Proseminar Konvexe Mengen: Der Satz von Carathéodory

Gerrit Grenzebach

26. Oktober 2004

In diesem Referat werden der Begriff der konvexen Hülle einer Menge eingeführt und einige Eigenschaften der konvexen Hülle behandelt. Dazu wird – nach einer Auflistung wichtiger Begriffe, die bereits bekannt sein sollten – zunächst der Satz von Carathéodory bewiesen. Speziell werden danach noch die konvexe Hülle endlicher Mengen sowie die konvexe Hülle von offenen oder kompakten Mengen betrachtet. Als Grundlage für dieses Referat ist das Buch „Convex sets and their applications“ von Steven R. Lay (New York etc.: John Wiley & Sons, 1982), Seite 16 bis 22, verwendet worden.

Einige wichtige Begriffe

In diesem Abschnitt werden einige Begriffe und Sätze aufgeführt, die bereits im ersten Referat vorgestellt worden sind. Sie werden aber später benötigt, so daß hier nur daran erinnert werden soll.

Eine Anmerkung zur Notation: Ein reeller Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit Skalarprodukt wird mit E^n bezeichnet.

Definition (2.14): *Eine Linearkombination* $y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ *von* $x_1, \ldots, x_k \in \mathrm{E}^n$ *mit reellen Koeffizienten* λ_i *heißt*
- ***Affinkombination****, falls* $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$,
- ***Konvexkombination****, falls* $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ *und* $\lambda_i \geq 0$ *für alle i.*

Satz (2.15): *Für* $S \subset \mathrm{E}^n$ *gilt:*

S konvex $\iff$ *Jede Konvexkombination von Elementen aus S liegt in S.*

Satz (2.16): *Für* $S \subset \mathrm{E}^n$ *gilt:*

S affin $\iff$ *Jede Affinkombination von Elementen aus S liegt in S.*

Definition (2.17): *Eine endliche Menge $\{x_1, \ldots, x_m\}$ heißt **affin abhängig**, wenn es reelle Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ gibt, $\lambda_i \neq 0$ für mindestens ein i, so daß*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0 \quad \textit{und} \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = 0.$$

*Andernfalls heißt die Menge **affin unabhängig**.*

Satz (2.18): *Sei $S \subset \mathrm{E}^n$. Es gilt:*

$$\begin{aligned} S \text{ hat } (n+1) \text{ Elemente} &\implies S \text{ ist linear abhängig,} \\ S \text{ hat } (n+2) \text{ Elemente} &\implies S \text{ ist affin abhängig.} \end{aligned}$$

Der Satz von Carathéodory

Bevor wir den Satz von Carathéodory[1] beweisen, führen wir zunächst die zentralen Begriffe der *konvexen* und der *affinen Hülle* ein und zeigen einen etwas allgemeineren Satz.

Definition (2.20): *Die **konvexe Hülle** einer Menge S ist der Durchschnitt aller konvexen Mengen, die S enthalten. Man bezeichnet sie als* $\operatorname{conv} S$.

Definition (2.21): *Die **affine Hülle** einer Menge S ist der Durchschnitt aller affinen Mengen, die S enthalten. Man bezeichnet sie als* $\operatorname{aff} S$.

Bemerkung:

- Die konvexe (affine) Hülle einer Menge S ist die „kleinste" konvexe (affine) Menge[2], die die Menge S enthält.
- Es gilt: S konvex $\Leftrightarrow S = \operatorname{conv} S$, und S affin $\Leftrightarrow S = \operatorname{aff} S$.
- Da nach Satz (2.13) jede affine Menge $A \subset \mathrm{E}^n$ ein affiner Unterraum von E^n ist, können wir die Dimension einer Menge S als die Dimension der affinen Hülle von S festlegen:

$$\dim S := \dim(\operatorname{aff} S)$$

Satz (2.22): *Für jede Menge $S \subset \mathrm{E}^n$ besteht die konvexe (affine) Hülle von S aus allen Konvexkombinationen (Affinkombinationen) von Elementen aus S:*

$$\operatorname{conv} S = \left\{ \sum_{j \in J} \lambda_j x_j \;\middle|\; J \text{ endlich}, x_j \in S, \lambda_j \geq 0, \sum_{j \in J} \lambda_j = 1 \right\}$$

$$\operatorname{aff} S = \left\{ \sum_{j \in J} \lambda_j x_j \;\middle|\; J \text{ endlich}, x_j \in S, \sum_{j \in J} \lambda_j = 1 \right\}$$

[1] Constantin Carathéodory: * 13. 9. 1873 Berlin, † 2. 2. 1950 München, deutscher Mathematiker griechischer Abstammung.

[2] Zur Definition einer konvexen oder affinen Menge sei auf den ersten Vortrag von Norman Wirsik verwiesen.

Beweis: Der Beweis wird für konvexe Hüllen geführt. Für affine Hüllen ist der Beweis analog.

Sei $T := \left\{\sum_{j\in J} \lambda_j x_j \;\middle|\; J \text{ endlich}, x_j \in S, \lambda_j \geq 0, \sum_{j\in J} \lambda_j = 1\right\}$ die Menge aller Konvexkombinationen von Elementen aus S. Nach Satz (2.15) liegen alle Konvexkombinationen von Elementen aus $\operatorname{conv} S$ in $\operatorname{conv} S$. Da $S \subset \operatorname{conv} S$, gilt:

$$T \subset \operatorname{conv} S.$$

Seien $x, y \in T$ mit $x := \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j$ und $y := \sum_{j=1}^{l} \beta_j y_j$. Für $z \in \overline{xy}$ folgt:

$$\begin{aligned} z &= \lambda x + (1 - \lambda y) \quad \text{für ein } 0 \leq \lambda \leq 1 \\ &= \sum_{j=1}^{k} \lambda \alpha_j x_j + \sum_{i=1}^{l} (1-\lambda)\beta_i y_i. \end{aligned}$$

Dabei ist:

$$0 \leq \lambda\alpha_j \leq 1 \text{ für alle } j, \qquad 0 \leq (1-\lambda)\beta_i \leq 1 \text{ für alle } i,$$
$$\sum_{j=1}^{k} \lambda\alpha_j + \sum_{i=1}^{l} (1-\lambda)\beta_i = 1.$$

Also ist $z \in T$.

Da dieses für jedes $z \in T$ gilt und $x, y \in T$ beliebig gewählt sind, ist T konvex. Außerdem ist $S \subset T$, da jedes x_p eine Konvexkombination ist:

$$x_p = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i \quad \text{mit} \quad \lambda_p = 1, \lambda_i = 0 \text{ für } i \neq p.$$

Nach Definition der konvexen Hülle ist damit

$$\operatorname{conv} S \subset T.$$

Insgesamt gilt also:

$$\operatorname{conv} S = T. \qquad \blacksquare$$

Der folgende Satz ist von zentraler Bedeutung für die Untersuchung konvexer Mengen. Während der vorige Satz, nach dem jedes Element in der konvexen Hülle einer Menge S als Konvexkombination von endlich vielen Elementen x_j aus S dargestellt werden kann, keine obere Schranke angibt für die Anzahl der notwendigen x_j, begrenzt der Satz von Carathéodory diese: Für eine n-dimensionale Menge genügen $n+1$ Elemente.

Satz (2.23 – Carathéodory): *Sei $S \subset \mathrm{E}^n$, $S \neq \emptyset$. Dann gilt: Jedes $x \in \operatorname{conv} S$ läßt sich als Konvexkombination von höchstens $(n+1)$ Elementen aus S darstellen:*

$$\operatorname{conv} S = \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j \;\middle|\; x_j \in S, \lambda_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1 \right\}.$$

Beweis: Nach Satz (2.22) läßt sich jedes $x \in \operatorname{conv} S$ als endliche Konvexkombination darstellen.

Sei $x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j$ eine Konvexkombination mit $k \geq n+2$, $x_j \in S$. Nach Satz (2.18) sind dann $x_1, \ldots, x_k$ affin abhängig, d. h. es gibt Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ mit:

$$\sum_j \alpha_j x_j = 0, \qquad \sum_j \alpha_j = 0, \qquad \alpha_\ell \neq 0 \text{ für ein } \ell \in \{1, \ldots, k\}$$

Durch Umsortieren (falls notwendig) läßt sich in jedem Fall erreichen:

$$\alpha_k > 0, \qquad \tfrac{\lambda_k}{\alpha_k} \leq \tfrac{\lambda_j}{\alpha_j} \text{ für alle } j \text{ mit } \alpha_j > 0.$$

Für $1 \leq j \leq k$ sei nun $\beta_j := \lambda_j - \frac{\lambda_k}{\alpha_k}\alpha_j$. Dabei gilt:

(I) $\beta_k = 0$

(II) $\sum_{j=1}^{k} \beta_j = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1 - 0 = 1$

(III) $\beta_j \geq 0$ für alle j. Denn:

- Für $\alpha_j \leq 0$ ist $\beta_j = \lambda_j - \frac{\lambda_k}{\alpha_k}\alpha_j \geq \lambda_j \geq 0$.
- Für $\alpha_j > 0$ ist $\beta_j = \lambda_j - \frac{\lambda_k}{\alpha_k}\alpha_j = \alpha_j \underbrace{\left(\frac{\lambda_j}{\alpha_j} - \frac{\lambda_k}{\alpha_k}\right)}_{\geq 0} \geq 0$.

Außerdem gilt, da $\beta_k = 0$:

$$\sum_{j=1}^{k-1} \beta_j x_j = \sum_{j=1}^{k} \beta_j x_j = \sum_{j=1}^{k} \left(\lambda_j - \frac{\lambda_k}{\alpha_k}\alpha_j\right) x_j = \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j}_{= x} - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j}_{= 0} = x.$$

$x \in \operatorname{conv} S$ läßt sich also als Konvexkombination von $(k-1)$ Elementen aus S darstellen: $x = \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j x_j$.

Obiges Verfahren läßt sich so lange fortsetzen, bis x eine Konvexkombination von $n+1$ Elementen aus S ist. Dann kann man dieses Verfahren nicht mehr weiterführen, da dann die $x_1, \ldots, x_{n+1}$ im allgemeinen nicht affin abhängig sind.

Damit läßt sich jedes $x \in \operatorname{conv} S \subset \mathrm{E}^n$ als Konvexkombination von höchstens $(n+1)$ Elementen aus S darstellen. ■

Bemerkung: Die konvexe Hülle einer Menge $S \subset \mathrm{E}^n$ ist die Menge aller Konvexkombinationen von Elementen aus S. Damit läßt sich der Satz von Carathéodory wie folgt formulieren:

$$x \in \operatorname{conv} S \iff x \text{ ist in der konvexen Hülle von höchstens } (n+1) \text{ Punkten } p \in S.$$

Die konvexe Hülle einer endlichen Menge

Definition (2.24): *Die konvexe Hülle einer endlichen Menge $S \subset \mathrm{E}^n$ heißt* ***Polytop*** *(oder konvexes Polytop).*
Die konvexe Hülle einer Menge $S = \{x_1, \dots, x_{k+1}\}$, $\dim S = k$, heißt ***k-dimensionales Simplex****. Die Punkte $x_1, \dots, x_{k+1}$ werden dann als* ***Eckpunkte*** *bezeichnet.*

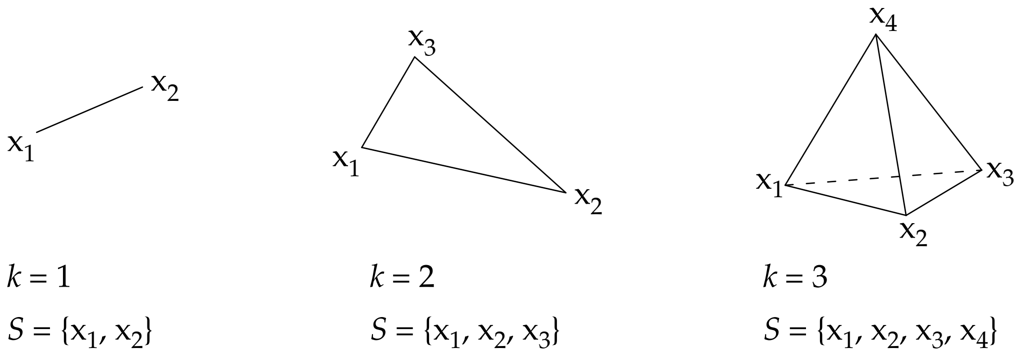

Abbildung 1: Beispiele für Simplizes von endlichen Mengen S.

Im folgenden nehmen wir o. B. d. A. an, daß für eine k-dimensionale Menge $S = \{x_1, \dots, x_{k+1}\} \subset \mathrm{E}^n$ gilt: Die Vektoren $(x_2 - x_1), (x_3 - x_1), \dots, (x_{k+1} - x_1)$ sind linear unabhängig.

Satz (2.25): *Sei $S := \{x_1, \dots, x_{k+1}\}$ eine k-dimensionale Menge, $S \subset \mathrm{E}^n$. Dann besitzt jedes x im Simplex* $\operatorname{conv} S$ *eine eindeutige Darstellung als Konvexkombination $x = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j x_j$.*

Beweis: Nach Satz (2.22) ist jedes $x \in \operatorname{conv} S$ als Konvexkombination $x = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j x_j$ der $k+1$ Elemente von S darstellbar. Sei $x = \sum_{j=1}^{k+1} \beta_j x_j$ eine weitere Konvexkombination. Mit $\lambda_j := \alpha_j - \beta_j$ folgt:

$$\sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j x_j = 0 \qquad \text{mit} \qquad \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j - \sum_{j=1}^{k+1} \beta_j = 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -(\lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_{k+1}) \tag{1}$$

Damit folgt:

$$0 = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j x_j = \sum_{j=2}^{k+1} \lambda_j (x_j - x_1)$$

Da nach obiger Annahme $(x_2 - x_1), (x_3 - x_1), \dots, (x_{k+1} - x_1)$ linear unabhängig sind, ist dieses nur erfüllt, falls $\lambda_j = 0$ für $2 \leq j \leq k+1$. Nach (1) ist dann $\lambda_1 = 0$.

Für alle j gilt dann: $\alpha_j = \beta_j$; jedes $x \in \operatorname{conv} S$ besitzt also eine eindeutige Darstellung als Konvexkombination der $x_j \in S$. ∎

Definition (2.26): *Sei* $T := \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_{k+1}\}$ *ein* k*-dimensionales Simplex. Sei* $x \in T$ *mit der eindeutigen Darstellung* $x = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j x_j$.
Die Koeffizienten α_j *bezeichnet man als* ***Schwerpunktkoordinaten*** *von* x.
Der Punkt $x_0 := \frac{1}{k+1}(x_1 + \ldots + x_{k+1})$ *heißt* ***Zentrum*** *des Simplex.*

Das relative Innere relint S ist das Innere einer Menge S bezüglich des minimalen affinen Unterraums, der S enthält. Zum Beispiel ist für einen Kreis im E^3 das relative Innere des Kreises die offene (zweidimensionale) Kreisscheibe.

Mit Hilfe des Zentrums läßt sich zeigen, daß jede nichtleere konvexe Menge S ein relatives Inneres relint S hat. Dieses zeigen wir zunächst für Simplizes.

Satz (2.27): *Sei* $S := \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_{k+1}\}$. *Ist* S *ein* k*-dimensionales Simplex, so gilt:* $\operatorname{relint} S \neq \varnothing$.

Beweis: Für den Beweis werden die zwei Hilfssätze aus dem Anhang benötigt (☞ Anhang A).

Sei $S := \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_{k+1}\} \subset \mathrm{E}^n$ ein k-dimensionales Simplex. Nach obiger Annahme sind die Vektoren $(x_2 - x_1), \ldots, (x_{k+1} - x_1)$ linear unabhängig. Nach dem Hilfssatz (1) sind dann die $x_1, \ldots, x_{k+1}$ affin unabhängig; und nach Hilfssatz (2) hat jedes $x \in \operatorname{aff} S$ eine eindeutige Darstellung als Affinkombination der $x_1, \ldots, x_{k+1}$.

Man kann damit eine stetige Abbildung f definieren, die jedem $x \in \operatorname{aff} S$ das $(k+1)$-Tupel der Koeffizienten der eindeutigen Affinkombination von x zuordnet:

$$f\colon \operatorname{aff} S \to \mathrm{E}^{k+1}, \quad f(x) = f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{k+1} x_{k+1}) := (\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1})$$

Sei x_0 das Zentrum von S. Es gilt dann:

$$f(x_0) = \left(\frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+1}\right) \quad \text{mit } \frac{1}{k+1} > 0.$$

Da f stetig ist, gibt es dann ein $r > 0$, so daß für alle $x \in B(x_0, r) \cap \operatorname{aff} S$, $x = \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j x_j$, gilt[1]: Für alle j ist $\alpha_j > 0$.

Damit sind aber alle $x \in B(x_0, r) \cap \operatorname{aff} S$ darstellbar als Konvexkombination der $x_1, \ldots, x_{k+1}$. Nach Satz (2.22) gilt dann: $\big(B(x_0, r) \cap \operatorname{aff} S\big) \subset \operatorname{conv} S$. Da S nach Voraussetzung ein Simplex ist, gilt $\operatorname{conv} S = S$, also $\big(B(x_0, r) \cap \operatorname{aff} S\big) \subset S$.

Wegen $x_0 \in B(x_0, r)$ und $x_0 \in S \subset \operatorname{aff} S$ ist $x_0 \in \big(B(x_0, r) \cap \operatorname{aff} S\big)$. Da $\operatorname{aff} S$ der „kleinste" affine Unterraum ist, der S enthält, ist $x_0 \in \operatorname{relint} S$. ∎

Korollar (2.28): *Sei* $S \subset \mathrm{E}^n$ *konvex,* $\dim S = k$. *Dann gilt:* $\operatorname{relint} S \neq \varnothing$.

Beweis: Da $\dim S = k$, gibt es $(k+1)$ affin unabhängige Punkte $x_1, \ldots, x_{k+1} \in S$. Die konvexe Hülle dieser Punkte ist ein k-dimensionales Simplex T. Nach Satz (2.27) gilt: $\operatorname{relint} T \neq \varnothing$.

Da $\operatorname{relint} T \subset \operatorname{relint} S$, ist $\operatorname{relint} S \neq \varnothing$. ∎

[1] Zur Erinnerung: $B(x_0, r) := \{x \in \mathrm{E}^n \mid \|x - x_0\| < r\}$

Die konvexe Hülle offener und kompakter Mengen

Wir betrachten zunächst die konvexe Hülle einer offenen Menge.

Satz (2.29): *Die konvexe Hülle* conv S *einer offenen Menge* S *ist offen.*

Beweis: Sei $S \subset \mathrm{E}^n$ eine offene Menge. Dann ist $S \cap \mathrm{Rand}(\mathrm{conv}\, S) = \varnothing$. Wegen $S \subset \mathrm{conv}\, S$ gilt: $S \subset \mathrm{int}(\mathrm{conv}\, S)$.

Da conv S die „kleinste“ konvexe Menge ist, die S enthält, und da das Innere einer konvexen Menge konvex ist[1], ist $\mathrm{conv}\, S \subset \mathrm{int}(\mathrm{conv}\, S)$.

Es gilt ebenfalls: $\mathrm{int}(\mathrm{conv}\, S) \subset \mathrm{conv}\, S$.
Damit ist insgesamt: $\mathrm{conv}\, S = \mathrm{int}(\mathrm{conv}\, S)$, d. h. conv S ist offen. ■

Satz (2.30): *Die konvexe Hülle* conv S *einer kompakten Menge* S *ist kompakt.*

Beweis: Sei $B := \left\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j = 1,\ \alpha_j \geq 0\ \forall\ j\right\} \subset \mathrm{E}^{n+1}$. Nach Hilfssatz (3) (☞ Anhang B) ist B kompakt.

Wir definieren nun eine stetige Abbildung:

$$f\colon \mathrm{E}^{n+1} \times \underbrace{\mathrm{E}^n \times \ldots \times \mathrm{E}^n}_{(n+1)\text{-mal}} = \mathrm{E}^{(n+1)^2} \to \mathrm{E}^n,$$

$$f(\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}}_{\in \mathrm{E}^{n+1}}, \underbrace{x_{1,1}, \ldots, x_{1,n}}_{\in \mathrm{E}^n}, \quad \ldots \quad, \underbrace{x_{n+1,1}, \ldots, x_{n+1,n}}_{\in \mathrm{E}^n}) := \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j (x_{j,1}, \ldots, x_{j,n}).$$

Sei nun $S \subset \mathrm{E}^n$ kompakt. Nach dem Satz von Carathéodory (2.23) gilt[2]:

$$\mathrm{conv}\, S = \left\{x \in \mathrm{E}^n \;\middle|\; x = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x_j,\ x_j \in S,\ \alpha_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j = 1\right\}.$$

Wir betrachten nun die Menge $B \times S \times \ldots \times S \subset \mathrm{E}^{n+1} \times \mathrm{E}^n \times \ldots \times \mathrm{E}^n$. Die oben definierte Abbildung f bildet diese Menge ab auf conv S:

$$f\colon B \times S \times \ldots \times S \to \mathrm{conv}\, S,$$

da B entsprechend gewählt ist.

Da B kompakt, S kompakt, ist auch $B \times S \times \ldots \times S$ kompakt. Da f stetig ist, ist conv S kompakt. ■

[1] ☞ Korollar (2.10)
[2] Beachte: $x_j \in S \subset \mathrm{E}^n$, also $x_j = (x_{j,1}, \ldots, x_{j,n})$

Anhang

A Zwei Hilfssätze

Hilfssatz (1): *Es gilt:*

$$\{x_1, \dots, x_{k+1}\} \textit{ affin abhängig } \iff \{x_2 - x_1, \dots, x_{k+1} - x_1\} \textit{ linear abhängig.}$$

Bemerkung: Aus Hilfssatz (1) folgt:

$$\{x_1, \dots, x_{k+1}\} \text{ affin unabhängig } \iff \{x_2 - x_1, \dots, x_{k+1} - x_1\} \text{ linear unabh.}$$

Beweis:

„⇒“: Sei $\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$ affin abhängig. Es gibt dann Skalare α_j für $1 \le j \le k+1$ mit:

(I) $\alpha_\ell \neq 0$ für mindestens ein $\ell \in \{1, \dots, k+1\}$,

(II) $\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = -\sum_{j=2}^{k+1} \alpha_j$,

(III) $\sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j x_j = 0$.

Aus (II) und (III) folgt:

$$0 = \alpha_1 x_1 + \sum_{j=2}^{k+1} \alpha_j x_j = -x_1 \sum_{j=2}^{k+1} \alpha_j + \sum_{j=2}^{k+1} \alpha_j x_j = \sum_{j=2}^{k+1} \alpha_j (x_j - x_1)$$

Wegen (I) gilt $\alpha_j = 0$ nicht für alle j. Damit ist diese Gleichung nur erfüllt, wenn $\{x_2 - x_1, \dots, x_{k+1} - x_1\}$ linear abhängig.

„⇐“: Sei $\{x_2 - x_1, \dots, x_{k+1} - x_1\}$ linear abhängig. Es gibt dann Skalare β_j für $2 \le j \le k+1$ mit:

(I) $\beta_\ell \neq 0$ für mindestens ein $\ell \in \{2, \dots, k+1\}$,

(II) $\sum\limits_{j=2}^{k+1} \beta_j (x_j - x_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad -x_1 \sum\limits_{j=2}^{k+1} \beta_j + \sum\limits_{j=2}^{k+1} \beta_j x_j = 0.$

Mit $\beta_1 := -\sum_{j=2}^{k+1} \beta_j$ folgt:

$$\sum_{j=1}^{k+1} \beta_j x_j = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum_{j=1}^{k+1} \beta_j = 0$$

Damit ist wegen (I) $\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$ affin abhängig. ∎

Hilfssatz (2): *Sei* $S := \{x_1, \dots, x_{k+1}\} \subset \mathrm{E}^n$ *eine k-dimensionale Menge. Für jedes $x \in \operatorname{aff} S$ gilt: x hat eine eindeutige Darstellung als Affinkombination der* $x_1, \dots, x_{k+1}$.

Der Beweis dieses Hilfssatzes erfolgt analog zum Beweis des Satzes (2.25).

B Eine kompakte Menge

Zum Beweis des Satzes (2.30) benötigen wir den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz (3):
Die Menge $A := \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j = 1,\ \alpha_j \geq 0\ \forall\, j \right\} \subset \mathrm{E}^{n+1}$ *ist kompakt.*

Beweis: Wir zeigen: A ist beschränkt und abgeschlossen.

① A ist beschränkt, denn es gilt:

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \in A \implies |\alpha_k| \leq \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j = 1 \text{ für alle } 1 \leq k \leq n+1.$$

② A ist abgeschlossen.
Dazu betrachten wir die lineare (und damit stetige) Abbildung

$$f \colon \mathrm{E}^{n+1} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x_1, \ldots, x_{n+1}) := \sum_{j=1}^{n+1} x_j.$$

Wir definieren nun zwei Mengen:

$$\begin{aligned} H &:= \left\{ x \in \mathrm{E}^n \;\middle|\; f(x) = 1 \right\} = f^{-1}(1), \\ Q &:= \underbrace{[0,1] \times \ldots \times [0,1]}_{(n+1)-\text{mal}} \subset \mathrm{E}^{n+1}. \end{aligned}$$

Da die Menge $\{1\}$ abgeschlossen ist, ist wegen der Stetigkeit von f die Menge H abgeschlossen. Ebenfalls abgeschlossen ist die Menge Q.

Es ist nun $A = H \cap Q$; damit ist A als Durchschnitt zweier abgechlossener Mengen abgeschlossen. ∎