Kapitel 2

Orthogonale Gruppen

A. Skalarprodukt

Wiederholung:

Für IR $\in C \in H$ gilt

(i) $x \in IR$: $\bar{x} = x$

(ii) $\alpha = x + iy \in C$: $\bar{\alpha} = x - iy$

(iii) $q = x + iy + jz + kw \in IH$: $\bar{q} = x - iy - jz - kw$

Außerdem gilt:

(i) $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$

(ii) $\overline{(\alpha + \beta)} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$

(iii) $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$

Definition:

k $\in$ {R,C,H}

Auf K^n *wird das Skalarprodukt definiert als*:

$$< x, y >= x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + ... + x_n\bar{y}_n$$

Proposition 1:

k $\in$ {R,C,H} und $x, y, z \in k$

Für das Skalarprodukt gelten folgende Rechenregel:

(i) $< x, y + z >=< x, y > + < x, z >$

(ii) $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$

(iii) $a < \mathrm{x}, \mathrm{y} >=< a\mathrm{x}, \mathrm{y} >$,
$< \mathrm{x}, \mathrm{ya} >=< \mathrm{x}, \mathrm{y} > \bar{a}$

(iv) $\overline{< x, y >} =< y, x >$

(v) $< x, x > \geq 0$
$< x, x >= 0 <=> x = (0,...,0)$

(vi) *Ist* $e_1,...,e_n$ *Standardbasis des* K^n *mit* $e_i = (0,...,1...,0)$ *dann gilt*:

$$< e_i, e_j >= \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ für } i = j \\ 0, \text{ für } i \neq j \end{cases}$$

(vii) wenn $< x, y >= 0$ *für alle* y, *dann* $x = (0,...,0)$;
wenn $< x, y >= 0$ *für alle* x; *dann* $y = (0,...,0)$.

Definition :

Die Länge $|x|$ *von* $x \in K^n$ *wird definiert als*:

$$|x| = \sqrt{< x, x >}$$

Wiederholung :

$A \in M_n(k)$. *Dann gilt* :

- $\overline{A}$, *die konjugierte Matrix A, wobei alle* a_{ij} *durch* $\overline{a}_{ij}$ *ersetzt werden*
- ${}^t A$, *die transponierte Matrix A mit* a_{ij} *für alle* a_{ji}
- ${}^t\overline{A}$, *die konjugiert transponierte Matrix A.*

Proposition 2 :

$\forall\ x, y \in K^n$ *und* $A \in M_n(k)$ *gilt* :

$$< xA, y >=< x, y\,{}^t\overline{A} >$$

Beweis :

$A = (a_{ij})$

rechte Seite :

$$x\,A \;=\; (x_1 a_{11} + ... + x_n a_{n1},\ \ ...\ \ , x_n a_{1n} + ... + x_n a_{nn})$$

$$< xA, y >= (x_1 a_{11} + ... + x_n a_{n1})\overline{y}_1 + ... + (x_1 a_{1n} + ... + x_n a_{nn})\overline{y}_n$$

linke Seite :

$$y\,{}^t\overline{A} \;=\; (y_1\overline{a}_{11} + ... + y_n\overline{a}_{1n},\ \ ...\ \ , y_n\overline{a}_{n1} + ... + y_n\overline{a}_{nn})$$

$$< x, y\,{}^t\overline{A} >= x_1\overline{(y_1\overline{a}_{11} + ... + y_n\overline{a}_{nn})} + ... + x_n\overline{(y_1\overline{a}_{11} + ... + y_n\overline{a}_{nn})}$$

$$= x_1(\overline{y}_1 a_{11} + ... + \overline{y}_n a_{nn}) + ... + x_n(\overline{y}_1 a_{11} + ... + \overline{y}_n a_{nn})$$

Wie man nun leicht sehen kann, sind beide Seiten nach dem Ausmultiplizieren gleich und damit gilt die Gleichung.

B. Orthogonale Gruppen

Definition :

$k \in \{IR, C, IH\}$

$\sigma(n,k) = \{A \in M_n(k) \mid\ \ < xA, yA >=< x, y > \quad \forall x, y \in k^n\}$

Proposition 3 :

$\sigma(n,k)$ *ist eine Gruppe.*

Beweis :

$A, B \in \sigma(n,k)$

(i) z.z : $AB \in \sigma(n,k)$

Bew : $< xAB, yAB > = < xA, yA > = < x, y >$

(ii) z.z.: Einheitsmatrix $E_n \in \sigma(n,k)$

$< xE_n, yE_n >=< x, y >$

$Alos\ E_n \in \sigma(n,k).$

(iii) z.z : $A^{-1} \in \sigma(n,k)$

Bew : $A \in \sigma(n,k)$

$e_i A$ *ist die* $i-te$ *Zeilen von* A,

somit ist $< e_i A, e_j A >$ *der* $ij-te$ *Eintrag in dem Produkt* $A^t\overline{A}$.

$$< e_i A, e_j A >=< e_i, e_j >= \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{für } i = j \\ 0, \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Und es gilt : $A^t\overline{A} = E_n$.

Es gilt auch ${}^t\overline{A}A = E_n$:

$\overline{{}^t({}^t\overline{A}A)} = {}^t({}^tA\ \overline{A}) = A^t\overline{A} = E_n$

damit ergibt sich :

$${}^t\overline{A} = A^{-1}.$$

Das heißt also :

$< xA^{-1}, yA^{-1} >=< xA^{-1}A, yA^{-1}A >< x, y >$

D.h : $A^{-1} \in \sigma(n,k)$.

Definition :

Wenn k=IR, schreibst man $\sigma(n)$ für $\sigma(n,k)$ und nennt es die orthogonale Gruppe
Ist k=IR, so schreibt man U(n) und nennt es die unitäre Gruppe.
Wenn k=IH ist, so schriebt man Sp(n) und nennt es die symplektische Gruppe .

Proposition 4 :

Für $A \in M_n(k)$ *sind folgende Bedingungen gleichwertig* :

(i) $A \in \sigma(n,k)$

(ii) $< e_i A, e_j A >= \delta_{ij}$

(iii) *orthonormalbasen werden auf orthonormalbasen abgebildet*

(iv) *die Spalten von A sind orthonormalbasen*

(v) *die Zeilen von A sind orthonormalbasen*

(vi) ${}^t\overline{A} = A^{-1}$

Beweis : folgt aus den Defintionen oder teilweise auch schon gezeigt.

Proposition 5 :

$A \in M_n(IR)$

$A \in \sigma(n) \Leftrightarrow A \text{ erhält die Länge}$

Beweis :

$A \text{ erhält die Länge} \Leftrightarrow <xA, xA> = <x, x> \text{ für alle } x \in IR^n$

$"\Rightarrow" \text{ folgt aus der Definition}$

$"\Leftarrow" <(x+y)A, (x+y)A> = <x+y, x+y>$

$= <x,x> + <x,y> + <y,x> + <y,y>$

$= <xA, xA> + <xA, yA> + <yA, xA> + <yA, yA>$

$\text{Für } <xA, xA> \text{ und } <yA, yA> \text{ ist laut Vor. klar. Also noch zu betrachten:}$

$<x,y> + <y,x> = <xA, yA> + <yA, xA>$

$\text{Da das Skalarprodukt auf } IR \text{ symmetisch, gilt}$

$<xA, yA> = <x, y> \text{ und damit } A \in \sigma(n)$

Proposition 5a :

Proposition 5 gilt auch für C und IH.

Beweis:

$A \in M_n(C)$

$z.z \quad : A \in U(n) \quad \Leftrightarrow \quad <xA, xA> = <x, x>$

$Bew: "\Rightarrow" \text{ folgt aus der Definition}$

$"\Leftarrow" \; z.z. <xA, yA> = <x, y>$

$d.h. \text{ also}: <e_iA, e_jA> = <e_i, e_j>$

$<(e_i + e_j)A, (e_i + e_j)A> = <(e_i + e_j), (e_i + e_j)>$

$= <e_i, e_i> + <e_i, e_j> + <e_j, e_i> + <e_j, e_j>$

$= <eA_i, e_iA> + <e_iA, e_jA> + <e_jA, e_iA> + <e_jA, e_jA>$

$d.h. \text{ also}:$

$<eA_i, e_jA> + <e_jA, e_iA> = 0$

$<e_iA, e_jA> \qquad = - <e_jA, e_iA>$

$\text{Setzt } x = x_ie_i + x_je_j \quad \text{mit } x_i, x_j \in C$

$<(x_ie_i + x_je_j)A, (x_ie_j, x_je_i)A> = <(x_ie_i + x_je_j), (x_ie_j, x_je_i)>$

$\Rightarrow x_i\bar{x}_i <e_iA, e_jA> + \bar{x}_jx_j <e_jA, e_iA> = 0$

$= <e_iA, e_jA> (x_i\bar{x}_i - \bar{x}_jx_j) = 0$

$\text{damit } <e_iA, e_jA> = 0 = <e_i, e_j> \text{ für alle } i \neq j \text{ gilt.}$

Betrachtet man σ(n), U(n), Sp(n) für n = 1.
$\sigma(1)$ ist die Menge aller reellen Zahlen der Länge 1, wobei $\sigma(1)=\{1,-1\}$.
U(1) ist die Menge aller komplexen Zahlen der Länge 1. Man nennt U(1) dann Kreisgruppe S^1.
Sp(1) ist die Menge aller Quaternionen der Länge 1. Man definiert:

$$S^4 = \{x \in IR \quad | \quad |x| = 1\}$$

Damit gilt:

$$\sigma(1) = S^0, \quad U(1) = S^1, \quad Sp(1) = S^3.$$

Proposition 6:

$k \in \{IR, C\}$ *und* $A \in \sigma(n,k)$, *dann gilt*:

$$(\det A)\overline{(\det A)} = 1$$

Beweis:

$$A^t\overline{A} = E_n \Rightarrow (\det A)\ (\det{}^t\overline{A}) = 1$$

Mit $\det{}^t\overline{A} = \det\overline{A} = \overline{\det A}$ *gilt dann*

$$(\det A)\ \overline{(\det A)} = 1$$

Definition:

Wenn $A \in \sigma(n)$, dann ist $\det A \in \{1,-1\}$ und man definiert, die spezial orthogonale Gruppe:

$$SO(n) = \{A \in \sigma(n) \mid \det A = 1\}$$

Analog wird die spezial unitäre Gruppe definiert:

$$SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$$

Beispiel:

Ein Beispiel für eine Matrix aus $\sigma(2)$, aber nicht $SO(2)$ ist $\sigma(n) - SO(2)$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dieses bildet e_1=(0,1) auf e_1 und e_2=(0,1) auf e_2 ab. Es handelt sich um die Spiegelung an der ersten Achse mit der Determinaten -1.

C. Isomorphismus Problem

Proposition 7:

Die Abbildung $\phi : M_1(H) \to M_2(C)$ induziert einen Isomorphismus

$$\phi : Sp(1) \to SU(2).$$

Beweis:

In Kapitel 1 wurde gezeigt, dass ϕ ein injektiver Homomorphismus von GL(n;IH) nach GL (2n,C) ist, die Einschränkung von ϕ auf SP(1) ist somit auch ein injektiver Homomorphismus. Zu zeigen ist also:

(i) $A \in Sp(1) \Rightarrow \phi(A) \in SU(2)$ *und*
(ii) *jedes* $B \in SU(2)$ *ist* $\phi(A)$ *mit* $A \in Sp(1)$.

(i) $A \in Sp(1)$ heißt :

$$A = a + ib + jc + kd \quad und \quad \phi(A) = \begin{pmatrix} a+ib & -c-id \\ c-id & a-ib \end{pmatrix} mit\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

D.h. also:

$$\phi(A)\ {}^t\overline{\phi(A)} = \begin{pmatrix} a+ib & -c+ib \\ c-id & a-ib \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a-ib & c-id \\ -c+ib & a-ib \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Noch zu zeigen detA=1:
$(a+ib)(a-ib) - (-c+ib)(c-id) = 1$ gilt für $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ und damit detA=1.
Also $\phi(A) \in SU(2)$.

(ii) $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SU(2)$

Mit detB=1 und der Tatsache, dass die Zeilen Orthogonale Einheitsvektoren sind, kriegen wir:

$$\delta = \overline{\alpha} \qquad und \qquad \gamma = -\overline{\beta}.$$

Wenn $\alpha = a + ib\ und\ \beta = -c - id, ergibt\ sich\ mit\ A = a + ib + jc + kd$

$$\phi(A) = \begin{pmatrix} a+ib & -c-id \\ c-id & a-ib \end{pmatrix} = B\ (wobei\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1)$$

D. Spiegelung im IR^n

Definition:

Das orthogonale Komplement zu einem Einheitsverktor u des IR^n ist definiert als:

$$u^{\perp} = \{x \in IR^n \mid \langle x, u \rangle = 0\}.$$

Die Projektion eines Vektors v an $u^{\perp}$ ist v-ru, wobei
$r \in IR$ so gewählt wird, dass v-ru in $u^{\perp}$ liegt.
D.h es muß gelten $0 = \langle v - ru, u \rangle = \langle v, u \rangle - r \langle u, u \rangle$
mit ergibt sich für r:

$$r = \frac{\langle v, u \rangle}{\| u^2 \|}$$

Die Spiegelung eines Vektors v an $u^{\perp}$ ist dann :

$$\phi(v) = v - 2ru = v - 2\frac{\langle v, u \rangle}{\| u^2 \|}u.$$

Sei $u_1,...,u_n$ *mit* $u_1 = u$ eine orthonormale Basis.

Die Spiegelung ϕ sei durch die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

A sei eine lineare Abbildung des IR^n wobei $e_1,...,e_n$ auf $u_1,...,u_n$ abgebildet wird. Die Spiegelung der Standardbasis $e_1,...,e_n$ bezlüglich der Basis $u_1,...,u_n$ ist dann gegeben durch:

$$A \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} A^{-1} = A \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} {}^tA$$

Sei im IR^n der Vektor $u = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.
Dann ist $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$ ein Vektor in $u^\perp$. Die Matrix A bildet e_1 auf u und e_2 auf $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$ ab.
D.h. also:

$$(1,0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

$$(0,1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$$

Somit ergibt sich für die Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzten in die Allgemeine Form erhält man:

$$\phi = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\phi = \begin{pmatrix} -\cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

Die Matrix A ist also die Rotation im IR^2 um den Winkel 2α .