

Der Auswahlatz von Blaschke

Ausarbeitung eines Vortrags im Seminar *Konvexe Mengen*

Wilfried Grabbe

17. März 2005

Viele mathematische Probleme erfordern einen Existenzbeweis, welcher sich oft als schwierig herausstellt und eine individuelle Herangehensweise erfordert, sofern das Problem keiner Struktur zugeordnet werden kann, in der es bereits nachgewiesenermaßen über bestimmte Eigenschaften verfügt, diese also existieren.

Derartige Strukturen sind etwa kompakte Teilmengen metrischer Räume. Auf ihnen nehmen stetige reellwertige Funktionen jeweils ein Minimum und Maximum an.

Die vorliegende schriftliche Ausarbeitung meines Vortrags im Seminar *Konvexe Mengen* (Veranstaltung von Prof. Dr. Eberhard Oeljeklaus im Wintersemester 2004/05 an der Universität Bremen), basierend auf [1], beschreibt die Konstruktion von kompakten metrischen Räumen auf der Familie \mathcal{C} der konvexen kompakten nicht-leeren Teilmengen des n -dimensionalen euklidischen Raums. Damit ist beispielsweise die Existenz einer Lösung des isometrischen Problems nachzuweisen (siehe Satz 3.2), da dort der Flächeninhalt als stetige reellwertige Funktion auf \mathcal{C} angesehen werden kann.

Zentraler Bestandteil dieser Abhandlung ist der Auswahlatz von Blaschke, der eine Überführung des Satzes von Bolzano-Weierstraß von \mathbb{C} auf \mathcal{C} darstellt und damit Kompaktheit auf \mathcal{C} charakterisiert.

1 Eine Metrik auf konvexen kompakten Teilmengen des E^n

Zunächst gilt es, einen Abstandsbegriff für konvexe kompakte Mengen einzuführen, der die Kriterien für eine Metrik erfüllt. Die einfache Distanz-Funktion $d(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$, $A, B \subset E^n$ scheidet bereits an der Bedingung $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$, da sie nur die Position zweier Mengen zueinander berücksichtigt, nicht aber ihre Ähnlichkeit bzgl. der Form. So gilt $d(A, B) = 0$ für alle Mengen $A, B \subset E^n$, sofern sie nur einen Punkt gemeinsam haben, in jedem Fall für unendlich viele Mengen innerhalb einer beliebigen Umgebung eines Punktes in E^n .

Die im folgenden beschriebene Abstands-Funktion verwendet den Begriff der Parallel-Menge:

Definition 1.1 (Parallel-Menge). Sei $A \subset E^n$ konvex und nicht leer. Die Parallel-Menge A_δ ist definiert als

$$A_\delta = \bigcup_{a \in A} K(a, \delta), \quad \delta > 0,$$

wobei $K(a, \delta)$ die abgeschlossene Kugel um a mit Radius δ bezeichnet.

Satz 1.2. Die Parallel-Menge ist ebenfalls konvex.

Beweis. Sei A konvex und nicht leer.

$$A_\delta = \bigcup_{a \in A} K(a, \delta) = \bigcup_{a \in A} (a + K(0, \delta)) = \{a + x : a \in A, x \in K(0, \delta)\} \stackrel{[1], \text{Def. 1.16}}{=} A + K(0, \delta).$$

Die Summe zweier konvexer Mengen ist konvex, denn seien X, Y konvex und sei für $i \in \{1, 2\}$ der Punkt $z_i := x_i + y_i$ mit $x_i \in X, y_i \in Y$, folglich $z_i \in (X + Y)$, so gilt für $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2 &= \lambda(x_1 + y_1) + (1 - \lambda)(x_2 + y_2) = \underbrace{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2}_{\in X} + \underbrace{(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2)}_{\in Y} \\ &\in X + Y \end{aligned}$$

Also ist A_δ konvex. □

Satz 1.3. Ist $A \subset E^n$ konvex und nicht leer, so gilt $(A_\delta)_\varepsilon = A_{\delta+\varepsilon}$.

Beweis. Die im vorangehenden Beweis verwendete Addition von Mengen ist assoziativ. Damit erhält man unter Zuhilfenahme der dort benutzten Umformung von A_δ einerseits

$$(A_\delta)_\varepsilon = A_\delta + K(0, \varepsilon) = (A + K(0, \delta)) + K(0, \varepsilon) \stackrel{\text{Assoz.}}{=} A + (K(0, \delta) + K(0, \varepsilon)),$$

$$\text{andererseits } A_{\delta+\varepsilon} = A + K(0, \delta + \varepsilon).$$

Zu zeigen ist also lediglich, dass $K(0, \delta) + K(0, \varepsilon) = K(0, \delta + \varepsilon)$:

Sei $x \in K(0, \delta + \varepsilon)$. Dann existiert wegen $d(0, x) \leq \delta + \varepsilon$ und $K(0, \delta + \varepsilon) \subset E^n$ (Vollständigkeit) jedenfalls ein $y \in K(0, \delta)$, so dass $x \in K(y, \varepsilon) = y + K(0, \varepsilon)$. Diese Aussage ist qua Definition der Mengensumme äquivalent zu $x \in (K(0, \delta) + K(0, \varepsilon))$.

Ist also umgekehrt $x \in (K(0, \delta) + K(0, \varepsilon))$, so folgt

$$\begin{aligned} \exists y \in K(0, \delta) : x &\in y + K(0, \varepsilon) \\ \Rightarrow d(0, x) &\leq d(0, y) + \varepsilon \leq \delta + \varepsilon \Rightarrow x \in K(0, \delta + \varepsilon). \end{aligned}$$

□

Nun zum besagten Abstands begriffs. Der Definition folgt ein Beispiel, das den Leser mit der Anwendung des Begriffs vertraut macht und schließlich der Beweis, dass es sich dabei tatsächlich um eine Metrik handelt.

Im Folgenden bezeichnet wie schon in der Einleitung \mathcal{C} als die Familie (hier synonym zu „Menge von Mengen“ verwendet) der konvexen kompakten nicht-leeren Teilmengen des E^n .

Definition 1.4 (Distanz D). Seien $A, B \in \mathcal{C}$. Die Distanz D zwischen A und B ist definiert als

$$D(A, B) := \inf\{\delta > 0 : A \subset B_\delta, B \subset A_\delta\}.$$

Beispiel 1.5. Seien $A := \{(x, y) : 1 \leq x, y \leq 3\}$, $B := \{(x, y) : (x - 4)^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$, $A, B \subset E^2$ (siehe Abb. 1). Es ist klar, dass $d(A, B) = 0$, da der Punkt $(3, 1)$ sowohl in A als auch B enthalten ist. Zur Bestimmung von $D(A, B)$ betrachte man $\inf\{\delta : B \subset A_\delta\}$ und $\inf\{\delta : A \subset B_\delta\}$ getrennt.

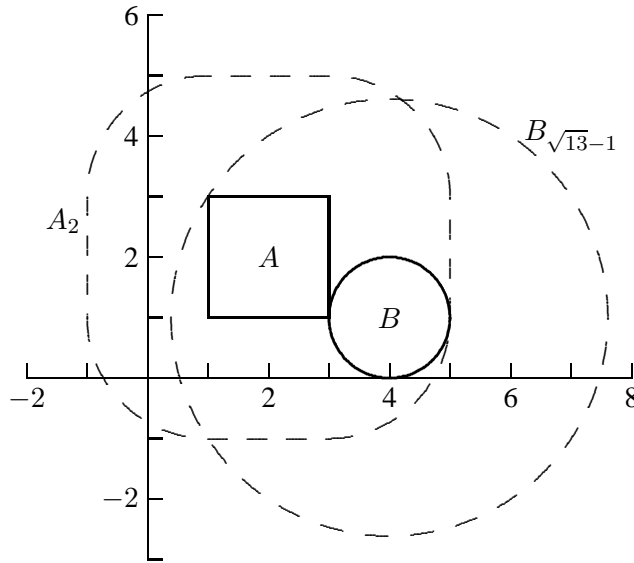
Da $(3, 1)$ derjenige Punkt von A ist, der den geringsten Abstand zu B aufweist, wird der Wert des ersten Ausdrucks bestimmt durch das δ der kleinsten δ -Umgebung um $(3, 1)$, in der B noch vollständig enthalten ist: offenbar 2. Die Parallel-Menge A_2 ist im Bild gestrichelt eingezeichnet.

$\inf\{\delta : A \subset B_\delta\}$ ergibt sich durch die kleinste Parallel-Menge von B , in der $(1, 3)$, der am weitesten von B entfernt liegenden Punkt von A noch enthalten ist bzw. durch den Abstand von $(1, 3)$ zu B , der gerade der Hypotenusenlänge des eingezeichneten Dreiecks minus dem Radius von B entspricht:

$$\begin{aligned} \inf\{\delta : A \subset B_\delta\} &= d((4, 1); (1, 3)) - 1 = \sqrt{3^2 + 2^2} - 1 = \sqrt{13} - 1 > 2 \\ \Rightarrow D(A, B) &= \sqrt{13} - 1 \end{aligned}$$

Es mag allgemeinere, systematischere Vorgehensweise bei der Ermittlung von $D(A, B)$ geben. Die Entwicklung solcher Methoden soll aber nicht Gegenstand dieser Abhandlung sein.

Abbildung 1:



Satz 1.6. D ist Metrik auf \mathcal{C} , d.h.

$$D(A, B) > 0 \Leftrightarrow A \neq B \quad (1.1)$$

$$D(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B \quad (1.2)$$

$$D(A, B) = D(B, A) \quad (1.3)$$

$$D(A, C) \leq D(A, B) + D(B, C) \quad (1.4)$$

für Mengen $A, B, C \in \mathcal{C}$.

Beweis. Seien $A, B, C \in \mathcal{C}$. Die Bedingungen (1.1) bis (1.3) ergeben sich aus der Definition von D . Zunächst zu (1.2):

$$D(A, B) = 0 \Leftrightarrow \forall \delta > 0 : A \subset B_\delta \text{ und } B \subset A_\delta \quad (1.5)$$

Gilt $A = B$, so auch die rechte Seite von (1.5), also folgt $D(A, B) = 0$.

Da sowohl A als auch A_δ abgeschlossen sind, gilt $\lim_{\delta \rightarrow 0} A_\delta = A$. Ist also umgekehrt $D(A, B) = 0$, so folgt aus (1.5): $A \subset B_\delta \stackrel{\delta \rightarrow 0}{=} B$ und $B \subset A_\delta \stackrel{\delta \rightarrow 0}{=} A$, insgesamt $A = B$.

Wegen $D(A, B) \geq 0$ gilt damit automatisch (1.1), und (1.3) ergibt sich durch einfaches Umstellen:

$$D(A, B) = \inf\{\delta > 0 : A \subset B_\delta, B \subset A_\delta\} = \inf\{\delta > 0 : B \subset A_\delta, A \subset B_\delta\} = D(B, A).$$

Interessant ist Bedingung (1.4): Seien $\alpha := D(A, B)$, $\beta := D(B, C)$, $\gamma := \alpha + \beta$. Dann gilt

$$B \subset A_\alpha \Rightarrow B_\beta \subset (A_\alpha)_\beta \stackrel{\text{Satz 1.3}}{=} A_{\alpha+\beta} = A_\gamma, \quad (1.6)$$

womit aus $C \subset B_\beta$ (nach Voraussetzung) folgt: $C \subset A_\gamma$. Analog erhält man

$$\underbrace{B \subset C_\beta}_{\text{Voraus.}} \Rightarrow \underbrace{A \subset B_\alpha}_{\text{Voraus.}} \subset (C_\beta)_\alpha = C_{\beta+\alpha} = C_\gamma. \quad (1.7)$$

Aus (1.6) und (1.7) folgt insgesamt

$$D(A, C) \leq \gamma = \alpha + \beta = D(A, B) + D(B, C).$$

□

\mathcal{C} ist mit der Metrik D also ein metrischer Raum. Analog zu bekannten metrischen Räumen wie $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist es nun möglich, zu entscheiden, wann eine Folge in (\mathcal{C}, D) konvergiert.

Definition 1.7 (Konvergenz). Eine Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Mengen in \mathcal{C} konvergiert gegen eine Menge A (welche nicht notwendigerweise in \mathcal{C} liegt) genau dann wenn

$$\lim_{i \rightarrow \infty} D(A_i, A) = 0.$$

A heißt auch Grenzwert der Folge (A_i) .

Eine Eigenschaft des Grenzwertes soll an dieser Stelle nicht unerwähnt bleiben, da sie an späterer Stelle von Bedeutung ist:

Satz 1.8. Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{C} . Konvergiert (A_i) gegen eine kompakte Menge $A \subset E^n$, so ist A konvex.

Lemma 1.9. Seien x, x', y, y' Punkte im E^n und gelte $d(x, x') < \delta$, $d(y, y') < \delta$, $\delta > 0$, so existiert zu jedem $z \in \overline{x'y}$ ein $z' \in \overline{x'y'}$, für das gilt $d(z, z') < \delta$.

Beweis. Es ist $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, $\lambda \in [0, 1]$. Sei nun $z' := \lambda x' + (1 - \lambda)y'$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(z, z') &= d(\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda x' + (1 - \lambda)y') \\ &\leq d(\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda x' + (1 - \lambda)y) + d(\lambda x' + (1 - \lambda)y, \lambda x' + (1 - \lambda)y') \\ &= \lambda d(x, x') + (1 - \lambda)d(y, y') \\ &< \lambda \delta + (1 - \lambda)\delta = \delta \end{aligned}$$

□

Beweis des Satzes. Angenommen A ist nicht konvex. Dann existieren Elemente $x, y \in A$, $z \notin A : z \in \overline{xy}$ (siehe Abb. 2). Weil A abgeschlossen ist, ist $E^n \setminus A$ offen. Also

$$\exists \delta > 0 : B(z, \delta) \cap A = \emptyset. \quad (1.8)$$

Aus der Voraussetzung $(A_i) \rightarrow A$ folgt ferner

$$\exists l \in \mathbb{N} : D(A_l, A) < \frac{\delta}{2}. \quad (1.9)$$

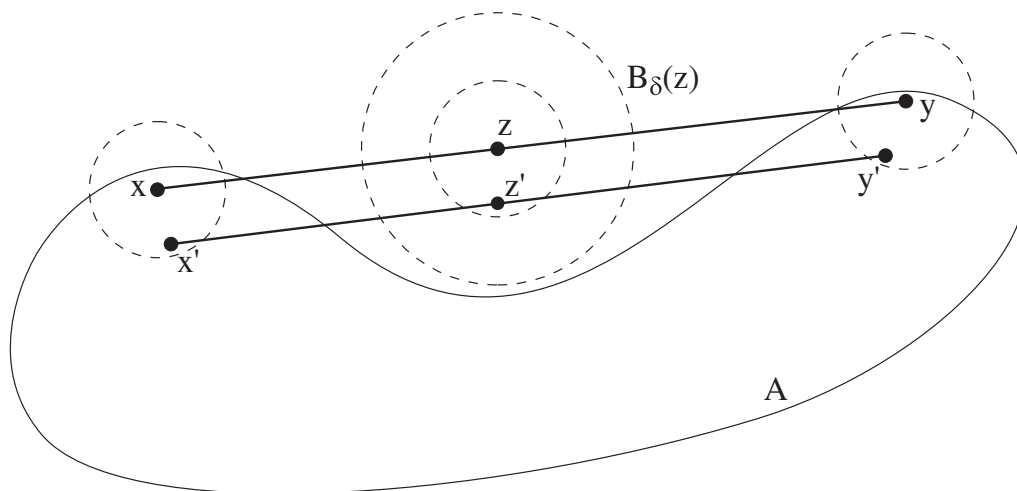
Wähle nun Punkte $x', y' \in A_l$ so, dass $d(x, x') < \frac{\delta}{2}$, $d(y, y') < \frac{\delta}{2}$. Aus Lemma 1.9 folgt, dass dann ein Punkt $z' \in \overline{x'y'}$ ^{Voraus.} $\subset A_l$ existieren muss, für den $d(z, z') < \frac{\delta}{2}$. Dann aber gilt $d(z', A) > \frac{\delta}{2}$ (wegen $d(z, A) > \delta$ gemäß (1.8)). Aus letzterem folgt

$$z' \notin A_{\frac{\delta}{2}} \stackrel{(1.9)}{\supset} A_l \ni z' \quad \not\leftarrow$$

Die Annahme führt zum Widerspruch. Also muss A konvex sein.

□

Abbildung 2:



2 Der Auswahlatz von Blaschke

Der nun folgende Abschnitt widmet sich dem Beweis des wichtigsten Satzes dieser Abhandlung. Mit einem Anwendungsbeispiel und dem Zusammenhang mit dem Begriff der Kompaktheit befasst sich Abschnitt 3.

Es wird eine spezielle Form von Beschränkt verwendet:

Definition 2.1 (Gleichmäßige Beschränktheit). Eine Menge $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}$ heißt gleichmäßig beschränkt, wenn es eine Kugel in E^n gibt, die alle Elemente von \mathcal{M} umfasst.

Satz 2.2 (Auswahl- oder auch Konvergenzatz von Blaschke). Sei \mathcal{M} eine gleichmäßig beschränkte unendliche Teilmenge von \mathcal{C} . Dann enthält \mathcal{M} eine Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\#\{A_i, i \in \mathbb{N}\} = \infty$, die gegen ein Element aus \mathcal{C} konvergiert.

Bemerkung. Ohne das Kriterium der unendlichen Anzahl verschiedener Folgenglieder würde trivialerweise jede konstante Folge in \mathcal{M} den Satz erfüllen. Auch lässt er sich nur in der angegebenen Form analog zum Satz von Bolzano-Weierstraß verwenden.

Der Beweis gliedert sich in zwei Abschnitte, die in den folgenden Lemmata zunächst getrennt voneinander betrachtet werden.

Lemma 2.3. Sei \mathcal{M} eine gleichmäßig beschränkte unendliche Teilmenge von \mathcal{C} . Dann enthält \mathcal{M} eine Cauchy-Folge $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit paarweise verschiedenen Elementen, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : D(C_i, C_j) < \varepsilon, i, j \geq N, C_i \neq C_j$.

Bemerkung. Man überlegt sich leicht, dass die erwähnte Folge mit paarweise verschiedenen Elementen nur Spezialfall einer Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $\#\{A_i, i \in \mathbb{N}\} = \infty$ ist.

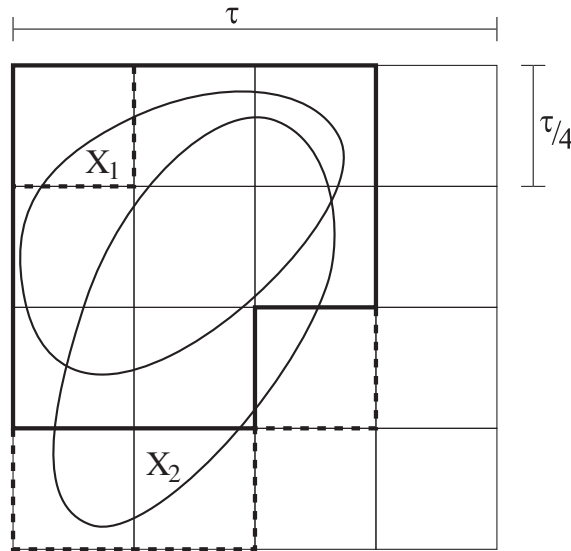
Beweis des Lemmas. Sei $i \in \mathbb{N}$, und sei $A \subset E^n$ ein n -dimensionaler gleichseitiger Quader mit Seitenlänge τ , welcher alle Elemente von \mathcal{M} enthält. Da \mathcal{M} gleichmäßig beschränkt ist, existiert stets ein solcher Quader.

Durch Teilung jeder Seite des Quaders in 2^i gleichlange Abschnitte erhält man eine Partitionierung von

A in eine Menge K_i von kongruenten Quadrern mit Kantenlänge $2^{-i}\tau$. K_i besitzt 2^{in} Elemente.

Definition (Minimale Überdeckung). Es bezeichne $T \subset K_i$ eine minimale Überdeckung einer Menge $X \in \mathcal{M}$ genau dann, wenn $X \subset T$, $\forall B \in T : B \cap X \neq \emptyset$. Siehe hierzu Abb. 3.

Abbildung 3:



Da $\#K_1 < \infty$, ist auch die Anzahl der Möglichkeiten für minimale Überdeckungen in K_1 endlich, während die Anzahl der Elemente von \mathcal{M} unendlich ist. Damit existiert eine abzählbar unendliche Folge $(C_{1\alpha})_{\alpha \in \mathbb{N}}$ von Mengen in \mathcal{M} mit identischer minimaler Überdeckung in K_1 .

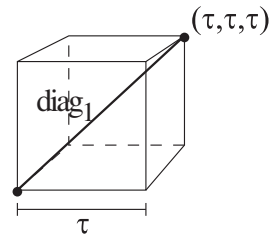
Auf dieselbe Weise lässt sich argumentieren, dass es eine unendliche Teilfolge $(C_{2\alpha})_{\alpha \in \mathbb{N}}$ von $(C_{1\alpha})$ gibt, dessen Folgenglieder dieselbe minimale Überdeckung in K_2 besitzen.

Iterativ fortgesetzt hat man es mit einer Doppelfolge $(C_{i\alpha})_{i, \alpha \in \mathbb{N}}$ zu tun. Für festes i besitzen die Elemente von $\{C_{i\alpha} : \alpha \in \mathbb{N}\}$ die selbe minimale Überdeckung in K_i . Es folgt:

$$D(C_{i\alpha}, C_{i\beta}) < \text{diag}_i, \alpha, \beta \in \mathbb{N}.$$

diag_i bezeichne hierbei die Diagonale eines Quaders in K_i (für $K_1 \subset E^3$ siehe Abb. rechts). Sein Wert ergibt sich als

$$\text{diag}_i = \left| \frac{\overbrace{(\tau, \dots, \tau)}^{n\text{-mal}}}{2^i} \right| \stackrel{\text{Pythagoras}}{=} \sqrt{n \frac{\tau^2}{2^{2i}}} = \frac{\tau \sqrt{n}}{2^i}$$



Wegen $\{C_{(i+1)\alpha} : \alpha \in \mathbb{N}\} \subset \{C_{i\alpha} : \alpha \in \mathbb{N}\}$, $i \in \mathbb{N}$ ist für $j > i$ die Folge $(C_{j\alpha})$ Teilfolge von $(C_{i\alpha})$, also gilt auch $D(C_{i\alpha}, C_{j\beta}) < \text{diag}_i$. Um letztendlich wieder eine einfach indizierte Folge zu erhalten, definiere man $C_k := C_{kk}$.

$(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ enthält damit jedenfalls paarweise verschiedene Elemente, und es gilt

$$D(C_i, C_j) < \text{diag}_i \quad \forall j \geq i, \text{ woraus folgt:}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : D(C_i, C_j) < \varepsilon, \quad i, j \geq N.$$

□

Den Beweis eines wichtigen Zwischenschritts im zweiten Beweis-Abschnitt des Satzes von Blaschke stelle ich diesem der Übersichtlichkeit halber voran:

Lemma 2.4. Sei $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine absteigende Folge von kompakten Teilmengen des E^n , d.h. $B_{k+1} \subset B_k$, $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $B := \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ ebenfalls kompakt und nicht-leer.

Beweis. $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ ist abgeschlossen, da die B_k abgeschlossen sind und beliebige Schnitte über abgeschlossenen Mengen ebenfalls. Ferner ist der Schnitt einer kompakten mit einer abgeschlossenen Menge wieder kompakt, also ist $B \cap B_1$ kompakt, und $B \cap B_1 = B$.

Es ist noch zu zeigen, dass B nicht leer ist: Sei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in B_1 mit $a_i \in B_i$ (existiert nach Bolzano-Weierstraß, da B_1 kompakt).

(a_i) besitzt demnach einen Häufungspunkt in B_1 , und nach Konstruktion gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, dass (a_i) ab dem k -ten Folgenglied auch Folge in B_k ist mit Häufungspunkt in B_k . Daher kann $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ nicht leer sein. □

Lemma 2.5. Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}$ gleichmäßig beschränkt. Ist $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in \mathcal{M} , so existiert eine Menge $B \in \mathcal{C}$, für die gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} D(C_k, B) = 0.$$

Bemerkung. B ist nicht zwangsläufig Element von \mathcal{M} .

Beweis. Die Aussage $\lim_{k \rightarrow \infty} D(C_k, B) = 0$ ist äquivalent zu

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : C_k \subset B_\varepsilon, B \subset (C_k)_\varepsilon, k \geq N \quad (2.1)$$

Es genügt daher zu zeigen, dass es eine Menge $B \in \mathcal{C}$ gibt, für die (2.1) gilt.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und sei $B_k := \text{cl}(C_k \cup C_{k+1} \cup \dots)$.

B_k ist abgeschlossen per Definition und beschränkt durch die gleichmäßige Beschränktheit von \mathcal{M} ; weil $B_k \subset E^n$, ist B_k also kompakt (nach dem Satz von Heine-Borel). Wie man leicht sieht, ist B_k zudem eine absteigende Folge. Gemäß Lemma 2.4 ist $B := \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ daher schon einmal kompakt und nicht-leer.

Es gilt

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall k \geq N_1 : B_k \subset \text{int}(B)_\varepsilon,$$

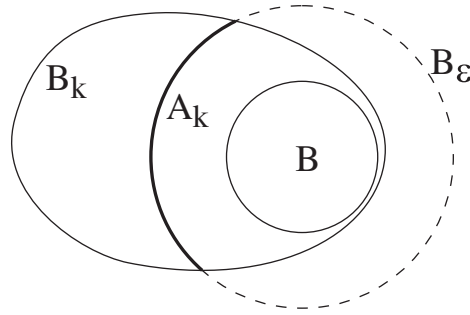
denn angenommen, es existiere kein k , für welches $B_k \subset \text{int}(B)_\varepsilon$. Dann wäre $A_k := B_k \cap \text{bd}(B)_\varepsilon$ nicht leer, da $B \subset B_k$ (siehe Abb. 4), und daher bedingt durch die Monotonie der B_k ebenfalls eine monoton fallende Folge von kompakten Mengen. Mit Lemma 2.4 folgt

$$\exists x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \right) \cap \text{bd}(B)_\varepsilon \Rightarrow \begin{cases} x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = B \text{ und} \\ x \in \text{bd}(B)_\varepsilon \end{cases} \quad \nexists$$

Also

$$\exists N_1 : C_k \stackrel{\text{Def. } B_k}{\subset} B_k \subset \text{int}(B)_\varepsilon \subset B_\varepsilon, k \geq N_1. \quad (2.2)$$

Abbildung 4:



Des Weiteren gilt, da (C_k) nach Voraussetzung Cauchy-Folge ist, $\exists N_2 \in \mathbb{N} : D(C_k, C_j) < \frac{\varepsilon}{2}$, $k, j \geq N_2$. Aus Definition 1.4 folgt

$$\exists N_2 : \bigcup_{j=k}^{\infty} C_j \subset (C_k)_{\frac{\varepsilon}{2}}, \quad k \geq N_2$$

$$\text{und daraus: } B \subset B_k \stackrel{\text{Def.}}{=} \text{cl}\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} C_j\right) \subset (C_k)_{\varepsilon}, \quad k \geq N_2.$$

Diese Gleichung kombiniert mit (2.2) ergibt $D(B, C_k) < \varepsilon$ für $k \geq \max\{N_1, N_2\}$.

Für die vorliegende Menge B gilt also Gleichung (2.1) bzw. es konvergiert (C_k) gegen B . Damit schließlich auch noch $B \in \mathcal{C}$ behauptet werden kann, ist noch nachzuweisen, dass B konvex ist. Das genau aber besagt Satz 1.8. \square

Beweis von Satz 2.2. Der Satz von Blaschke ergibt sich nun einfach durch Anwendung der Lemmata 2.3 und 2.5 hintereinander, ist damit also bewiesen. \square

3 Anwendungen

Der vorangehende Seminarvortrag musste die Lösung des isometrischen Problems, also den Beweis der Existenz einer Figur mit maximaler Fläche unter allen umfangsgleichen Figuren im zweidimensionalen Raum schuldig bleiben, da erst durch Anwendung des Satzes von Blaschke ein solcher Beweis auf einfache Weise und mit überschaubarem Umfang geführt werden kann, wie die nächsten Absätze zeigen. Es wird die folgende bekannte Definition für Stetigkeit benutzt:

Definition 3.1 (Folgenkriterium für Stetigkeit). Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ eine Familie von Mengen. Eine Funktion $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig auf \mathcal{F} genau dann, wenn für jede Folge $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{F} , die gegen ein $S \in \mathcal{F}$ konvergiert, gilt:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f(S_i) = f\left(\lim_{i \rightarrow \infty} S_i\right) = f(S).$$

Satz 3.2. Sei $\mathcal{F} \subset E^2$ die Familie der ebenen Figuren mit Umfang 1. Dann enthält \mathcal{F} eine Figur mit maximalem Flächeninhalt.

Beweis. Sei S der Kreis mit Radius 1 im E^2 . S beschränkt damit jedes Element aus \mathcal{F} nach Translation. Mengen mit leerem Inhalt und nicht-konvexe Mengen aus \mathcal{F} sind vernachlässigbar, da sie offensichtlich nicht maximalen Flächeninhalt besitzen. Man betrachte also $\mathcal{F}' := \{F \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C} : \text{int}(F) \neq \emptyset\}$.

Für $F \in \mathcal{F}'$ ist der Flächeninhalt $A(F)$ beschränkt durch $A(S) = \pi$. Also gibt es zumindest ein Supremum $m := \sup_{F \in \mathcal{F}} A(F) \in (0, \pi]$.

Sei nun $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{F}' , sodass $A(F_i)$ gegen m konvergiert (existiert gemäß einer der Supremums-Definitionen). $\{F_i : i \in \mathbb{N}\}$ ist eine unendliche Teilmenge von \mathcal{C} und gleichmäßig beschränkt durch S . Nach dem Satz von Blaschke besitzt (F_i) damit eine Teilfolge $(F_j)_{j \in \mathbb{N}}$, die gegen ein $F^* \in \mathcal{C}$ konvergiert. Die reellwertige Umfangsfunktion P und die Flächeninhaltsfunktion A sind stetig auf \mathcal{F}' . Der Beweis würde den Rahmen dieser Abhandlung sprengen. Er wird in Kapitel 22 von [1] durchgeführt. Dies vorausgesetzt gilt

$$P(F^*) \stackrel{\text{Satz 2.2}}{=} P(\lim_{j \rightarrow \infty} F_j) \stackrel{P \text{ stetig}}{=} \lim_{j \rightarrow \infty} P(F_j) \stackrel{P \text{ konstant auf } \mathcal{F}}{=} 1 \Rightarrow F^* \in \mathcal{F}'$$

und weiter

$$\begin{aligned} A(F^*) &= A(\lim_{j \rightarrow \infty} F_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} A(F_j) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} A(F_i), \text{ da Teilfolgen den selben Grenzwert besitzen} \\ &\stackrel{\text{Voraus.}}{=} m. \end{aligned}$$

F^* hat also von allen ebenen Figuren mit Umfang 1 den maximalen Flächeninhalt. □

Zugegebenermaßen ist der obige Beweis noch recht individuell auf das isometrische Problem zugeschnitten und nicht ohne Weiteres auf andere Probleme übertragbar. Mit Einführung des Kompaktheitsbegriffs auf \mathcal{C} können jedoch auch allgemeinere Existenzbeweise geführt werden:

Definition 3.3 (Kompaktheit). Eine Familie \mathcal{F} von Mengen aus \mathcal{C} heißt kompakte Familie genau dann, wenn jede Folge in \mathcal{F} eine konvergente Teilfolge besitzt, die gegen ein Element in \mathcal{F} konvergiert.

Satz 3.4. Ist $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ kompakte Familie und $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so nimmt g auf \mathcal{F} ein Minimum und ein Maximum an.

Beweis für die Existenz des Maximums. $g(\mathcal{F})$ ist kompakt, weil in metrischen Räumen das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Funktion wieder kompakt ist. Also ist $g(\mathcal{F})$ ein Intervall in \mathbb{R} . Seien $m := \sup_{F \in \mathcal{F}} g(F)$ und $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Folge in \mathcal{F} , die gegen m konvergiert. Weil \mathcal{F} kompakt ist, besitzt nach Definition 3.3 (F_i) eine konvergente Teilfolge $(F_j)_{j \in \mathbb{N}}$, die gegen ein $F' \in \mathcal{F}$ konvergiert. Wegen der Stetigkeit von g erhält man

$$g(F') = g(\lim_{j \rightarrow \infty} F_j) = \lim_{j \rightarrow \infty} g(F_j) = \lim_{i \rightarrow \infty} g(F_i) = m.$$

Der Beweis für die Existenz des Minimums verläuft analog. □

Es bleibt für eine gegebene Menge aus \mathcal{C} nachzuweisen, dass sie eine kompakte Familie darstellt. Zum Abschluss dieser Ausarbeitung erbringe ich diesen Nachweis für die Menge aller konvexen kompakten nicht-leeren Teilmengen einer konvexen kompakten Teilmenge K des E^n , also

Satz 3.5. $\mathcal{F} := \{X \in \mathcal{C} : X \subset K \text{ für festes } K \subset E^n \text{ konvex, kompakt}\}$ ist eine kompakte Familie.

Beweis. Zu zeigen ist, dass der Satz von Blaschke nach wie vor gilt, wenn \mathcal{C} durch das eben definierte \mathcal{F} ersetzt wird. Und in der Tat: Lemma 2.3 kann ohne Änderung übernommen werden, da jede Teilmenge \mathcal{M} von \mathcal{F} auch Teilmenge von \mathcal{C} ist.

Im zweiten Lemma 2.5 ist lediglich der Nachweis hinzuzufügen, dass die im zugehörigen Beweis konstruierte Menge B Teilmenge von K und damit Element von \mathcal{F} ist. Dies ist aber leicht einzusehen, denn sind $C_1, C_2 \in \mathcal{F}$, so ist $\text{cl}(C_1 \cap C_2) \subset K$, also auch $B_k := \text{cl}(C_k \cap C_{k+1} \dots)$ und damit offenbar auch $B := \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$.

Für jede Folge $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{F} ist $\{S_i : i \in \mathbb{N}\}$ gleichmäßig beschränkte Teilmenge von \mathcal{F} . (S_i) besitzt nach dem Satz von Blaschke also eine konvergente Teilfolge, die gegen ein Element aus \mathcal{F} konvergiert. Nach Definition 3.3 ist \mathcal{F} daher eine kompakte Familie, und für reellwertige stetige Funktionen auf \mathcal{F} gilt Satz 3.4. \square

Literatur

- [1] Y, X: *Convex Sets*. Unknown, 1975