

# Proseminar:

# Konvexe Mengen

Varianten vom Satz von Kirchberger

Trennung von Mengen mit einer Kugeloberfläche

Trennung von Mengen mit Zylindern

Jens Siewert

Vortrag vom

14.12.04 und 04.01.05

# Varianten vom Satz von Kirchberger

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Trennung von Mengen mit einer Kugeloberfläche</b>	<b>3</b>
1.1	<u>Definition</u> . . . . .	3
1.2	<u>Satz</u> . . . . .	3
1.3	Beispiel im $\mathbb{R}^2$ . . . . .	3
1.4	<u>Beweis</u> . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Trennung von Mengen mit Zylindern</b>	<b>5</b>
2.1	<u>Definition</u> . . . . .	5
2.2	Beispiele . . . . .	6
2.3	<u>Satz</u> . . . . .	7
2.4	<u>Definition</u> . . . . .	7
2.5	<u>Lemma</u> . . . . .	8
2.6	<u>Beweis</u> . . . . .	8
2.7	<u>Beweis von Satz 2.3</u> . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Quellen/Literatur</b>	<b>11</b>

# 1 Trennung von Mengen mit einer Kugeloberfläche

Wir wollen in diesem Vortrag untersuchen, unter welchen Bedingungen man zwei Mengen  $P$  und  $Q$  mit einem Zylinder oder einer Kugeloberflächen streng trennen kann. Dabei wollen wir mit der Kugeloberfläche beginnen.

Dazu eine

## 1.1 Definition

Die Kugeloberfläche  $S = \{x \mid \|x - p\| = \alpha\}$  trennt die Mengen  $A$  und  $B$  streng, wenn für alle  $a \in A$  und alle  $b \in B$  eine der folgenden Bedingungen gilt:

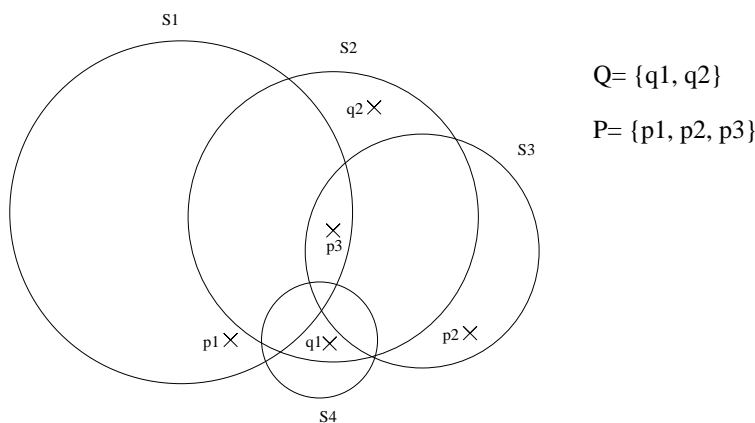
1.  $\|a - p\| < \alpha$  und  $\|b - p\| > \alpha$
2.  $\|a - p\| > \alpha$  und  $\|b - p\| < \alpha$

Unter Verwendung der Definition lässt sich folgender Satz beweisen:

## 1.2 Satz

Seien  $P$  und  $Q$  nichtleere kompakte Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ . Dann existiert eine Kugeloberfläche, die  $P$  und  $Q$  streng trennt, genau dann wenn zu jeder Teilmenge  $T \subset (P \cup Q)$ , bestehend aus  $n+3$  oder weniger Punkten eine Kugeloberfläche existiert, die  $T \cap P$  und  $T \cap Q$  streng trennt.

## 1.3 Beispiel im $\mathbb{R}^2$



Bei dem Beispiel interessiert uns jetzt wann man die Mengen  $P$  und  $Q$  mit einer Kugeloberfläche streng trennen kann.

Nach Satz 1.2 ist dies der Fall, wenn man zu jeder Teilmenge bestehend aus  $n+3$  oder weniger Punkten, die Schnitte  $T \cap P$  und  $T \cap Q$  streng trennen kann. Da  $n=2$  ist, müssten also alle bis zu 5-Elementigen Mengen  $T$  diese Eigenschaft erfüllen.

Wir wollen uns als erstes aber die 4-Elementigen Mengen angucken.

Weil wir in dem Beispiel genau 5-Elemente haben, interessiert uns also der Fall, in dem wir ein Element ausblenden.

Wenn dies ein Element aus  $Q$  ist, dann kann man um dass jeweils andere Element aus  $Q$  die gesuchte Kugeloberfläche legen der Radius darf nur nicht zu gross werden (siehe  $S_4$ ). Wenn das Element  $p_1$  fehlt, kann man um  $p_2$  und  $p_3$  eine Kugeloberfläche legen, die die geforderte Bedingung erfüllt (siehe  $S_3$ ). Das selbe gilt, wenn das Element  $p_2$  fehlt. Die Kugeloberfläche liegt dann um  $p_1$  und  $p_3$  (siehe  $S_1$ ). Wenn das Element  $p_3$  fehlt, dann kann man die Kugeloberfläche um die Elemente  $q_1$  und  $q_2$  legen (siehe  $S_2$ ).

Für die Teilmengen mit 4-Elementen, haben wir also immer eine gesuchte Kugeloberfläche gefunden.

Es ist aber offensichtlich, dass egal welches Element wir herausgenommen haben, die gewählte Kugeloberfläche nicht mehr passt, wenn wir es wieder dazu nehmen. Auch lässt sich keine andere Kugeloberfläche finden, die die Mengen  $P$  und  $Q$  streng trennt.

Dies zeigt uns direkt, dass die im Satz geforderte Anzahl  $n+3$  nicht unterschritten werden darf. Denn hier habe wir ein Gegenbeispiel.

Wenn man jetzt aber zu den 4-Elementen jeweils beliebig viele Punkte so hinzufügt, dass man die Mengen  $P$  und  $Q$  immer noch mit einer Kugeloberfläche streng trennen kann, dann wird man feststellen, dass man immer auch 5-Elementige Teilmengen der Vereinigung von  $P$  und  $Q$  wie nach Voraussetzung immer trennen kann.

Z.B. kann man man innerhalb der Kugeloberfläche  $S_1$  beliebig viele Punkte aus  $P$  hinzufügen und ausserhalb der Kugeloberfläche beliebig viele Punkte aus  $Q$  hinzufügen.

Mit dem über den Satz gewonnenen Verständnis, soll jetzt der Beweis folgen.

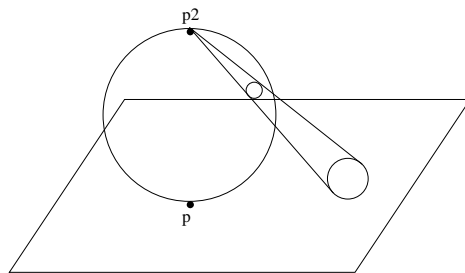
## 1.4 Beweis

$\implies$  ist trivial, denn wenn  $P$  und  $Q$  streng getrennt werden können, dann kann man auch für beliebige Teilmengen  $T$  aus der Vereinigung von  $P$  und  $Q$ , die Mengen  $T \cap P$  und  $T \cap Q$  streng trennen.

Die Rückrichtung ist komplizierter.

Wir betten dafür den  $\mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^{n+1}$  ein. Dann sei  $\Omega$  eine Einheitskugel im  $\mathbb{R}^{n+1}$ , die tangential an einem beliebigen Punkt  $p$  an den  $\mathbb{R}^n$  anliegt.

Sei weiterhin  $\pi$  die stereographische Abbildung des  $\mathbb{R}^n$  auf  $\Omega$ , basierend auf dem  $p$  gegenüberliegenden Punkt  $p_2$  in  $\Omega$ .



Als Voraussetzung haben wir jetzt, dass zu jeder Teilmenge  $T$  von  $n+3$  oder weniger Punkten von  $P \cup Q$  eine Kugeloberfläche  $S$  gegeben ist, die  $T \cap P$  und  $T \cap Q$  streng trennt. Da die Abbildung  $\pi$  stetig ist, gibt es auch zu jeder Teilmenge  $\pi(T)$  von  $n+3$  oder weniger Punkten von  $\pi(P \cup Q)$  eine Kugeloberfläche  $\pi(S)$  auf  $\Omega$ , die  $\pi(T \cap P)$  und  $\pi(T \cap Q)$  auf  $\Omega$  streng trennt.

$\pi(S)$  ist nun aber der Schnitt von  $\Omega$  und einem  $n$ -dim affinen Unterraum  $H$ , wobei  $H$  die Mengen  $\pi(T \cap P)$  und  $\pi(T \cap Q)$  im  $\mathbb{R}^{n+1}$  streng trennt.

Nach dem Satz von Kirchberger lassen sich die Mengen  $\pi(P)$  und  $\pi(Q)$  jetzt auch streng mit einer Hyperebene trennen. Dies gilt, da  $\pi(T)$  aus  $n+3$  Punkten besteht, wir uns aber im  $\mathbb{R}^{n+1}$  befinden. Desweiteren können wir auch eine zweite Hyperebene finden, die  $\pi(P)$  und  $\pi(Q)$  streng trennt. Dazu wählen wir eine zu der ersten Hyperebene parrallele Hyperebene, die nahe genug an der ersten liegt.

Da die beiden Hyperebenen parrallel zueinander liegen, ist der Punkt  $p_2$  in einer der beiden Hyperebenen nicht enthalten.

Sei jetzt  $H_0$  die Hyperebene, die  $p_2$  nicht enthält. Dann betrachten wir das Urbild von dieser Hyperebene, geschnitten mit  $\Omega$  unter  $\pi$ .

Da auch  $\pi^{-1}$  stetig ist, trennt  $\pi^{-1}(H_0 \cap \Omega)$  die Mengen  $P$  und  $Q$  streng.  $\square$

Also was haben wir gemacht?

Wir haben den  $\mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^{n+1}$  eingebettet. Dann haben wir das Problem auf den Satz von Kirchberger im  $\mathbb{R}^{n+1}$  zurückgeführt.

Zum Schluss haben wir das Problem dann wieder in den  $\mathbb{R}^n$  verlagert.

## 2 Trennung von Mengen mit Zylindern

Um zwei Mengen mit einem Zylinder trennen zu können, müssen wir erst wissen, was ein Zylinder überhaupt ist. Dafür:

### 2.1 Definition

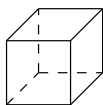
Sei  $A$  eine nichtleere, kompakte, konvexe Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  und sei  $F$  ein  $k$ -dimensionaler Unterraum ( $0 \leq k \leq n$ ).

Dann heisst  $C := A + F := \{ a + f \mid a \in A, f \in F \}$

$k$ -Zylinder erschaffen von  $A$  und  $F$ .

Um eine Vorstellung von dem Begriff zu bekommen hier ein paar

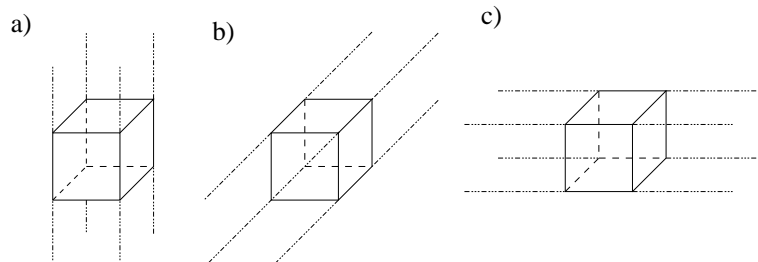
## 2.2 Beispiele



Sei die Menge  $A$ .

$A$  ist kompakt, konvex und nichtleer.

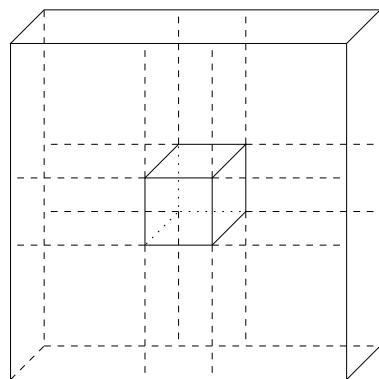
Der 0-Zylinder erschaffen von  $A$  und  $\{0\}$ , ist wieder  $A$ . (Wir addieren einfach die 0 auf jeden Punkt aus  $A$ , erhalten also wieder alle Punkte aus  $A$ .)



a) bis c) sind alles 1-Zylinder erschaffen von  $A$  und einer Geraden durch den Ursprung.

Dabei ist die Struktur der Menge  $A$  von entscheidender Bedeutung. Wenn  $A$  z.B. eine Kugel ist, so erhalten wir einen Zylinder, wie man ihn aus der Schule kennt.

Ein  $(n-1)$ -dim Zylinder schliesslich, ist ein Streifen.



Je nach dem, wie der  $(n-1)$ -dim Unterraum zum Ursprung liegt, wird sich auch der Streifen drehen und sogar seine Breite ändern. Wobei letzteres auch wieder von der Struktur der Menge  $A$  abhängt. Bei einer Kugel würde sich die Breite nicht ändern.

Ein  $n$ -Zylinder ist der Gesamte  $\mathbb{R}^n$ .

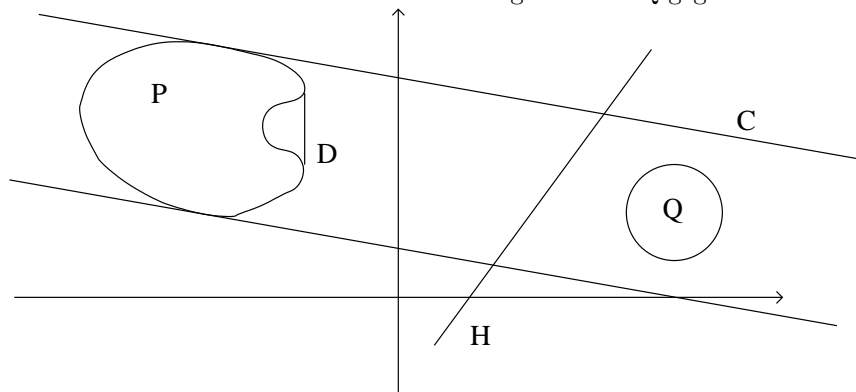
Nachdem wir nun wissen, was ein Zylinder ist, interessiert uns heute ja, wann man zwei Mengen trennen kann. Bei Zylindern bekommt man dazu folgenden

### 2.3 Satz

Seien  $P$  und  $Q$  nichtleere kompakte Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ .

Wenn es zu einem festen Index  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ), zu jeder Teilmenge aus  $k$  oder weniger Punkten aus  $Q$  eine Hyperebene gibt, die  $T$  und  $P$  streng trennt, dann gibt es zu jedem  $k$ -Zylinder der Form  $C := (\text{conv}P) + F$  einen  $(k-1)$ -Zylinder der Form  $D := (\text{conv}P) + F_1$ , so dass gilt:  $D \subset C$  und  $D \cap Q = \emptyset$ .

Wieder die Frage nach der Vorstellung:  
Wir betrachten den  $\mathbb{R}^2$ . Dort seien die Mengen  $P$  und  $Q$  gegeben.



Wenn wir, wie hier, die Menge  $P$  und jede Teilmenge von  $Q$  bestehend aus  $k$  oder weniger Elementen streng trennen können, dann gibt es zu jedem  $k$ -Zylinder  $C$  einen  $(k-1)$ -Zylinder  $D$  für die gilt  $D \subset C \wedge D \cap C = \emptyset$ .

Nach dem Satz ist  $k$  durch  $n$  begrenzt. Da  $n$  in unserem Fall gleich 2 ist, gibt es also zu jedem 2-Zylinder einen 1-Zylinder und zu jedem 1-Zylinder einen 0-Zylinder, die die Bedingungen erfüllen.

Der 2-Zylinder ist wie wir wissen der gesamte  $\mathbb{R}^2$ . Jeder 1-Zylinder wird also Teilmenge des 2-Zylinders sein. Wir müssen also nur noch einen 1-Zylinder wählen, der einen leeren Schnitt mit  $Q$  hat. Auch im  $\mathbb{R}^n$  wird dieses immer vom 1-Zylinder erfüllt, der von dem zur Hyperebene parallelen Unterraum aufgespannt wird.

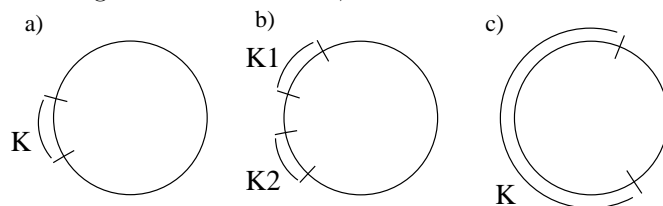
Der 0-Zylinder ist immer die Erzeugende Menge selbst. Da in unserem Fall  $(\text{conv}P)$  die Menge erzeugt, ist  $D = (\text{conv}P)$ . Deshalb gilt auch hier  $D \cap Q = \emptyset$ .

In der Hoffnugn, dass wir alle jetzt wissen, was der Satz aussagt, wollen wir ihn jetzt beweisen. Dafür benötigen wir noch ein Lemma. Und für das Lemma brauchen wir zuerst noch eine

### 2.4 Definition

Eine Teilmenge  $K$  der Oberfläche einer Kugel heisst streng konvex, wenn  $K$  keine gegenüberliegenden Punkte enthält, und zu jedem Paar von Punkten aus  $K$  auch der kleine Winkel des grossen Kreises, der von ihnen aufgespannt wird, enthalten ist.

Um das genauer zu verstehen, machen wir uns wieder ein Bild:



Hierbei ist die Menge  $K$  in a) streng konvex, da der kleine Winkel zwischen allen Punkten aus der Menge  $K$  enthalten ist und die Menge keine sich gegenüberliegenden Punkte enthält. In b) sind die Mengen  $K_1$  und  $K_2$  auch streng konvex. Aber die Menge  $K = K_1 \cup K_2$  ist nicht streng konvex, da nicht zwischen allen Punktepaaren der kleine Winkel enthalten ist. In c) enthält die Menge  $K$  sich gegenüberliegende Punkte, und ist deshalb auch nicht streng konvex.

Mit dieser Definition können wir uns jetzt das Lemma angucken:

## 2.5 Lemma

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  die Oberfläche der Einheitskugel um die 0.

Sei  $\mathcal{A} := \{ A_i \mid i \in I \}$  eine Familie von kompakten, streng konvexen Teilmengen von  $\Omega$ .

Wenn je  $n$  oder weniger Elemente von  $\mathcal{A}$  einen gemeinsamen Punkt haben, dann gibt es zwei sich gegenüberliegende Punkte  $\{ y, -y \}$  in  $\Omega$ , so dass jedes  $A_i$  ( $i \in I$ ) die Menge  $\{ y, -y \}$  schneidet.

## 2.6 Beweis

Da jedes  $A_i$  ( $i \in I$ ) eine kompakte, streng konvexe Teilmenge von  $\Omega$  ist, folgt das alle  $\text{conv}A_i$  ( $i \in I$ ) kompakte, konvexe Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  sind, die den Ursprung nicht enthalten.

Nach dem Satz von Horn gibt es eine Gerade  $L$  durch den Ursprung, die jedes  $\text{conv}A_i$  ( $i \in I$ ) scheidet, wenn immer  $n$  oder weniger Elemente von der Familie  $\mathcal{R} := \{ \text{conv}A_i \mid i \in I \}$  einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Da nach Voraussetzung bereits immer  $n$  oder weniger Elemente von  $\mathcal{A}$  einen gemeinsamen Punkt besitzen, besitzen auch immer  $n$  oder weniger Elemente von  $\mathcal{R}$  einen gemeinsamen Punkt.

Also existiert die Gerade  $L$ . Aufgrund der Konstruktion der  $\text{conv}A_i$  ( $i \in I$ ), schneidet die Gerade  $L$  aber auch alle Elemente von  $\mathcal{A}$ .

Sei dann  $\{ y, -y \} = L \cap \Omega$ .

Damit haben wir ein Paar sich gegenüberliegender Punkte gefunden die in jedem  $A_i$  ( $i \in I$ ) enthalten sind.  $\square$

(wohlgemerkt nicht beide, sondern je einer)

Mit dem Lemma ausgestattet können wir uns nun an das Ziel des Vortrages wagen, dem



## 2.7 Beweis von Satz 2.3

Dafür sei  $\delta = \inf \{ d(\text{conv}T, \text{conv}P) \mid T \text{ ist eine aus } k \text{ oder weniger Punkten bestehende Teilmenge von } Q \}$ . Weil  $P$  und  $Q$  nach Voraussetzung kompakt sind, ist  $\delta$  größer 0.

Dann sei ein  $k$ -Zylinder  $C := (\text{conv}P) + F$ , wie im Satz gefordert, gegeben.

Wenn der Schnitt von  $Q$  und  $C$  leer ist, dann erfüllt jeder  $(k-1)$ -Zylinder  $D$  erschaffen von  $\text{conv}P$  und einem  $(k-1)$ -dim Unterraum von  $F$  die Bedingungen  $D \subset C$  und  $D \cap Q = \emptyset$ .

Wenn aber  $Q \cap C \neq \emptyset$ , dann sei  $\Omega$  der Schnitt von  $F$  und der Oberfläche der Einheitskugel um den Ursprung des  $\mathbb{R}^n$ .

Weiter definieren wir für jedes  $w \in \Omega$ ,  $r_w$  als den Strahl aus dem Ursprung durch  $w$ .

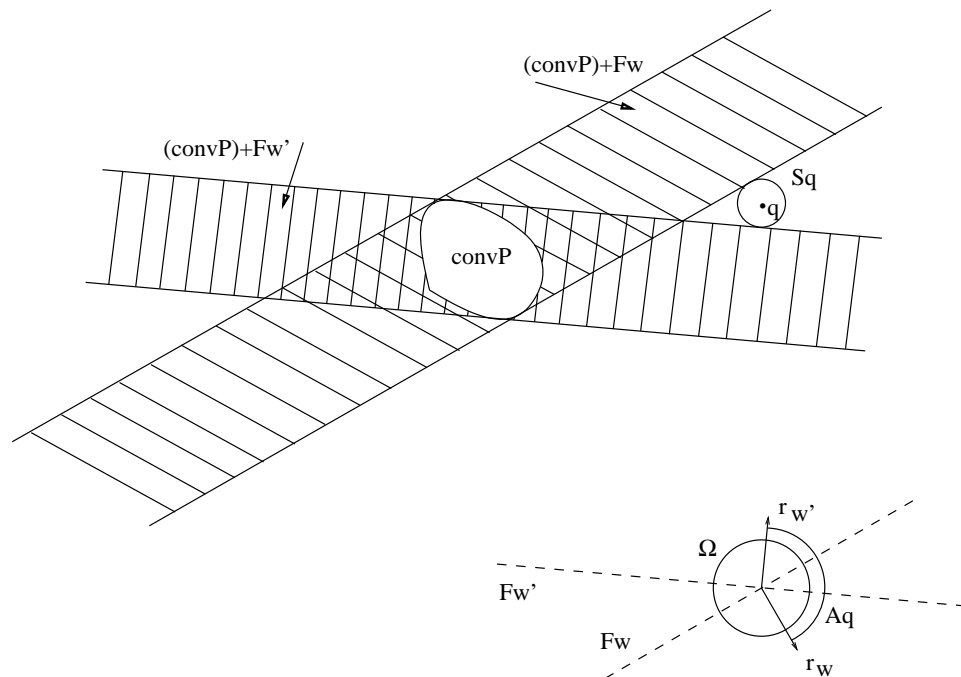
Ausserdem sei  $F_w$  der  $(k-1)$ -dim Unterraum, der in  $F$  enthalten ist, und senkrecht zu  $r_w$  steht.

Dann definieren wir uns zu jedem Punkt  $q \in (Q \cap C)$ :

$S := \{ x \mid \|x - q\| \text{ kleiner } \frac{\delta}{2} \}$

Und als letztes brauchen wir noch  $A_q := \{ w \in \Omega \mid S_q \text{ ist in der Komponente von } (C \setminus [(\text{conv}P) + F_w]) \text{ enthalten, die } [(\text{conv}P) + r_w] \text{ schneidet} \}$ .

Um die Konstruktion zu verstehen, sollten wir uns jetzt erstmal ein Bild machen:



Um den Satz mit dieser Konstruktion beweisen zu können, benötigen wir noch zwei Feststellungen. Deshalb kommt jetzt:

**Behauptung 1:** Für jedes  $q \in Q \cap C$ , ist  $A_q$  eine kompakte streng konvexe Teilmenge von  $\Omega$ .

**Beweis:** Für den Beweis nehmen wir uns ein beliebiges  $A_q$ . Zu jedem  $w \in A_q$  definieren wir uns dann,  $G_w$ , als die Komponente von  $C \setminus [(convP)+F_w]$ , die  $(convP)+r_w$  schneidet.

Dann müssen wir zu je zwei Punkten  $w, w'$  aus  $A_q$  zeigen, dass  $S_q$  auch Teilmenge von  $G_x$  ist. Dabei ist  $x$  ein Punkt auf dem kleinen Winkel des grossen Kreises, der von  $w$  und  $w'$  aufgespannt wird.

Nach Konstruktion von  $A_q$ , gilt aber, dass  $S_q$  Teilmenge von  $G_w \cap G_{w'}$  ist.

Desweiteren ist  $G_w \cap G_{w'}$  in  $G_x$  enthalten.

Deshalb folgt, dass  $S_q$  auch Teilmenge von  $G_x$  ist.

Weil  $S_q$  offen ist, ist  $A_q$  eine kompakte Teilmenge von einer offenen hemisphäre und enthält deshalb keine sich gegenüberliegenden Punkte.  $\square$

Somit hat  $A_q$  genau die Form, die im Lemma gefordert wird.  $A_q$  ist eine kompakte, streng konvexe Teilmenge der Oberfläche der Einheitskugel im Unterraum  $F$ .

Als Zweites brauchen wir dann noch:

**Behauptung 2:** Es seien  $q_1, \dots, q_m$  mit  $1 \leq m \leq k$  beliebige  $m$  Punkte aus  $(Q \cap C)$ , dann gilt  $\bigcap_{i=1}^m A_{q_i} \neq \emptyset$ .

**Beweis** Als erstes stellen wir fest, dass  $d(conv\{q_1, \dots, q_m\}, convP) \geq \delta$  ist. (Weil  $\inf\{d(convT, convP)\} = \delta$ )

Deshalb gilt auch  $d(conv\{S_{q_1}, \dots, S_{q_m}\}, convP)$  kleiner  $\frac{\delta}{2}$ , da wir nur eine offene Kugel mit Radius  $\frac{\delta}{2}$  um jedes  $q_1, \dots, q_m$  legen.

Deshalb gibt es jetzt eine Hyperebene  $H$ , die die Mengen  $\{S_{q_1}, \dots, S_{q_m}\}$  und  $P$  streng trennt.

Sei dann  $H'$  der  $(n-1)$ -dim zu  $H$  parrallele Unterraum und sei  $G := H' \cap F$ .

Weil  $H$  die Mengen  $P$  und  $\{S_{q_1}, \dots, S_{q_m}\}$  trennt, die Menge  $\{S_{q_1}, \dots, S_{q_m}\}$  aber in  $C$  enthalten ist, kann  $F$  nicht Teilmenge von  $H'$  sein.

Da  $H'$   $(n-1)$ -dim und  $F$   $k$ -dim Unterraum ist, folgt daraus, dass  $G$   $(k-1)$ -dim Unterraum ist.

Deshalb folgt, dass die Menge  $\{S_{q_1}, \dots, S_{q_m}\}$  in einer der beiden Komponenten von  $C \setminus [(convP)+G]$  enthalten ist.

Dann können wir  $w \in \Omega$  so wählen, dass  $r_w$  senkrecht zu  $G$  steht und das  $(convP)+r_w$  die Komponente von  $C \setminus [(convP)+G]$  schneidet, die die Menge  $\{S_{q_1}, \dots, S_{q_m}\}$  enthält.

Dann ist  $w$  aber in allen  $m$   $A_q$  enthalten, und deshalb  $w \in \bigcap_{i=1}^m A_{q_i}$ .  $\square$

Damit kann man die  $A_q$  zu einer Familie zusammenfassen, die aus kompakten, streng konvexen Elementen besteht und wo immer  $k$  oder weniger Elemente einen gemeinsamen Punkt haben. Deshalb gibt es in  $\Omega$  ein Paar sich gegenüberliegender Punkte  $\{y, -y\}$ , so dass jedes  $A_q$  dieses Paar  $\{y, -y\}$  scheidet.

Deshalb hat der  $(k-1)$ -Zylinder  $(convP)+F_y$  einen leeren Schnitt mit  $Q$ .  $\square$

### **3 Quellen/Literatur**

[1] Stephen R. Lay, Convex Sets and Their Applications. Wiley and Sons, New York 1982, S.84 - 92.