

Proseminar Konvexe Mengen

Grundlagen zu konvexen Mengen

Norman Wirsik

25. Juni 2005

Proseminar WiSe 2004/2005
Prof. Dr. E. Oeljeklaus
Universität Bremen

Einleitung

Dies ist die Ausarbeitung zum mündlichen Vortrag im Rahmen des Proseminars „Konvexe Mengen“ an der Universität Bremen im Wintersemester 2004/2005 und basiert auf Kapitel 2 des Buches „Convex sets and Their Applications“ von Stephen R. Lay, Seite 10-16 erschienen 1982 im Verlag Wiley & Sons, New York.

In dieser Ausarbeitung werden die Grundlagen zu konvexen Mengen und deren Anwendungen behandelt.

1 Konvexe Mengen - Grundlagen

Definition (1.1). Im folgenden bezeichne E^n den euklidischen Raum n -ter Dimension, also den n -dimensionalen Vektorraum über \mathbb{R} mit euklidischer Norm und dem Standardskalarprodukt.

Ferner werde der Ursprung des Koordinatensystems mit Θ bezeichnet.

Definition (1.2). Falls x und y Punkte im E^n sind, so ist die **Verbindungsstrecke** \overline{xy} , die x und y schneidet, die Menge aller Punkte der Form $\alpha x + \beta y$, mit $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ und $\alpha + \beta = 1$

Definition (1.3). Eine Menge S heißt **sternförmig bezüglich einem Punkt** $x \in S$, falls für jeden Punkt $y \in S$ gilt: $\overline{xy} \subset S$

Definition (1.4). Eine Menge S heißt **konvex**, falls für jedes Paar von Punkten $x, y \in S$ gilt: $\overline{xy} \subset S$

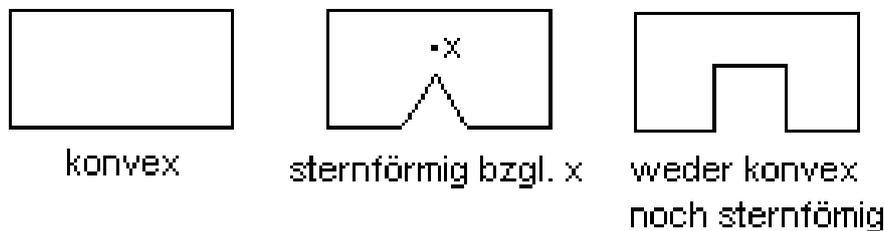


Abbildung 1:

Definition (1.5). Der **Kern** K einer Menge S ist die Menge aller Punkte $x \in S$, so dass für alle $y \in S$ gilt: $\overline{xy} \subset S$ für alle $y \in S$

Lemma (1.6). Seien x, y, z drei Punkte in E^n und sei $u \in \overline{xy}$, mit $u \neq x, u \neq y$. Dann gibt es zu jedem $v \in \overline{zu}$ ein $w \in \overline{zy}$ mit der Eigenschaft $v \in \overline{xw}$.

Beweis. Siehe auch *Abbildung 2*. O.B.d.A. sei x der Ursprung θ .

1) Weil $u \in \overline{xy}$ und $u \neq x, u \neq y$, folgt, es existiert $\lambda \in \mathbb{R}; 0 < \lambda < 1$ so dass gilt: $u = \lambda y$

2) Weil $v \in \overline{zu}$, folgt, es existiert $\alpha \in \mathbb{R}; 0 \leq \alpha \leq 1$ so dass gilt: $v = \alpha z + (1 - \alpha)u$
 Wegen 1) $\Rightarrow v = \alpha z + (1 - \alpha)\lambda y, \alpha + \lambda(1 - \alpha) > 0$

Sei

$$w := \frac{\alpha}{\alpha + \lambda(1 - \alpha)}z + \frac{\lambda(1 - \alpha)}{\alpha + \lambda(1 - \alpha)}y \in \overline{zy}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow w &= \frac{v}{\alpha + \lambda(1 - \alpha)} \\ \Rightarrow v &= [\alpha + \lambda(1 - \alpha)]w \end{aligned}$$

Da $\lambda < 1$

$$\Leftrightarrow (1 - \alpha)\lambda < (1 - \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \alpha + (1 - \alpha)\lambda < 1$$

Weil x der Ursprung ist folgt, $v \in \overline{xw}$

□

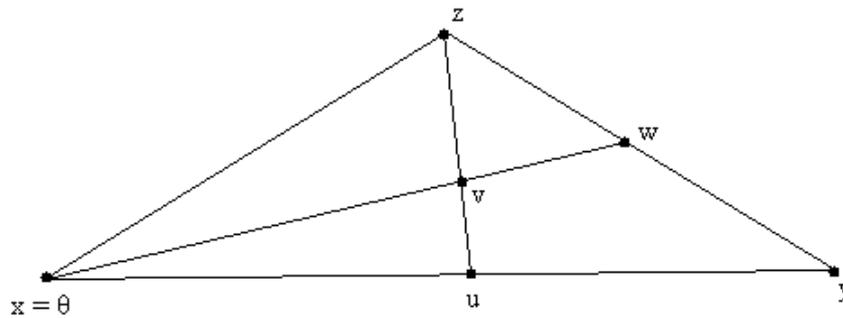


Abbildung 2:

Satz (1.7). Der Kern K einer beliebigen Menge S ist konvex.

Beweis. Siehe auch *Abbildung 3*. Seien $x \in K, y \in K$ mit $x \neq y$ und sei $u \in \overline{xy}$. Dann ist u von der folgenden Form: $u = \alpha x + (1 - \alpha)y$ für $0 \leq \alpha \leq 1$.

Es ist zu zeigen, dass $u \in K$.

Sei dazu z ein beliebiger Punkt aus S .

Falls $z = x$ oder $z = y$, so folgt $\overline{uz} \subset S$.

Falls $z \neq x$ und $z \neq y$, dann sei $v \in \overline{uz}$.

Nach Lemma (1.6) folgt, es existiert ein Punkt $w \in \overline{zy}$, so dass $v \in \overline{xw}$.

- 1) Weil $y \in K, z \in S \Rightarrow w \in S$
- 2) Weil $x \in K, w \in S \Rightarrow v \in S$

$\Rightarrow \overline{uz} \subset S \Rightarrow S$ ist sternförmig bzgl. u

Nach Definition (1.5) folgt: $u \in K$. Da u beliebig gewählt wurde, folgt: $\overline{xy} \in K$.
Da S sternförmig bzgl. beliebigem $u \in \overline{xy}$ ist, folgt daraus, der Kern ist konvex.

□

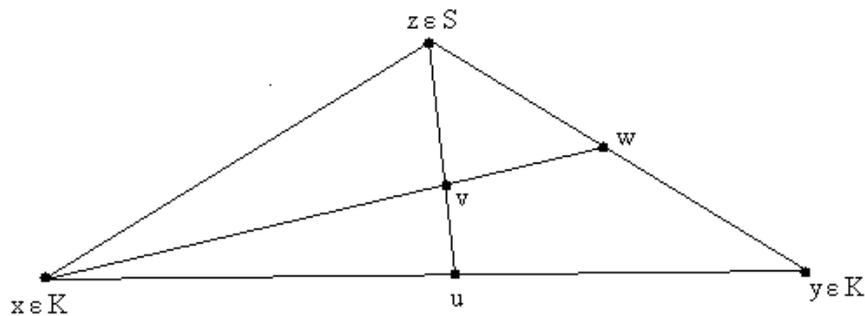


Abbildung 3:

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass eine endliche Menge von Punkten $x_1, x_2, \dots, x_m \in E^n$ linear abhängig ist, falls es reelle Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ gibt, die nicht alle gleich 0 sind, so dass $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m = \theta$. Andernfalls nennt man sie linear unabhängig. (Die Summe der Form $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$ heißt eine **Linearkombination** der Punkte x_1, x_2, \dots, x_m .) Eine Menge von Punkten $B \in E^n$ ist eine Basis für den linearen Unterraum $L \subset E^n$, falls B eine maximale linear unabhängige Untermenge von L ist. Jeder lineare Unterraum L hat eine Basis, und alle Basen von L haben die gleiche Anzahl von Elementen. Die gemeinsame Anzahl von Elementen wird Dimension von L genannt. Die Standardbasis des E^n ist die Einheitsbasis e_1, \dots, e_n . E^n hat die Dimension n .

Definition (1.8). Eine Verschiebung eines linearen Unterraums von E^n wird als **affiner Unterraum** bezeichnet. Zwei affine Unterräume sind **parallel**, falls der eine eine Translation (Verschiebung) des anderen ist. Die **Dimension eines affinen Unterraums** S ist die Dimension des entsprechendem parallelen linearen Unterraums. Die **Dimension einer Menge** S ist die Dimension des kleinsten affinen Unterraums, der die Menge enthält und wird bezeichnet als $\dim S$. Ein affiner Unterraum der Dimension 1 heißt **Gerade**. Ein affiner Unterraum der Dimension $n - 1$ heißt **Hyperbene**.

Die linearen Unterräume des E^3 sind gerade der Ursprung Θ , die Geraden durch Θ und die Ebenen durch Θ . Folglich sind die zugehörigen affinen Unterräume im E^3 Punkte (null-dimensional), Geraden (ein-dimensional) und Ebenen (zwei-dimensional) und der E^3 selber.

In der Definition einer konvexen Menge C fordern wir, dass $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$, wenn $x, y \in C$ und $0 \leq \lambda \leq 1$. Wenn wir nun fordern, dass $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$ für *alle* reellen Zahlen λ , dann erhalten wir eine „affine“ Menge.

Definition (1.9). Eine Menge S heißt **affin**, falls aus $x, y \in S$ folgt:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in S \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}$$

.

Satz (1.10). Eine Menge S ist affin, genau dann wenn sie ein affiner Unterraum ist.

Beweis.

„ \Rightarrow “

Sei S affin und sei $x \in S$ beliebiger fester Punkt.

Sei $U := -x + S \Leftrightarrow S = x + U$.

Zu zeigen: U ist ein Unterraum des E^n

Dazu seien $u_1, u_2 \in U$. Dann existieren s_1 und s_2 aus S , so dass $u_1 = -x + s_1$ und $u_2 = -x + s_2$.

Also gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u_1 + \lambda u_2 &= (-x + s_1) + \lambda(-x + s_2) \\ &= -x + \lambda \left[2 \left(\frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2 \right) - x \right] + (1 - \lambda)s_1 \end{aligned}$$

Weil S affin ist, ist $y := \frac{1}{2}s_1 + \frac{1}{2}s_2 \in S$

Aus demselben Grund gilt: $2y + (-1)x \in S$ und $\lambda[2y - x] + (1 - \lambda)s_1 \in S$.

$$\Rightarrow u_1 + \lambda u_2 \in -x + S = U$$

$\Rightarrow U$ ist ein Unterraum des E^n und $S = x + U$ ist ein affiner Unterraum.

„ \Leftarrow “

Sei $S := x + U$ für beliebiges $x \in E^n$ und sei U Unterraum.

Seien $s_1, s_2 \in S$.

$$\Rightarrow \exists u_1, u_2 \in U : s_1 = x + u_1 \wedge s_2 = x + u_2$$

Daraus folgt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \lambda s_1 + (1 - \lambda)s_2 &= \lambda(x + u_1) + (1 - \lambda)(x + u_2) \\ &= \lambda x + \lambda u_1 + x + u_2 - \lambda x - \lambda u_2 \\ &= x + \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2. \end{aligned}$$

Weil U ein Unterraum

$$\Rightarrow \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 \in U$$

$$\Rightarrow \lambda s_1 + (1 - \lambda)s_2 \in x + U = S$$

$\stackrel{Def.}{\Rightarrow} S$ ist affin

□

Definition (1.11). Sei $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, 2, \dots, k$, und sei $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ Dann heißt

$$y := \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$$

affine Kombination der Punkte x_1, x_2, \dots, x_k .

Wenn zusätzlich gilt, $\lambda_i \geq 0$ für alle i , dann wird y **konvexe Kombination** der Punkte x_1, x_2, \dots, x_k genannt.

Es folgt, dass eine Menge genau dann konvex (beziehungsweise affin) ist, wenn die Menge abgeschlossen ist bezüglich der konvexen (beziehungsweise affinen) Kombination ihrer Elementenpaare. Der nächste Satz beweist dies für die Kombination beliebig vieler Elemente.

Satz (1.12). Eine Menge S ist konvex genau dann, wenn jede konvexe Kombination von Punkten aus S wieder in S liegt.

Beweis.

1.) Konvexe Kombination der Punkte $x_1, \dots, x_k \in S \Rightarrow$ Menge konvex

Das ist gerade die Definition von konvex.

2.) Aus konvex \Rightarrow konvexe Kombination der Punkte $x_1, \dots, x_k \in S$

Sei S konvex.

Vollständige Induktion nach k

Sei k definiert als die Anzahl der Punkte x_i einer konvexen Kombination.

Induktionsanfang: Für $k = 2$ gilt:

$y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ Da $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, mit $\lambda_1 \geq 0$ und $\lambda_2 \geq 0$ gilt, weil S konvex: $y \in S$.

Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für k Punkte aus S .

Induktionsschritt $k \rightarrow k + 1$

Sei $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1}$, $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $x_i \in S$ für alle i

Falls $\lambda_{k+1} = 1 \Rightarrow x = x_{k+1} \in S$

Falls $\lambda_{k+1} < 1$

$$\Rightarrow \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1 - \lambda_{k+1} > 0$$

$$x = (\lambda_1 + \dots + \lambda_k) \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} x_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} x_k \right) + \lambda_{k+1} x_{k+1}$$

Nach Induktionsannahme gilt:

$$y \equiv \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} x_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \dots + \lambda_k} x_k \text{ ist aus } S.$$

Es gilt:

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1 - \lambda_{k+1} > 0$$

Wieder in die Gleichung einsetzen:

$\Rightarrow x = (1 - \lambda_{k+1})y + \lambda_{k+1}x_{k+1}$ ist konvexe Kombination von zwei Punkten aus S und weil S konvex.

$$\Rightarrow x \in S$$

$\Rightarrow S$ ist konvex.

□

Satz (1.13). Eine Menge S ist affin genau dann, wenn jede affine Kombination von Punkten aus S wieder in S liegt.

Beweis: Analog zum vorangegangenen Beweis.

□

Definition (1.14). Eine endliche Menge von Punkten x_1, \dots, x_m heißt **affin abhängig**, falls es $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, nicht alle $\lambda_i = 0$ gibt, so dass gilt:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$$

und

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = \Theta$$

Andernfalls wird die Menge als **affin unabhängig** bezeichnet.

Satz (1.15). 1) Jede Teilmenge des E^n aus mindestens $n + 1$ Punkten ist linear abhängig.

2) Jede Teilmenge des E^n aus mindestens $n + 2$ Punkten ist affin abhängig

Beweis.

ad 1) $\dim E^n = n$

$\Rightarrow n$ ist die maximale Anzahl von linear unabhängigen Punkten (Anzahl der Basisvektoren)

\Rightarrow eine Menge aus $n + 1 > n$ Punkten muss linear abhängig sein

◇

ad 2) Seien x_1, \dots, x_m Punkte des E^n , mit $m \geq n + 2$ und $x_i \neq \Theta$.

Dann sind die $m - 1$ Vektoren $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_m - x_1$ linear abhängig. Dies folgt aus Teil 1).

\Rightarrow es existieren Skalare $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, nicht alle $\alpha_i = 0$, so dass es folgende, nicht-triviale Darstellung der 0 gibt:

$$\alpha_2(x_2 - x_1) + \alpha_3(x_3 - x_1) + \dots + \alpha_m(x_m - x_1) = \Theta$$

Klammert man nun x_1 aus, erhält man:

$$-(\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_m)x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_mx_m = \Theta$$

mit $\alpha_1 := -(\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_m)$ ergibt sich:

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_mx_m = \Theta$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m \alpha_i = 0$$

$\stackrel{Def.}{\Rightarrow} x_1, \dots, x_m$ sind affin abhängig

□

Damit haben wir nun drei Arten kennengelernt, wie man Punkte im E^n kombiniert: Linear-, Affin- und Konvexkombination. Falls eine Menge im algebraischen Sinn abgeschlossen bzgl. allen Linearkombinationen ist, nennt man sie Untervektorraum. Falls sie abgeschlossen ist bzgl. aller Konvexkombinationen, ist sie eine konvexe Menge und bzgl. aller Affinkombinationen, ein affiner Unterraum.

Aus der Linearen Algebra wissen wir, dass der Schnitt von Untervektorräumen wieder ein Untervektorraum ist. Ähnliches gilt für affine und konvexe Mengen.

Satz (1.16). 1) Falls $\{S_\alpha\}, \alpha \in \mathcal{A}$, Familie von konvexen Mengen ist, dann ist auch $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} S_\alpha$ konvex.

2) Falls $\{T_\beta\}, \beta \in \mathcal{B}$, Familie von affinen Mengen ist, dann ist auch $\bigcap_{\beta \in \mathcal{B}} T_\beta$ affin.

Beweis.

ad 1) Wenn x und y im Schnitt aller S_α liegt, dann sind x und y in jedem einzelnen S_α . Weil jedes S_α konvex ist, gilt definitionsgemäß: $\overline{xy} \subset S_\alpha$ für alle α . Daher ist $\overline{xy} \subset \bigcap S_\alpha$ und damit ist der Schnitt konvex.

◇

ad 2) Wenn x und y im Schnitt aller T_β liegt, dann sind x und y in jedem einzelnen T_β . Weil jedes T_β affin ist, gilt definitionsgemäß: $\lambda x + (1 - \lambda)y \in T_\beta$ für alle β und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Daher ist $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \bigcap T_\beta$ und damit ist der Schnitt affin.

□

Mit dem vorhergehenden Satz lässt sich nun - analog zur linearen Hülle in der linearen Algebra - das konvexe bzw. affine Erzeugnis einer Menge definieren:

Definition (1.17). Sei $S \subset E^n$. Dann ist die **affine Hülle** von S definiert als der Durchschnitt über alle affinen Obermengen von S . Die affine Hülle sei im Folgenden mit $\text{aff } S$ bezeichnet.

Nun können wir topologische Eigenschaften der konvexen Mengen etwas genauer untersuchen. Dafür werden folgende Definitionen benötigt.

Definition (1.18). Sei (X, \mathfrak{T}) ein topologischer Raum und $Y \subset X$. Dann wird die **Spurtopologie** bzgl. Y definiert als $\mathfrak{T}_Y := \{B \subset Y \mid \exists T \in \mathfrak{T} : B = Y \cap T\}$.

Definition (1.19). Das **Innere** einer Menge S ist die Vereinigung aller in S enthaltenen offenen Mengen und wird mit $\text{int } S$ bezeichnet.

Das **relative Innere** einer Menge S ist das Innere bzgl. der Spurtopologie bzgl. $\text{aff } S$ und wird mit $\text{relint } S$ bezeichnet.

Falls S aus einem einzigen Punkt x besteht, dann ist $\text{relint } S = \text{relint}\{x\} = x$. Falls S aus einem Geradensegment \overline{xy} , dann ist $\text{relint } S$ das Geradensegment ohne dessen Endpunkte. Speziell besteht $\text{relint } \overline{xy}$ aus allen Punkten der Form $\alpha x + \beta y$, mit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ und $\alpha + \beta = 1$.

Satz (1.20). Sei C eine konvexe Menge. Falls $x \in \text{int } C$ und $y \in C$, dann ist $\text{relint } \overline{xy} \subset \text{int } C$.

Beweis. Siehe auch *Abbildung 4*. Sei $y \in C$ und o.B.d.A. sei $y = 0 = \Theta$ der Ursprung.

Sei $x \in \text{int } C \stackrel{\text{Def.}}{\Rightarrow} \exists$ eine offene Kugel $B(x, \delta) \subset C$.

Für beliebiges $u \in \text{relint } \overline{xy}$ existiert ein λ , ($0 < \lambda < 1$), so dass $u = \lambda x$.

Es gilt: $B(\lambda x, \lambda \delta) = \lambda B(x, \delta)$

Denn: Zu zeigen: $\exists y \in B(x, \delta) : \lambda y \in B(x, \delta)$.

Sei $y \in B(x, \delta)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} & \|x - y\| < \delta \\ \Leftrightarrow & \lambda \|x - y\| < \lambda \delta \\ \Leftrightarrow & \|\lambda x - \lambda y\| < \lambda \delta \end{aligned}$$

Weil C konvex ist und $0 \in C$, gilt: $\lambda B(x, \delta) \subset C$

$\Rightarrow B(\lambda x, \lambda \delta) = B(u, \lambda \delta) \subset C$

Da die Kugel um u mit Radius $\lambda \delta$ in C enthalten ist, folgt daraus, gemäß der Definition des Inneren, dass $u \in \text{int } C$.

□

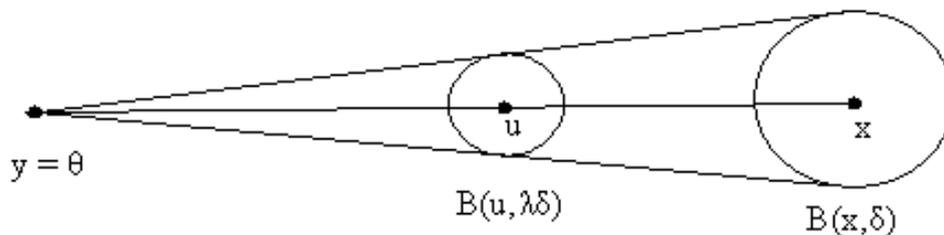


Abbildung 4:

Korollar (1.21). Falls C konvex ist, dann ist das Innere $\text{int } C$ konvex.

Beweis. Seien $x, y \in \text{int } C$.

Nach Satz (1.20) gilt: $\text{relint } \overline{xy} \subset \text{int } C$

Nun ist aber $\overline{xy} = \text{relint } \overline{xy} \cup \{x, y\}$, daher ist $\overline{xy} \subset \text{int } C$.

Damit gilt, dass $\text{int } C$ konvex ist.

□

Definition (1.22). Die **abgeschlossene Hülle** einer Menge S ist der Durchschnitt aller geschlossenen Mengen $(S_i)_{i \in I}$, die S enthalten und wird mit $\text{cl } S$ bezeichnet.

Satz (1.23). Falls C eine konvexe Menge ist, dann ist der Abschluss $\text{cl } C$ konvex.

Beweis. Siehe auch *Abbildung 5*. Seien $x, y \in \text{cl } C$ und $u \in \overline{xy}$. Dann ist u von der Form $u = \alpha x + \beta y$, mit $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ und $\alpha + \beta = 1$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachte die offene Kugel $B(u, \frac{1}{n})$.

Weil $x, y \in \text{cl } C \Rightarrow \exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap C \wedge \exists y_n \in B(y, \frac{1}{n}) \cap C$

Behauptung: $u_n := \alpha x_n + \beta y_n \in B(u, \frac{1}{n})$.

Bew: zu zeigen: $d(u_n, u) < \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} \|u - u_n\| &= \|\alpha x + \beta y - \alpha x_n - \beta y_n\| \\ &= \|\alpha x + \beta y + \alpha x_n + \beta y - \alpha x_n - \beta y_n - \alpha x_n - \beta y\| \quad [\text{nach Dreiecksungleichung}] \\ &\leq \|\alpha x + \beta y - \alpha x_n - \beta y\| + \|\alpha x_n + \beta y - \alpha x_n - \beta y_n\| \\ &= \alpha \|x - x_n\| + \beta \|y - y_n\| \\ &< \alpha \frac{1}{n} + \beta \frac{1}{n} = \underbrace{(\alpha + \beta)}_{=1 \text{ n. Vor.}} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Ferner gilt, weil $u_n \in \overline{x_n y_n}$ und C konvex ist: $u_n \in C$

\Rightarrow Betrachte die so konstruierte Folge (u_n) , es gilt offensichtlich $u_n \rightarrow u$, also gilt $u \in \text{cl } C$.

$\Rightarrow \text{cl } C$ ist konvex.

□

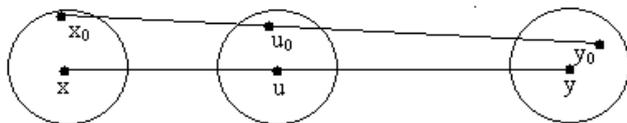


Abbildung 5:

Quellennachweis

- (1) Lay, Stephen R., „Convex sets and Their Applications“, Seite 10-16 , Wiley & Sons, New York, 1982