Kapitel 6

Topologie

A) Stetigkeit, offene und abgeschlossene Mengen

Definition:

Eine **Metrik** d auf einer Menge A ist ein Weg jeden $x, y \in A$ eine reelle Zahl d(x, y) zuzuordnen (der Abstand von x zu y):

(i) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$

(iii) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (Dreiecksungleichung)

Wir definieren eine solche Metrik d auf IR^n und somit für jedes $A \subset IR^n$ ist d eine Metrik auf A.

Wiederholung:

(Wir definierten als Skalarprodukt: $\langle x, y \rangle = (x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)$)

Nun sei $d(x, y) = \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$ (Damit haben wir die Länge des Vektors x - y)

Satz 1: Dies ist eine Metrik auf IR^n

Beweis:

(i) und (ii) folgen aus:

$\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

und der Symmetrie des Skalarproduktes. Um die Dreiecksungleichung zu beweisen, zeigen wir die entsprechende Eigenschaft des Skalarproduktes, die **Cauchy – Schwarzsche Ungleichung**:

$\forall$ $x, y \in IR^n$ und $t \in IR^n$ gilt:

$$\langle x + ty\, , x + ty \rangle \geq 0 .$$

Aufgrund der Bilinearität und der Symmetrie des Skalarproduktes hat man:

$$\langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle t + \langle y, y \rangle\, t^2 \geq 0 \;.$$

Das quadratische Polynom in t mit reellen Koeffizienten ist stets ≥ 0 und kann somit keine zwei verschieden reellen Wurzeln haben. Nach lösen der quadratischen Gleichung erhält man somit:

$$(2\langle x, y \rangle)^2 - 4\langle y, y \rangle \langle x, x \rangle \leq 0$$

somit: $$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Diese Ungleichung ist die Cauchy – Schwarzsche Ungleichung.

Für die Werte x – y und y – z hat man:

$\langle x-y, y-z\rangle \le \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}\ \sqrt{\langle y-z, y-z\rangle}$

Wenn wir beide Seiten der Dreiecksungleichung quadrieren und das Skalarprodukt darauf anwenden, sehen wir, dass die Dreiecksungleichung und die obige Gleichung äquivalent sind.

Wir verwenden diese Metrik d auf IR^n um **offene Kugeln** zu definieren.

Def.: Sei $x \in IR^n$ und $r > 0$ eine reelle Zahl. Dann ist:

$B_r(x) = \{y \in IR^n: d(x, y) < r\}$ und heißt offene Kugel mit Mittelpunkt x und Radius r.

Mit Hilfe von offenen Kugeln ist es uns möglich eine Definition der Stetigkeit von Funktionen auf IR^n zu definieren.

Sei A eine Teilmenge des IR^n und

$$f : A \to IR^m$$

eine Funktion definiert auf A, die Werte in einem euklidischen Raum IR^m annimmt.

Definition:

f ist stetig in einem Punkt $a \in A$, heißt:

Sei $B_\varepsilon(f(a))$ eine offene Kugel im IR^m, dann ex. eine offene Kugel $B_\delta(a)$ im IR^n, so dass für jeden Punkt $x \in A \cap B_\delta(a)$ gilt:

$f(x) \in B_\varepsilon(f(a))$.

Oder anders: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : d(f(a), f(x)) < \varepsilon,\ x \in A,\ d(a, x) < \delta$

Es ist wichtig zu bemerken, dass die Stetigkeit von f vom Definitionsbereich A abhängt.

Beispiel:

$f : IR \to IR$, mit $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$

Dann ist f nicht stetig in 0. Sei aber $A \subset IR$, so dass alle $x \ge 0$ und f auf A beschränkt.

$f: A \to IR$, dann ist dieses eingeschränkte f stetig in 0.

Eine Funktion $f: A \to IR^m$ ($A \subset IR^n$) heißt stetig, wenn sie in jedem $a \in A$ stetig ist.

Satz 2:

Wenn $A \subset IR^n$ und $f: A \to IR^m$, $g: (f(A)) \to IR^p$ stetig sind, dann ist $f \circ g$ stetig.

Beweis:

Sei $a \in A$ und $\varepsilon > 0$. Da g stetig ist, existiert ein $\eta > 0$, so dass jedes Element von f(A) aus $B_\eta(f(a))$ von g in $B_\varepsilon(g(f(a)))$ abgebildet wird. Da f stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass jedes Element von A aus $B_\delta(a)$ von f in $B_\eta(f(a))$ und dann von g in $B_\varepsilon(g(f(a)))$ abgebildet wird.

Definition:

Eine Menge $U \subset IR^n$ heißt offen, wenn jedes $x \in U$ in einem $B_r(x) \subset U$ liegt.

Somit ist IR^n offen, und die leere Menge ist offen, da kein $x \in \varnothing$ ist, somit ist es nicht erforderlich, dass ein $B_r(x)$ in $\varnothing$ enthalten ist.

Beispiel:

Jede offene Kugel $B_s(y)$ ist eine offene Menge. Sei $x \in B_s(y)$ (d.h. $d(x,y)<s$). Müssen wir ein $r>0$ finden, so dass $B_r(x) \subset B_s(y)$ ist. Sei $r = s-d(x,y)$, wenn $z \in B_r(x)$ ist, dann ist $d(z,x)<s-d(x,y)$ und somit $d(z,x) + d(z,y)<s$. Nach Dreiecksungleichung gilt:

$d(z,y) \leq d(z,y)+d(x,y) < s$, somit $z \in B_s(y)$.

Beispiel:

$(0,1) = \{x \in IR : 0<x<1\}$ ist eine offene Menge in IR.(Weil es die offene Kugel $B_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})$ ist).

Aber $(0,1] = \{x \in IR : 0<x \leq 1\}$ ist nicht offen in IR, weil $1 \in (0,1]$, aber kein $B_r(1)$ liegt in $(0,1]$ da eine solche Kugel immer Zahlen größer als 1 enthalten würde.

Definition:

Eine Teilmenge $A \subset IR^n$ heißt abgeschlossen, wenn das Komplement $IR^n \setminus A$ offen ist.

Beispiele:

- $(0,1]$ ist weder abgeschlossen noch offen. Wir wissen, es ist nicht offen. Sei nun $T = IR \setminus (0,1]$. Dann ist $0 \in T$, aber kein $B_r(0)$ liegt in T, da es immer Punkte aus $(0,1]$ enthalten würde. Somit ist T nicht offen, also ist $(0,1]$ nicht abgeschlossen.
- $[0,1] = \{x \in IR : 0 \leq x \leq 1\}$ ist eine abgeschlossene Menge.
- Sei $K \subset IR^n$ eine endliche Menge. K ist abgeschlossen, wenn für $x \in IR^n \setminus K$ gilt: es gibt einen minimalen Abstand δ von x zu Punkten aus K. Dann zeigt: $B_\delta(x) \subset IR^n \setminus K$, dass K abgeschlossen ist.

B) Zusammenhängende Mengen, kompakte Mengen

Definition:

Eine Menge $D \subset IR^n$ ist zusammenhängend, wenn für $x,y \in D$ vorgegeben, eine stetige Abbildung existiert: $\gamma : [0,1] \to D$ (d.h. $\gamma : [0,1] \to IR^n$ mit $\gamma([0,1]) \subset D$) mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Eine solche Funktion heißt Weg von x nach y in D.

Beispiele:

IR^n ist zusammenhängend, weil $\gamma(t) = (x + t(y-x))$ ein Weg im IR^n von x nach y ist.

$D = \{x \in IR : x \neq 0\}$ ist nicht zusammenhängend. Es gibt z.B. keinen Weg von -1 nach 1.

$D = \{(x_1,x_2) \in IR^2 : (x_1,x_2) \neq (0,0)\}$ ist zusammenhängend.

Wichtiges Beispiel:

$O(n) \subset IR^{n^2}$ ist nicht zusammenhängend. Die Matrizen

$A = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ und $I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ liegen in O(n). Wäre $\gamma : [0,1] \to \sigma(n)$ in Weg von A

nach I, dann wäre das Kompositum: $[0,1] \xrightarrow{\gamma} O(n) \xrightarrow{\det} IR$ stetig(Satz 2), aber es wäre ein Weg in $\{-1,1\} \subset IR$ von -1 nach 1, Widerspruch zur Existenz von γ.

Wiederholung:

$so(n) \subset Mn(IR)$ besteht aus schief-symmetrischen Matrizen und es gilt:

$A \in so(n) \Rightarrow \exp A \subset O(n)$

Satz 3:

Die Exponential Funktion bildet so(n) auf SO(n) ab.

Beweis:

Für $B \in so(n)$ ist die Funktion $\gamma(t) = e^{tB}$ ein Weg von $e^0 = I$ nach e^B. Wie oben gesehen, impliziert dies, dass $\det e^B = +1$, somit $e^B \in SO(n)$.

Satz 4:

Sei $D \subset IR^n$ zusammenhängend und $f: D \to IR^m$ stetig, dann ist f(D) zusammenhängend.

Beweis:

Gegeben seien $a, b \in f(D)$, wähle $x, y \in D$, so dass f(x) = a und f(y) = b. Wähle einen Pfad γ von x nach y in D. Dann ist $f \circ \gamma$ ein Weg von a nach b in f(D).

Definition:

Eine Teilmenge $W \subset IR^n$ ist beschränkt, wenn W in einer offenen Kugel liegt. Dies ist äquivalent zu: W liegt in einem $B_r(0)$.

Beschränktheit wird nicht wie Zusammenhang von stetigen Funktionen erhalten.

Beispiel:

Sei $W = (0,1) \subset IR$ und $f: W \to IR$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$, dann ist W beschränkt und f(W) nicht.

Die Eigenschaft abgeschlossen wird auch nicht von stetigen Funktionen bewahrt.

Beispiel:

IR ist abgeschlossen in IR und $f: IR \to IR$ mit $f(x) = e^x$ ist stetig, aber $f(IR) = \{y \in IR : y > 0\}$ ist nicht abgeschlossen.

Hat man allerdings Abgeschlossenheit und Beschränktheit, dann werden beide Eigenschaften erhalten.

Definition:

Eine Menge $A \subset IR^n$ heißt kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

C) Unterraum Topologie und abzählbare Basen

Manchmal hat man eine Teilmenge W aus IR^n und will wissen welche Teilmengen von W offene Mengen in W sind. (relativ offen oder W-offen)

Definition:

Sei $U \subset W \subset IR^n$, dann ist U eine offene Menge in W, wenn es eine offene Menge $V \subset IR^n$ gibt, so dass gilt: $U = V \cap W$.

Beispiel:

Sei $W = [0,1] \subset IR$, dann ist $U = (\frac{1}{2},1] = \{x \in IR: \frac{1}{2} < x \le 1\}$ eine offene Menge in W, aber keine in IR. $U' = [\frac{1}{2},1]$ ist nicht offen in W.

Bem: Wenn W eine offene Menge im IR^n ist, dann ist $U \subset W$ nur offen in W, wenn es offen im IR^n ist.

Für $W \subset IR^n$ ist die Gesamtheit aller offenen Mengen aus W die Unterraum Topologie von W.

Definition:

Eine System $\nu = \{V_\alpha\}$ aus offenen Mengen im IR^n ist eine Basis für offene Mengen, wenn jede offene Menge im IR^n eine Vereinigung aus einigen (endlich vielen) dieser V_α's ist.

Beispiel:

- Die Menge aller offenen Quadrate im IR^2 ist eine Basis der offenen Mengen im IR^2
- Die Menge aller offenen Intervalle $(a, b) \subset IR$ mit a, b rational, ist eine Basis der offenen Mengen in IR.
- Die Menge aller offenen Kugeln im IR^n ist eine Basis für offene Mengen.
- Ebenso: $\{B_r(x) : x = (x_1,-,x_n)$ mit x_i und r rational$\}$

Für eine Teilmenge W des IR^n kennen wir die offenen Mengen und wir können dieselbe Definition wie oben für den Begriff einer Basis der offenen Mengen in W geben. Denn wenn $\nu = \{V_\alpha\}$ eine Basis für die offenen Mengen im IR^n ist, dann ist $\{V_\alpha \cap W\}$ eine Basis der offenen Mengen in W.

Ziel: Basen für offene Mengen die „minimal" sind, d.h. sie enthalten nicht mehr Mengen als nötig. Hierfür brauchen wir den Begriff der Abzählbarkeit.

Definition:

Eine Menge S heißt abzählbar, wenn die Elemente dieser Menge in einer endlichen oder unendlichen Folge angeordnet werden können, so dass sich jedes Element aus S in dieser Folge wiederfindet.

Beispiele:

Die Menge aller positiven rationalen Zahlen ist abzählbar; z.B.

$1,2,\frac{1}{2},\frac{3}{2},3,\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3},\frac{7}{3},\frac{8}{3},4,\frac{1}{4},...$ ist eine Folge die alle positiven Rationalen Zahlen enthält.

Die Menge $I = [0,1] = \{x \in IR:\ 0 \leq x \leq 1\}$ ist überabzählbar.

Beweis durch Widerspruch:

Angenommen: $r_1, r_2, r_3\ldots$ ist eine Liste aller Elemente von I, dann reicht es ein Element anzugeben welches nicht in dieser Liste sein kann. Wir schreiben die r_i's dezimal:

$r_i = .x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} \ldots$ Sei $r = .y_1y_2y_3\ldots$, wobei $y_j=5$, wenn $x_{jj} \neq 5$ und $y_j=1$, wenn $x_{jj}=5$.

Dann: $r \neq r_1$, da $y_1 \neq x_{11}$

$r \neq r_2$, da $y_2 \neq x_{22}$, usw.

Aber $r \in I$.

Satz 6:

Wenn A und B abzählbare Mengen sind, dann ist ihr kartesisches Produkt $A\times B$ abzählbar.

Beweis:

Sei $A=\{a_1, a_2, a_3,\ldots\}$ und $B=\{b_1, b_2, b_3,\ldots\}$. Dann kann man $A\times B$ schreiben als:

$\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_1),(a_3,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3),(a_1,b_3),\ldots\}$

Dies wäre eine Aufzählung, die alle Elemente von $A\times B$ enthalten würde.

Satz 7:

IR^n (und jede Menge $W \subset IR^n$) hat eine abzählbare Basis für die offenen Mengen.

Beweis:

Die Menge $C=\{B_r(x) : x = (x_1,\text{-},x_n),\ x_i \in Q \text{ und } r \in Q\}$ kann 1 zu 1 in Übereinstimmung mit (n+1)- Tupeln $(x_1,\text{-},x_n, r)$ von rationalen Zahlen gebracht werden. Nach Satz 6 wäre dies eine abzählbare Menge von Kugeln.

Sei V eine offene Menge im IR^n. Um zu zeigen, dass V eine Vereinigung von Elementen aus C ist, genügt es zu zeigen, dass es für $y \in V$ eine Kugel $B_r(x) \subset C$ gibt, welche y enthält und in V liegt. (Dann wäre V die Vereinigung solcher $B_r(x)$, eins für jedes $y \in V$).

Da V offen ist, existiert ein $B_s(y) \subset V$. Wähle nun x rational, so dass $d(x, y) < \frac{s}{3}$ und sei r sei eine rationale Zahl für die gilt: $\frac{s}{3} < r < \frac{s}{2}$. Dann ist: $y \in B_r(x)$ und $B_r(x) \subset B_s(y) \subset V$.

D) Mannigfaltigkeiten

Definition:

Mit einem Raum meinen wir nun eine Teilmenge des IR^n mit einer Unterraum Topologie. Eine Abbildung f: $X \to Y$ von Räumen ist ein Homöomorphismus, wenn sie bijektiv und stetig ist und die Umkehrabbildung f^{-1} stetig ist.

Beispiel:

$f(x) = e^{ix}$ ist eine bijektive, stetige Abbildung, von $[0, 2\pi) \subset IR$ auf den Einheitskreis $S^1 \subset IR^2$. Aber f ist kein Homöomorphismus, da f^{-1} nicht stetig ist. (Der Kreis wird aufgerissen.)

Eine Mannigfaltigkeit ist ein Raum, der teilweise so aussieht, wie ein IR^n.

Definition:

Ein Raum X ist eine n-Mannigfaltigkeit, wenn jedes $x \in X$ in einer offenen Menge liegt, die homöomorph zu einem $B_r(0) \subset IR^n$ ist. Eine n-Mannigfaltigkeit hat die Dimension n.

Satz 8:

Eine Matrix-Gruppe der Dimension n ist eine n-Mannigfaltigkeit.

Beweis:

Die exponentielle Abbildung des n-dimensionalen tangential Raumes T auf G ist stetig. Sie ist bijektiv auf einer Umgebung V um 0 in T, da sie ein Inverses hat (log). Diese Abbildung ist auch stetig. Mit $B_r(0)$, hat die Einheitsmatrix I die richtige Umgebung. Für ein $x \in G$ gilt: $L_x \circ \exp$: $Br(0) \to G$ ist ein Homöomorphismus auf eine Umgebung von x. Somit ist G eine n-Mannigfaltigkeit.

Satz 9:

GL(n, k) ist nicht kompakt, aber O(n, k) ist kompakt.

Beweis:

GL(n, k) ist nicht beschränkt, weil für jede reelle Zahl $r \neq 0$, ist $rI \in GL(n, k)$. (Das zeigt auch, das GL(n, k) nicht abgeschlossen ist. Da $0 \in M_n(k) \backslash GL(n,k)$ ist, aber jede Kugel mit Mittelpunkt 0 würde ein $rI \in GL(n, k)$ enthalten.)

Wenn $A \in O(n, k)$ ist, dann sind die Zeilen Einheitsvektoren, so dass die Länge von $A \leq n$ ist, A als ein Vektor aus $M_n(k)$. Also ist O(n, k) eine beschränkte Menge. Um zu zeigen, dass $M_n(k) \backslash O(n,k)$ offen ist, nehmen wir an, $\tilde{B} \in M_n(k) \backslash O(n, k)$. Dann ex. x, $y \in k^n$, so dass: $\langle x\tilde{B}, y\tilde{B} \rangle \neq \langle x, y \rangle$. Da das Skalarprodukt stetig ist, gibt es eine offene Kugel $B_s(\tilde{B})$ in $M_n(k)$, so dass für $B' \in B_s(\tilde{B})$ gilt: $\langle xB', yB' \rangle \neq \langle x, y \rangle$, somit ist $B' \notin O(n, k)$.

Satz 10:

Seien N und M abgeschlossene Mannigfaltigkeiten mit $N \subset M$. Ist nun M zusammenhängend, dann ist N = M.

Beweis:

Wir wollen zeigen, dass M\N leer ist. Angenommen dies gilt nicht, wähle dann $y \in M\backslash N$ und $x \in N$. Da M zusammenhängend ist, existiert ein Weg $\rho : [0,1] \rightarrow M$, mit $\rho(0) = x$ und $\rho(1) = y$. Dann ist $\rho^{-1}(M\backslash N)$ eine offene Menge in [0,1] und es ist 1 enthalten, jedoch nicht 0. Sei nun t_0 das größte Element der abgeschlossenen Menge $I \backslash \rho^{-1}(M\backslash N)$. Dann gilt:

(i) jedes $B_\varepsilon(t_0)$ enthält Punkte aus $\rho^{-1}(M\backslash N)$, aber

(ii) da N eine Mannigfaltigkeit ist, gibt es eine offene Umgebung U von $\rho(t_0)$ in N.

Aufgrund der Stetigkeit von ρ werden manche $B_\varepsilon(t_0)$ von ρ auf N abgebildet.

Dieser Widerspruch zeigt N = M.

Satz 11: Die Abbildung $\rho : Sp(1) \rightarrow SO(3)$ ist surjektiv (Kapitel V)

Beweis:

Da ρ ein Homöomorphismus in einer bestimmten Umgebung von jedem Punkt ist, haben wir, dass das Bild $\rho(Sp(1))$ eine 3-Mannigfaltigkeit ist. Da ρ stetig ist, ist das Bild eine abgeschlossene 3-Mannigfaltigkeit (Satz 5). Es reicht nun zu zeigen, dass SO(3) zusammenhängend ist(dann können wir Satz 10 verwenden). Es genügt zu zeigen, dass es für jedes $A \in SO(3)$ einen Weg in SO(3) zur Einheitsmatrix gibt.

Es gilt det A = 1 und $\{Ae_1, Ae_2, Ae_3\}$ ist eine orthonormal Basis für den IR^3. Nun sei B eine Drehung, die e_1 zu Ae_1 sendet und die Richtung fest lässt (senkrecht zur Ebene (e_1, Ae_1)). (Wenn $Ae_1 = e_1$ können wir zum nächsten Schritt übergehen, wenn e_1 und Ae_1 antipodisch auf S^2 liegen, dann haben wir zwei Möglichkeiten für B)

Es gibt einen Weg ω von I nach B in SO(3). Somit gilt: $Be_1 = Ae_1$, also Be_2 und Be_3 sind eine orthonormal Basis für die Ebene senkrecht auf Ae_1. Sei C eine Drehung dieser Ebene, die Be_2 zu Ae_2 und Be_3 zu Ae_3 macht. (Wäre dies nicht möglich, hätten wir detA = -1.) Es gibt einen Weg σ von I nach C in SO(3). Da A = BC, können wir die Wege ω und σ multiplizieren, um einen Weg von I nach A zu erhalten, der in SO(3) verläuft.