8

Seien G,H Matrizen-Gruppen in $M_n(\mathbb{K})$, mit $\mathbb{K}= \mathbb{R},\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$, ϕ: G $\to$ H ein glatter Isomorphismus, dann ist
d_ϕ: $T_G \to T_H$ ein linearer Isomorphismus, mit dim G = dim H.

Beweis: Die Linearität ist schon in Satz 6 gezeigt worden. Es ist nun $\phi^{-1} \circ \phi$ die Identität, also ist $d_\phi^{-1} d_\phi$: $T_G \to T_G$ die Identität. Somit ist d_ϕ injektiv und d^{-1} surjektiv.
Umgekehrt ist $\phi \circ \phi^{-1}$ die Identität, also ist $d_\phi d_\phi^{-1}$: $T_H \to T_H$ die Identität. Somit ist d_ϕ^{-1} injektiv und d_ϕ surjektiv.
Insgesamt also ist d_ϕ bijektiv. □