# Konvexe Mengen

**Kanglin,Chen**

Universität Bremen, Proseminar WS 04/05

***Satz.*** (Satz von Kirchberger)

Sei $P, Q \subset E^n$ kompakt und nicht leer. Dann gilt: $P, Q$ sind durch eine Hyperebene streng trennbar. $\Leftrightarrow$ Für jede Menge $T \subset P \cup Q$, $T$ mit $n+2$ order weniger Punkte, $\exists$ eine Hyperebene, die $T \cap P$ und $T \cap Q$ streng trennt.

**Gegenbeispiel** für $n+1$ :

Die Menge der schwarzen Punkte und die Menge des weissen Punktes nicht durch eine Gerade streng trennbar.Obwohl alle zwei schwarzen Punkte und ein weisser Punkt durch eine Gerade streng trennbar sind.

***Bemerkung.*** Falls in $\mathbb{E}^2$ alle 4 Punkte aus zwei Mengen durch eine Gerade streng trennbar sind, sind die beiden Mengen durch eine Gerade streng trennbar.

***Defintion.*** Ein Punkt $p$ in $\mathbb{E}^n$ hat $k$-Punkte simplifizierte Eigenschaft bzgl einer Menge $S \subset \mathbb{E}^n$, wenn $\exists$ ein Simplex $\Delta = \text{conv}\{x_1, x_2, ..., x_r\}$ mit $r \leq k$, die Endpunkte $x_1, x_2, ..., x_r \in S$, $p \in \Delta$.

***Vereinbarung.*** $S_k =$ die Menge aller Punkte $p$ in $\mathbb{E}^n$ mit $k$-Punkte simplifizierter Eigenschaft bzgl $S$.

***Lemma.*** Seien $A, B \subset \mathbb{E}^n$ kompakt und $\text{conv}A \cap \text{conv}B \neq \phi$. Sei $x$ ein extremer von $\text{conv}A \cap \text{conv}B$ und $i, j$ die kleinsten natürlichen Zahlen mit $x \in A_i \cap B_j$. Dann gilt: $i + j \leq n + 2$.

***Beweis.*** $x \in A_i$, $i$ die kleinste.

$\Rightarrow \exists$ ein Simplex $\Delta =$ conv$(a_1, ..., a_i)$
nach Definition von Simplex $\Rightarrow \dim \Delta = i - 1$ mit $x \in \Delta =$ conv$(a_1, ..., a_i)$.
$\Rightarrow$

$$x = \sum_{k=1}^{i} \alpha_k a_k, \quad \sum_{k=1}^{i} \alpha_k = 1, \quad \alpha_k > 0,\ \forall k \in \{1, ..., i\}.$$

Dann können wir durch Änderung der Koffizienten $\alpha_k$ eine offene Kugel $\tau_A$ mit $x$ Mittelpunkt von $\tau_A$ finden. Und es gilt:

$$\tau_A \subset \text{conv}\,(a_1, ..., a_i) \subset \text{conv}A \quad \text{mit} \qquad \dim \tau_A = i - 1.$$

analog: $\exists$ eine offene Kugel $\tau_B$ mit $x$ Mittelpunkt von $\tau_B$ mit $\dim \tau_B = i - 1$. $\Rightarrow$

$$\tau_A \cap \tau_B = \{x\}$$

Denn $x$ ist der extremer Punkt von conv$A \cap$ conv$B$. Wir wissen:

$$\dim (\tau_A \cap \tau_B) + \dim (\tau_A + \tau_B) = \dim \tau_A + \dim \tau_B = i + 1 + j + 1.$$

wegen $\dim (\tau_A \cap \tau_B) = 0$, $\dim (\tau_A + \tau_B) \leq n$. $\Rightarrow i - 1 + j - 1 \leq n$. $\Rightarrow$

$$i + j \leq n + 2 \qquad \square$$

***Beweis zum Satz von Kirchberger.***
"$\Leftarrow$" (Indirekt)
Annahme: $P$ und $Q$ seien nicht durch eine Hyperebene streng trennbar. $\Rightarrow$

$$\text{conv}P \ \cap \ \text{conv}Q \neq \phi$$

Sei $x$ ein extremer Punkt $\in$ conv$P \ \cap$ conv$Q$. nach **Lemma** $\Rightarrow$

$$\exists\ A := \{a_1, ..., a_i\} \subset P \text{ und } B := \{b_1, ..., b_j\} \subset Q, \text{ mit } i + j \leq n + 2$$

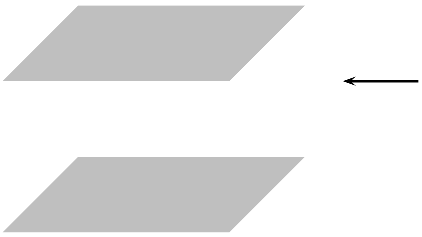
und $x \in$ conv$A \ \cap$ conv$B$. $\Rightarrow A, B$ sind nicht durch eine Hyperebene streng trennbar.
Sei $T := \{a_1, ..., a_i, b_1, ..., b_j\}$ $|T| \leq n + 2 \Rightarrow T \cap P = A, \quad T \cap Q = B$ wegen $A, B$ nicht trennbar. $\Rightarrow$

$$T \cap P \text{ und } T \cap Q \quad \text{nicht trennbar}$$

Das wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung: ( jedes $T \subset P \cup Q$ mit $n+2$ order weniger Punkte. $\exists$ eine Hyperebene, die $T \cap P$, $T \cap Q$ trennt.)

"$\Rightarrow$" trivial. $\square$

***Defintion.*** Streifen in $\mathbb{E}^n$ ist eine geschloßene zusammenhängende durch zwei disjunkt parallele Hyperebenen beschränkte Region. Die Breite von einem Streifen ist der Abstand zwischen den beiden Hyperebenen.



Streifen in $\mathbb{E}^3$

***Defintion.*** Sei $f$ eine lineares Funtional mit aller Koffizienten ungleich 0 in $\mathbb{E}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$. Dann heißt: Der Streifen $S := \{ \ x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq f(x) \leq \beta \ \}$ trennt streng $P, Q \subset \mathbb{E}^n$ wenn $f(P) > \beta, \ f(Q) < \alpha$ order $f(P) < \beta, \ f(Q) > \alpha$ sind.

***Satz.*** Seien $P, Q \subset \mathbb{E}^n$ kompakt und nicht leer. Dann gilt: $P, Q$ sind durch einen Streifen der Breite $\delta > 0$ streng trennbar. $\Leftrightarrow$ Für jede Menge $T \subset P \cup Q$ mit $n+2$ order weniger Punkten, $\exists$ einen Streifen der Breite $\delta > 0$, der $T \cap P, T \cap Q$ streng trennt.

***Lemma.*** Es seien $P, Q \subset \mathbb{E}^n$, kompakt und nicht leer. Die folgenden Aussagen sind zueinander äquivalent:
$i)$ $P$ und $Q$ können durch einen Streifen der Breite $2\delta$ streng getrennt werden.
$ii)$ $P_\delta$ und $Q_\delta$ können durch eine Hyperebene streng getrennt werden.
wobei: $P_\delta := \{ \ z \in \mathbb{R}^n \mid \|z - x\| \leq \delta, \ x \in P \ \}$ $Q_\delta := \{ \ w \in \mathbb{R}^n \mid \|w - y\| \leq \delta, \ y \in Q \ \}$

***Beweis zum Lemma.***
$i) \Rightarrow$ ii) Sei $S$ ein Streifen der Breite $2\delta$, der $P$ und $Q$ streng trennt.
$S := \{ \ x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq f(x) \leq \beta \ , \beta - \alpha = 2\delta \ \}$ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linear. Es gilt:

$$f(x) < \alpha, \ \ \forall \ x \in P \ ; \ \ f(y) > \beta, \ \ \forall \ y \in Q$$

Sei $H := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \frac{\alpha+\beta}{2} \right\}$, $H$ ist eine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$.
***Behauptung.*** $H$ trennt streng $P_\delta$ und $Q_\delta$.
***Beweis.*** Sei $z \in P_\delta \Rightarrow \exists \ x \in P : \|z - x\| \leq \delta$ wobei $x, z$ so dargestellt:

$$x = h_1 + re, \ z = h_2 + se. \ h_1, h_2 \in \text{Kernf}, e \in (\text{Kernf})^\perp$$

und o.B.d.A nehmen wir $f(e) = 1$.

$\Rightarrow \delta \geq \|z-x\| = \|h_2 - h_1 + (s-r)e\| = \sqrt{\|h_2 - h_1\|^2 + (s-r)^2} \geq |s-r|\,.$
$\Rightarrow \|f(z) - f(x)\| = \|f(z-x)\| = \|f(h_2 - h_1 + (s-r)e\| = |(s-r)|\,\|f(e)\| = |s-r| \leq \delta$
$(\delta > 0)$.
$\Rightarrow f(z) \leq f(x) + \delta < \alpha + \delta = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}. \Rightarrow f(z) < \frac{\alpha+\beta}{2}.$
Sei $w \in Q_\delta$ analog haben wir:

$$f(w) > \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$\Rightarrow H$ trennt streng $P_\delta$ und $Q_\delta$.
$\Rightarrow P_\delta$ und $Q_\delta$ können durch eine Hyperebene streng getrennt werden.

*ii)* $\Rightarrow$ *i)* Sei $\delta > 0,\ P, Q \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.
$P_\delta := \{\ z \in \mathbb{R}^n \mid \|z-x\| \leq \delta,\ x \in P\ \}\,,\ Q_\delta := \{\ w \in \mathbb{R}^n \mid \|w-y\| \leq \delta,\ y \in Q\ \}\,.$
$\Rightarrow P_\delta, Q_\delta$ sind kompakt. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linear. Dann nehmen wir o.B.d.A:

$$f(x) < 0\ \forall x \in P_\delta;\ \ f(y) > 0\ \forall y \in Q_\delta$$

Sei $H := Kernf$ und $e \in \mathbb{R}^n, e \in H^\perp, \|e\| = 1$. o.B.d.A sei $f(e) = 1$.
Dann gilt für alle $z \in \mathbb{R}^n$ :

$$z = f(z) \cdot e + h(z),\ \ h(z) \in H$$

***Behauptung.*** Für alle $0 \leq r \leq \delta$ gilt: $P \cap (H - re) = \phi,\ \ Q \cap (H + re) = \phi$.
***Beweis.*** Sei $x \in P \cap (H - re),\ \ x = h_1 - re,\ \ also\ r = f(x)$.
Falls $0 \leq r \leq \delta$, dann folgt:

$$f(x + \delta e) = f((-r + \delta)e + h_1) = -r + \delta \geq 0$$

Widerspruch, da $x + \delta e \in P_\delta$.
Sei $y \in Q \cap (H + re),\ \ y = h_2 - re,\ \ also\ r = f(x)$ Falls $0 \leq r \leq \delta$, dann folgt:

$$f(y - \delta e) = f((r - \delta)e + h_2) = r - \delta \leq 0$$

Widerspruch, da $y - \delta e \in Q_\delta$.
$\Rightarrow P \cap (H - re) = \phi,\ \ Q \cap (H + re) = \phi$.
$\Rightarrow P, Q$ können durch einen Streifen der Breite $2\delta$ streng getrennt werden. $\square$

***Satz.*** Seien $P, Q \subset E^n$ kompakt, nicht leer. Dann gilt: $P$ und $Q$ sind durch einen Streifen der Breite $2\delta$ streng trennbar. $\Leftrightarrow$ für jedes $T \subset T \cup Q,\ \ |T| \leq n + 2,\ \exists$ einen Streifen mit

$2\delta > 0$, der $T \cap P$ und $T \cap Q$ streng trennt.

***Beweis.*** "$\Leftarrow$"
Es seien $\tilde{X} = \{\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_r\} \subset P_\delta,\ \tilde{Y} = \{\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_s\} \subset Q_\delta$ mit $1 \leq r,\ 1 \leq s,\ r + s \leq n + 2$, dann nehmen wir

$$\tilde{T} = \{\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_r, \tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_s\} \quad |T| \leq n + 2$$

Ferner seien $x_i \in P$ und $y_j \in Q$ mit

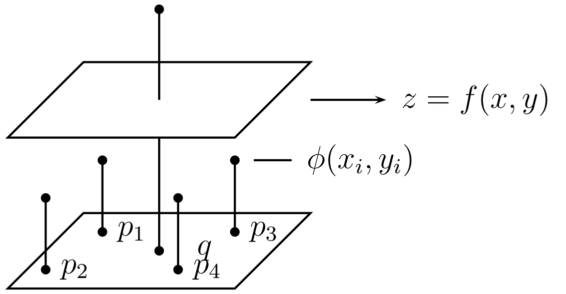
$$\|\tilde{x}_i - x_i\| \leq \delta,\ \ \|\tilde{y}_j - y_j\| \leq \delta,\ 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq s$$

und $X = \{x_1, ..., x_r\} \subset P,\ Y = \{y_1, ..., y_s\} \subset Q,\ 1 \leq r,\ 1 \leq s,\ r + s \leq n + 2$.
Sei $T = \{x_1, ..., x_r,\ y_1, ..., y_s\} \quad |T| \leq n + 2$.
nach Voraussetzung: $T \cap P = X, T \cap Q = Y$ und $X, Y$ sind durch einen Streifen der Breite $2\delta$ streng trennbar. $\overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow}$ $\tilde{X} \subset P_\delta$ und $\tilde{Y} \subset Q_\delta$ sind durch eine Hyperebene streng trennbar.
$\Rightarrow \tilde{T} \cap P_\delta = \tilde{X},\ \tilde{T} \cap Q_\delta = \tilde{Y}$ sind durch eine Hyperebene streng trennbar.
$\overset{\text{Satz von Kirchberger}}{\Longrightarrow}$ $P_\delta,\ Q_\delta$ sind durch eine Hyperebene streng trennbar.
$\overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow}$ $P,\ Q$ sind durch einen Streifen der Breite $2\delta$ streng trennbar.

"$\Rightarrow$" trivial. $\square$

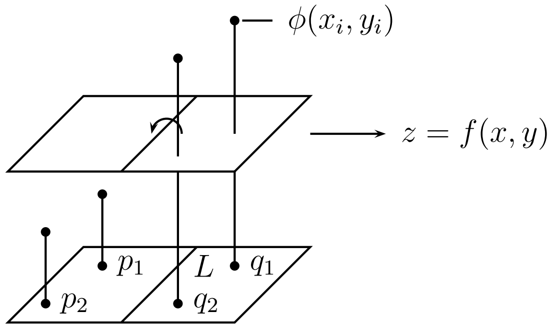
***Anwendung.*** Sei $\phi: \ \mathbb{R}^2 \rightarrow \ \mathbb{R}$ mit $(x,y) \rightarrow \phi(x,y)$.
Seien $(x_1,y_1,z_1),...,(x_r,y_r,z_r)$ gegeben mit $z_i = \phi(x_i,y_i), \ 1 \leq i \leq r$. Wir suchen eine Ebene $z = f(x,y) = ax + by + c$, um $z_i = \phi(x_i,y_i)$ zu approximieren. Wir definieren folgende: die Differenz $\delta$ :=max$\{|f(x_i,yi) - z_i| \ \ i = 1,...,r\}$ . $Q := \{(x_i,y_i) \mid f(x_i,y_i) - \delta = z_i\}$ (die Menge der Punkte mit größter Differenz über die Approximationebene),
$P := \{(x_i,y_i) \mid f(x_i,y_i) + \delta = z_i\}$ (die Menge der Punkte mit größter Differenz unter der Approximationebenen).

***Methode.*** $z$ ist die beste Approximationsebene mit linearer Funktion $f(x,y) \Leftrightarrow convP \cap convQ \neq \phi$.




$P = \{p_1,p_2,p_3,p_4\}$
$Q = \{q\}$

***Beweis.*** "$\Leftarrow$"
$P = \{p_1,p_2,p_3,p_4\}$ , $Q = \{q\}$ wie oben definiert mit größter Differenz unter bzw. über $z$ Ebene. Weil $P,Q$ nicht trennbar sind, dann kann beliebige Rotation von $z$ Ebene nicht gleichzeitig die Differenz aller Punkte von $P,Q$ reduzieren. Dann ist unter Beidgung: $convP \cap convQ \neq \phi$. $z$ die beste Approximationsebene für $\phi(x_i,y_i)$ bzgl. gebenener $\phi$.




$$P = \{p_1, p_2\}$$
$$Q = \{q_1, q_2\}$$

***Beweis.*** "$\Rightarrow$"
$z$ ist die beste Approximationsebene mit linearer Funktion $f(x, y)$. $\Rightarrow$ $convP \cap convQ \neq \phi$.
$\Leftrightarrow$ $convP \cap convQ = \phi \Rightarrow \exists$ bessere Approximationsebene.
Wegen $convP \;\cap\; convQ = \phi$, dann sind $P, Q$ durch eine Gerade $L$ streng trennbar. Man kann immer durch eine Rotation von Ebene $z$ um diese Gerade eine bessere Approximationsebene für alle Punkte von $P, Q$ finden.

***Bemerkung.*** Wir wissen in $\mathbb{E}^2$ $convP \cap convQ \neq \phi \Leftrightarrow \exists$ ein $T$ mit 4 Punkte, $T \subset P \cup Q$ dann gilt: $T \cap P$ und $T \cap Q$ nicht trennbar. Um die bessere Approximationsebene zu finden, brauchen wir nur die beste Approximationsebene von 4 Punkte aus $P \cup Q$($P$ und $Q$ wie oben definiert) zu finden. Dann ist die Approximaitonsebene die beste Approximaitonsebene für alle Punkte.