Proseminar
Konvexe Mengen
WS 2004/2005
Prof. Dr. Eberhard Oeljeklaus

Stützende Hyperebenen

Christian Kapitza

17. April 2005

Benutzte Literatur:

Steven R. Lay
Convex sets and their applications
New York etc.: John Wiley and Sons
1982

Stützhyperebenen

1. Definition

Eine **Hyperebene** H im E^n ist ein $n-1$ dimensionaler Unterraum. Ist f ein lineares Funktional, das heißt $f : E^n \to \mathbb{R}$ linear, so lässt sich H darstellen als $H = [f, \alpha] = \{x \in E^n | f(x) = \alpha\}$.
Eine Hyperebene H **stützt** eine Menge $S \subset E^n$ in einem Punkt $x \in S$, wenn $x \in H$ und H die Menge S beschränkt, d.h. S liegt ganz auf einer Seite von H. Für $H = [f, \alpha]$ gilt dann $f(y) \leq \alpha$ für alle $y \in S$.
H heißt **Stützhyperebene** oder auch **Stützebene**.

Beispiel im E^2:

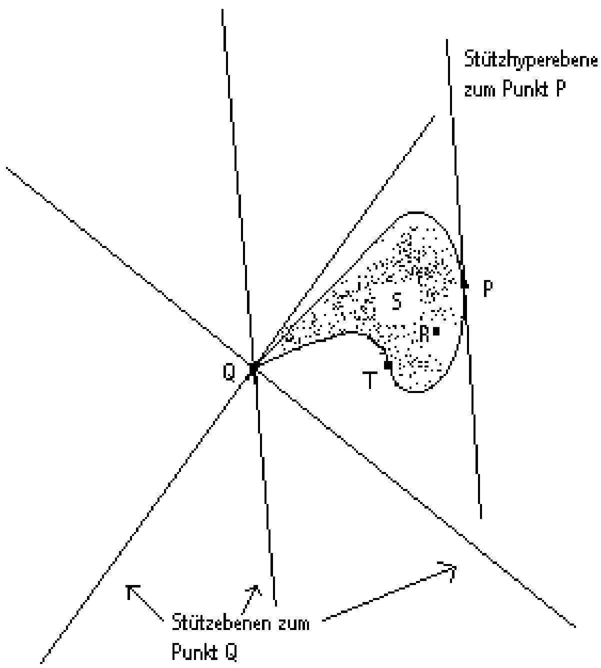

Abbildung 1: Der Punkt Q besitzt mehrere Stützebenen, der Punkt P genau eine, die Tangente. Die Punkte T und R besitzen gar keine Stützebenen. Falls die Menge nicht niederdimensional ist, besitzen innere Punkte nie Stützebenen.

Erstes Ziel dieses Vortrages ist eine neue Charakterisierung von abgeschlossenen konvexen Mengen. Dazu folgende zwei Sätze:

2. Satz

Sei $S \subset E^n$ abgeschlossen und konvex. Es gilt:
Ist x ein Randpunkt von S, so existiert mindestens eine Hyperebene, die S in x stützt.

Beweis

Ist $dimS < n$, so ist jede Hyperebene, die S enthält, eine stützende Hyperebene von S in jedem Punkt $x \in S$ nach Definition.
Ist $dimS = n$, so ist $intS \neq \emptyset$. Ein bereits früher bewiesenes Korollar besagt, dass wenn $S \subset E^n$ offen und konvex und F eine k-dimensionale Ebene ist, $0 \leq k \leq n$, und gilt $F \cap S = \emptyset$, dann gibt es eine Hyperebene H mit $F \subset H$ und $H \cap S = \emptyset$. Dieses Korollar impliziert hier, dass für jeden Randpunkt x eine Hyperebene H, welche x enthält, existiert und $intS$ beschränkt. Es folgt, dass H auch S beschränkt. Somit stützt H die Menge S in x. ■

3. Satz

Sei $S \subset E^n$ abgeschlossen und $intS \neq \emptyset$. Es gilt:
Wenn durch jeden Randpunkt von S eine Hyperebene durchgeht, die S stützt, dann ist S konvex.

Bemerkung

Dies ist nur eine partielle Umkehrung von Satz 2, da nun zusätzlich gefordert wird, dass $intS \neq \emptyset$. Dass diese zusätzliche Bedingung notwendig ist, zeigt dieses Beispiel in $\mathbb{R}$:
Sei $S = \{a, b\}$ mit $a \neq b$. Dann ist S abgeschlossen (ein Punkt ist abgeschlossen, ebenso die endliche Vereingung) und die Stützhyperebenen, die in diesem Fall null-dimensional sind, sind die beiden Punkte selber. Also geht durch jeden Randpunkt von S eine Stützebene. Trotzdem ist S sicherlich nicht konvex.

Beweis für $n = 1$

Sei $S \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und $intS \neq \emptyset$. Ist $S = \mathbb{R}$, so ist S konvex.
Ist $S \subsetneq \mathbb{R}$, so beweisen wir indirekt.
Annahme: S ist nicht konvex. Da nach Voraussetzung $intS \neq \emptyset$, gibt es ein $u \in intS$. Sei I ein abgeschlossenes Intervall, $I \subset S$, wobei $I = [a, b]$ mit $a := \min\{x \in S \mid [x, u] \subset S\}$ und $b := \max\{y \in S \mid [u, y] \subset S\}$. Da S nach unserer Annahme nicht konvex ist gilt $[a, b] \subsetneq S$.

Dies bedeutet jedoch, dass
1. Fall: $\exists y_0 \in S,\ y_0 > b$. Dann ist aber $b \in S$ ein Randpunkt, durch den keine Stützebene geht. $\lightning$(zur Voraussetzung).
2. Fall: $\exists x_0 \in S,\ x_0 < a$. Dann ist aber $a \in S$ ein Randpunkt, durch den keine Stützebene geht. $\lightning$(zur Voraussetzung).
$\Rightarrow$ Die Annahme war falsch, S ist konvex. ■

Beweis für $n \geq 2$

Sei wieder $S \subset E^n$ abgeschlossen und $intS \neq \emptyset$. Ist $S = E^n$, so ist S konvex. Ist $S \subsetneq E^n$ so dürfen wir annehmen, dass es einen Punkt $x \notin S$ gibt. Außerdem gibt es, da $intS \neq \emptyset$, ein $y \in intS$ und einen Randpunkt b von S, mit $b \in relint\overline{xy}$. Die nach Voraussetzung existierende stützende Hyperebene H von S durch b enthält nicht x (denn würde sie b und x enthalten, so enthielte sie auch die Strecke $\overline{bx}$ und damit auch die Strecke $\overline{xy}$, was im Widerspruch dazu steht, dass y ein innerer Punkt ist). Folglich gilt für den abgeschlossenen Halbraum, der von H begrenzt wird und y enthält, dass er S einschließt, aber nicht x enthält. Da x ein beliebiger Punkt nicht in S ist, kann man dieses Verfahren für alle $x \notin S$ anwenden und so schließen, dass S gleich dem Schnitt aller so entstandenen Halbräume, welche S enthalten, ist. Also ist S ein Schnitt von konvexen Mengen und selbst konvex. ■

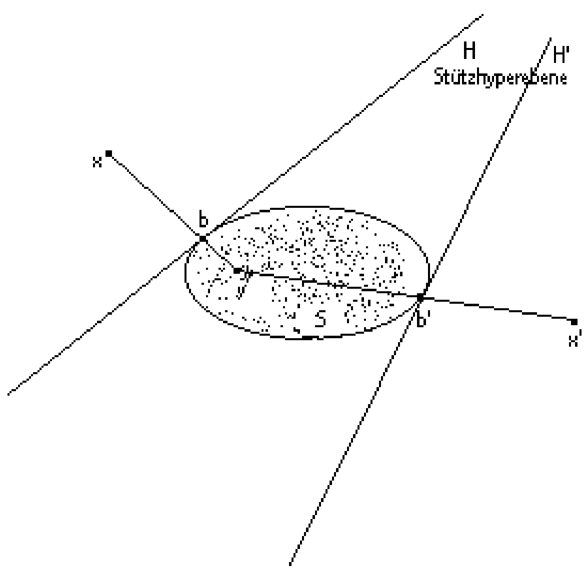

Abbildung 2: Veranschaulichung der Konstruktion von Halbräumen.

Die Sätze 2 und 3 kombiniert ergeben die folgende Charakterisierung von abgeschlossenen konvexen Mengen mit nicht leerem Inneren:

4. Satz

Sei $S \subset E^n$ abgeschlossen und $intS \neq \emptyset$. Es gilt:

S ist konvex genau dann, wenn durch jeden Randpunkt von S eine die Menge S stützende Hyperebene geht.

Beweis

$\Rightarrow$ Gilt nach Satz 2
$\Leftarrow$ Gilt nach Satz 3 $\square$

Bemerkung

Das interessante an diesem ersten wichtigen Satz ist, dass er die *globale paarweise* Definition von Konvexität (Die Strecke zweier beliebiger Punkte muss ganz in S liegen) mit einer Eigenschaft von *einigen einzelnen Punkten* (jeder Randpunkt muss in einer Stützebene liegen) gleichsetzt.

Das zweite Ziel dieses Vortrags ist es, eine konvexe Menge S als die konvexe Hülle einer „minimalen" Teilmenge von S darzustellen.
Um uns diesem Ziel zuzuwenden, überzeugen wir uns erst von einigen Tatsachen:
Sei S im folgenden immer eine konvexe Menge.
Sobald S aus mehr als zwei Punkten besteht, ist es immer möglich S als konvexe Hülle einer echten Teilmenge $\tilde{S} \subset S$ anzugeben, z.B. mit $\tilde{S} = S \backslash \{x\}$ wobei $x \in relintS$.
Ist S kompakt, so ist $\tilde{S} = bdS$ immer eine richtige Lösung. Doch wenn man z.B. an ein Dreieck oder einen Quader denkt, so leuchtet auch ein, dass der Rand noch nicht die kleinst mögliche Lösung ist. Dies wäre in diesem Fall die Menge aller Eckpunkte.
Daher widmen wir uns im nächsten Abschnitt der Frage:
Gibt es immer eine kleinste Teilmenge $S^\star \subset S$, so dass $convS^\star = S$, und wenn ja, wie kann sie beschrieben werden?
Um diese Frage zu klären benötigen wir folgende Definition:

5. Definition

1. Sei S eine konvexe Menge. Ein Punkt $x \in S$ heißt **Extrempunkt** von S, wenn es keine Gerade ganz in S liegend gibt, die x in ihrem relativen Inneren enthält.

2. Die Menge aller Extrempunkte von S heißt **Profil** von S.

Beispiele

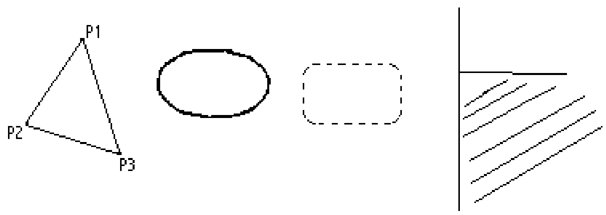

Abbildung 3: Das Profil eines Dreiecks sind seine drei Eckpunkte, das Profil einer Ellipse ist der ganze Rand. Offene Mengen haben kein Profil, genauso wenig der ganze Raum und Halbräume. Viertelräume hingegen haben einen Eckpunkt als Profil.

Folgerungen

1. Ein Punkt $x \in S$, wobei S wieder eine konvexe Menge ist, ist genau dann ein Extrempunkt von S, wenn die Menge $S \backslash \{x\}$ konvex ist.
   Beweis:
   $\Rightarrow$ Sei x ein Extrempunkt von S. Dann gibt es keine Gerade in S, die x in ihrem Inneren enthält. Folglich gibt es in $S \backslash \{x\}$ keine Gerade durch zwei Punkte, wo nicht die ganze Verbindungsstrecke in $S \backslash \{x\}$ liegt. Also ist $S \backslash \{x\}$ konvex.
   $\Leftarrow$ Sei $S \backslash \{x\}$ konvex. Dann liegt jede Gerade durch zwei Punkte in $S \backslash \{x\}$ ganz in $S \backslash \{x\}$. Nach Voraussetzung ist aber auch S konvex, und besitzt somit die gleiche Eigenschaft wie $S \backslash \{x\}$. Also kann x nur ein Randpunkt irgendeiner Verbindungsstrecke in S sein. Folglich ist x ein Extrempunkt. ■

2. Jede Teilmenge $S^\star$ von S für die gilt, dass $convS^\star = S$ ist, muss das Profil von S enthalten. (Beweis folgt aus 1.)

3. Im Allgemeinen muss $S^\star$ mehr Elemente haben, als das Profil von S. Dies kann man sich an den oben genannten Beispielen von offenen Mengen oder dem Halb- und Viertelraum sehr leicht klarmachen.

Anders verhält sich dies jedoch bei *kompakten*, konvexen Mengen. Da gilt:

6. Satz

Sei $S \subset E^n$ kompakte und konvexe Menge. Es gilt:

S ist die konvexe Hülle ihres Profils P.
Jedes $x \in S$ ist Konvexkombination von Elementen der Menge, die aus dem Profil von S besteht.

Beweis

1. ***Lemma***
Sei $S \subset E^n$ abgeschlossen und konvex. Sei H eine Stützebene von S in einem Punkt $x \in S$. Es gilt:
Ist x ein Extrempunkt von $H \cap S$, so ist x ein Extrempunkt von S.
Beweis: Da H eine Hyperebene ist, gibt es ein lineares Funktional f ungleich der Nullfunktion, so dass $H = [f, \alpha]$
$= \{x \in E^n \mid f(x) = \alpha\}$. Sei x aus dem Profil von $S \cap H$. Dann gilt $f(x) = \alpha$, $f(y) \leq \alpha$ für alle $y \in S$ und f ist linear.
Annahme: x ist nicht aus dem Profil von S. Das heißt, x liegt im Inneren einer Geraden, also $x = \lambda \cdot u + (1-\lambda) \cdot v$ mit $\lambda \in (0,1),\ u, v \in S$ und entweder $u \notin S \cap H$ oder $v \notin S \cap H$ (sonst wäre x kein Extrempunkt in $S \cap H$). Folglich gilt $f(u) < \alpha$ oder $f(v) < \alpha$.
1. Fall: $f(u) < \alpha$. Dann gilt $\alpha = f(x) = f(\lambda \cdot u + (1-\lambda) \cdot v)$
$\overset{linear}{=} \lambda \cdot f(u) + (1-\lambda) \cdot f(v) < \lambda \cdot \alpha + (1-\lambda) \cdot \alpha = \alpha. \quad ϟ$
2. Fall: $f(v) < \alpha$. Dann gilt $\alpha = f(x) = f(\lambda \cdot u + (1-\lambda) \cdot v)$
$\overset{linear}{=} \lambda \cdot f(u) + (1-\lambda) \cdot f(v) < \lambda \cdot \alpha + (1-\lambda) \cdot \alpha = \alpha. \quad ϟ$
$\Rightarrow$ Die Annahme war falsch. Es gilt: Ist x ein Extrempunkt von $S \cap H$, so ist x ein Extrempunkt von S. $\square$

2. ***Vollständige Induktion*** nach k, mit $k = dimS,\ k \leq n$.
   Induktionsanfang: Ist $k = 0$, so ist S nur ein Punkt. Da dieser Punkt trivialerweise auch das Profil P von S ist, gilt $convP = S$.
   Induktionsvoraussetzung: Gelte der Satz für jede kompakte, konvexe Menge der Dimension höchstens $k-1$.
   Induktionsschritt: Sei $dimS = k,\ x \in S$. Ist x im relativen Rand von S, so gibt es nach Satz 2 (ist $S \subset E^n$ abgeschlossen und konvex und x ein Randpunkt von S so gibt es mindestens eine Stützhyperebene die S in x stützt) angewandt auf S als Teilmenge der affinen Hülle von S, eine k-1 dimensionale Hyperebene, die S in x stützt. Die Menge $S \cap H$ ist kompakt und konvex, wobei $dim(S \cap H) \leq k-1$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt dann, dass x eine Konvexkombination der Extrempunkte von $S \cap H$ ist. Nach dem Lemma folgt, dass x eine Konvexkombination der Extrempunkte von S ist.
   $\Rightarrow$ Es gilt $bdS \subset convP$. $\square$

3. ***noch z.z.:*** $intS \subset convP$
   Sei x aus dem relativen Inneren von S. Sei L eine Gerade in der affinen Hülle von S durch x. Dann ist $L \cap S$ ein Geradenstück mit Endpunkten y und z, wobei $y, z \in bdS$. Nach 2.) sind y und z Konvexkombinationen der Extrempunkte von S. Folglich ist $x \in \overline{yz}$,
   $x = \lambda \cdot y + (1-\lambda) \cdot z$ wobei $\lambda \in (0,1)$ auch Konvexkombination der Extrempunkte von S.
   $\Rightarrow$ Es gilt $intS \subset convP$. $\square$

$\Rrightarrow$ Insgesammt haben wir gezeigt: $S \subset convP$.
Da $convP \subset S$ für $P \subset S$ und S konvex ist, folgt:
$S = convP$. $\blacksquare$

Bemerkungen

1. Da wir jetzt wissen, dass für jede kompakte, konvexe Menge S gilt, dass es die konvexe Hülle ihres Profils ist und das Profil die kleinste Menge mit dieser Eigenschaft ist, können wir folgern, dass jede kompakte, konvexe Menge S mindestens einen Extrempunkt besitzt.

2. Für konvexe Mengen die nicht kompakt sind, ist keine einfache Charakterisierung dieser Art möglich, wie folgende Beispiele im $\mathbb{R}^2$ zeigen:

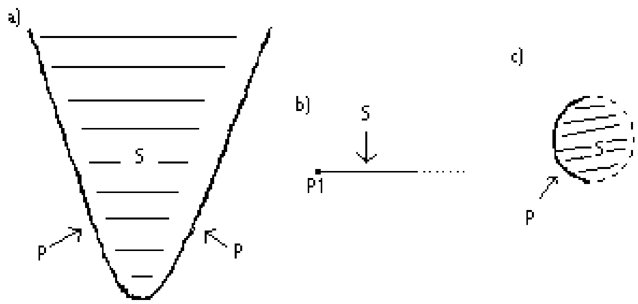

Abbildung 4: Verschiedene Figuren und ihr Profil

Zu a): S ist der Flächeninhalt einer Parabel, d.h. S ist konvex aber unbegrenzt und damit nicht kompakt. Das Profil von S ist die Parabel selber. Es gilt trotzdem: $convP = S$.
Zu b): S ist eine Halbgerade, d.h. S ist konvex aber unbegrenzt und somit nicht kompakt. Das Profil von S ist der Punkt $P1$. Es gilt hier: $convP \neq S$.
Zu c): S ist ein halboffener, halbgeschlossener Kreis, d.h. S ist konvex und beschränkt, aber nicht abgeschlossen, also nicht kompakt. Das Profil von S ist der linke Halbkreis. Folglich gilt $convP \neq S$.
Generell gilt also: Ist S nicht kompakt, das Profil nicht leer, so $convP = S$ oder $convP \neq S$.

3. Es gibt Ähnlichkeiten zwischen dem Profil einer kompakten, konvexen Menge und einer Basis eines linearen Unterraums:

   - Eine Basis B eines linearen Unterraums U ist eine linear unabhängige Teilmenge von U, welche den Unterraum selbst aufspannt, in dem Sinn, dass jedes Element von U eine Linearkombination der Elemente in B ist. Jeder Unterraum des E^n besitzt eine Basis, und obwohl die Basis nicht eindeutig ist, hat sie immer die gleiche Anzahl an Elementen.
   - Eine affine Teilmenge F des E^n besitzt eine affin unabhängige Teilmenge A von F mit einer endlichen Anzahl von Elementen, so dass die affine Hülle von A gleich F ist. Das heißt A spannt F affin auf.
   - Wenn wir eine Menge als konvex unabhängig definieren, das heißt, dass kein Element der Menge eine Konvexkombination der anderen Elemente ist, dann ist das Profil $P \subset S$ eine konvex un-

abhängige Teilmenge von S, wobei S wieder kompakt und konvex, so dass die konvexe Hülle von P gleich S ist. In der Analogie geschprochen heißt das, dass P die Menge S konvex aufspannt. Unglücklicherweise, obwohl das Profil eindeutig ist, kann es unendlich viele Elemente haben.
Ist die Menge S nicht kompakt bricht diese Analogie leider völlig zusammen.

Zum Schluss noch einige Sätze über Stützhyperebenen und Extrempunkte:

7. Satz

Sei f ein lineares Funktional definiert auf einer kompakten, konvexen Menge $S \subset E^n$. Es gilt:
Es existieren Extrempunkte $\bar{x}$ und $\bar{y}$, $\bar{x}, \bar{y} \in S$ so dass $f(\bar{x}) = \max_{x \in S} f(x)$ und $f(\bar{y}) = \min_{x \in S} f(x)$.

Beweis

1. Wir wissen schon, dass

   - Nach einem bereits gezeigten Satz lineare Funktionale auf endlich dimensionalen Vektorräumen stetig sind. Folglich ist f stetig.
   - Da S kompakt ist, nach einem früher schon bewiesenen Satz, welcher besagt, dass stetige Abbildungen auf kompakten Mengen ihr Minimum und Maximum annehmen, gilt, dass es einen Punkt $y' \in S$ gibt mit $f(y') = \min_{x \in S} f(x) \equiv \gamma$ sowie einen Punkt $x' \in S$ mit $f(x') = \max_{x \in S} f(x) \equiv \mu$.
   - Da S kompakt und konvex ist nach Satz 6 (Jedes Element einer kompakten, konvexen Menge ist Konvexkombination der Elemente des Profils) Extrempunkte $x_1, \dots, x_k \in S$ und nicht negative $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $y' = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ mit $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Analog für x'.

2. Indirekt:
   Annahme: Für keinen der Extrempunkte gilt $f(x) = \gamma$.
   $\Rightarrow f(x_i) > \gamma$ für $i = 1, \ldots, k$ mit γ als Minimum von f auf S. Das heißt aber, dass $\gamma = f(y') = f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i) \overset{linear}{=} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i) > \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \gamma$
   $= \gamma \cdot \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \gamma \quad \lightning$
   Folglich muss mindestens ein Extrempunkt $\bar{y}$ der Bedingung $f(\bar{y}) = \gamma$ genügen. $\square$

3. Wieder indirekt:
   Annahme: Für keinen Extrempunkt gilt $f(x) = \mu$.
   $\Rightarrow f(x_i) < \mu$ für $i = 1, \ldots, k$ mit μ als Maximum von f auf S. Das heißt aber, dass $\mu = f(x') = f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i) \overset{linear}{=} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i) < \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu$
   $= \mu \cdot \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \mu \quad \lightning$
   Folglich muss mindestens ein Extrempunkt $\bar{x}$ der Bedingung $f(\bar{x}) = \mu$ genügen. $\square$

Insgesamt folgt, dass es Extrempunkte $\bar{x}$ und $\bar{y}$, $\bar{x}, \bar{y} \in S$ gibt, so dass $f(\bar{x}) = \max_{x \in S} f(x)$ und $f(\bar{y}) = \min_{x \in S} f(x)$. $\blacksquare$

Bemerkung

Wie man durch Gegenbeispiele zeigen kann, gilt nicht, dass jeder Extrempunkt auf ein Maximum bzw. Minimum abgebildet wird. Genauso wenig gilt, dass jeder Punkt der auf ein Maximum bzw. Minimum abgebildet wird, ein Extrempunkt ist.

8. Definition

1. Sei $C \subset E^n$ konvex und habe mindestens zwei Punkte. C heißt **konvexer Kegel mit Spitze** x_0, wenn für jedes $\lambda \geq 0$ und für jedes $x \in C$ gilt: $(1 - \lambda) \cdot x_0 + \lambda x \in C$.

2. Ein konvexer Kegel der eine echte Teilmenge einer Geraden ist heißt **Strahl** oder **Halbgerade**.

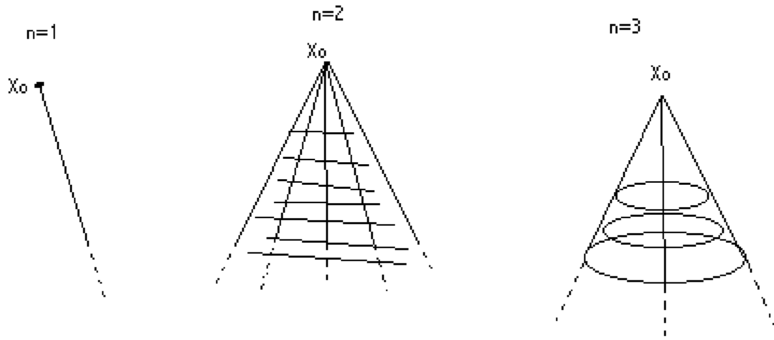

Abbildung 5: Beispiele von konvexen Kegeln

9. Satz

Sei C ein abgeschlossener konvexer Kegel mit Spitze x_0, der eine echte Teilmenge des E^n ist. Es gilt:

1. C besitzt mindestens eine Stützhyperebene.
2. Jede Stützebene von C enthält die Spitze x_0.

Beweise

1. Indirekt: Nach Definition gilt: $(1-\lambda) \cdot x_0 + \lambda x = x_0 - \lambda x_0 + \lambda x$
   $= x_0 + \lambda \cdot (x - x_0) \in C, \ \lambda \geq 0.$
   Annahme: x_0 ist kein Randpunkt des Kegels. Dann ist x_0 innerer Punkt, dass heißt $\exists \varepsilon > 0$ so dass $\{y \in E^n \mid ||x_0 - y|| \leq \varepsilon\} \subset C$. Sei $x \in E^n$. Sei $\lambda > 0$ so gewählt, dass $||\lambda \cdot (x - x_0)|| < \varepsilon$. Dann gilt $[x_0 + \lambda \cdot (x - x_0)] \in C$ da $||x_0 - [x_0 + \lambda \cdot (x - x_0)]\,|| = || - \lambda \cdot (x - x_0)|| < \varepsilon$. Nach Definition des konvexen Kegels gilt dann aber auch
   $x_0 + \frac{1}{\lambda} \cdot ([x_0 + \lambda \cdot (x - x_0)] - x_0) \in C.$
   Da $x_0 + \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\left[\underline{x_0} + \lambda \cdot (x - x_0)\right] \underline{-x_0}\right) = x_0 + \frac{1}{\underline{\lambda}} \cdot (\underline{\lambda} \cdot (x - x_0))$
   $= \underline{x_0} + (x \underline{- x_0}) = x$ folgt $x \in C$ für jedes $x \in E^n$. $\lightning$(zu konvexer Kegel ist echte Teilmenge des E^n).
   $\Rightarrow$ x_0 ist Randpunkt von C. Nach Satz 2 (ist $S \subset E^n$ abgeschlossen und konvex und x ein Randpunkt von S so gibt es mindestens eine Stützhyperebene die S in x stützt) existiert also mindestens eine Hyperebene, die C im Punkt x_0 stützt. Folglich besitzt der konvexe Kegel C mindestens eine Stützhyperebene. $\square$

2. Sei $x \in C$ Randpunkt des abgeschlossenen konvexen Kegels und $H = [f, \alpha]$ die zugehörige Stützebene. Dann gilt $x \in C \cap H$, $f(x) = \alpha$ und $f(y) \leq \alpha$ für alle $y \in C$. Sei x_0 die Spitze des Kegels. Zu zeigen ist, dass $f(x_0) = \alpha$.
   Indirekt: *Annahme:* $f(x_0) < \alpha$.
   Nach Definition des konvexen Kegels gilt $x_0 + \lambda \cdot (x - x_0) \in C$ für alle $\lambda \geq 0$. Betrachte $f(x_0 + \lambda \cdot (x - x_0)) \overset{linear}{=} f(x_0) + \lambda f(x) - \lambda f(x_0)$ $= (1 - \lambda) \cdot f(x_0) + \lambda f(x) = (\lambda - 1) \cdot (-f(x_0)) + \lambda\alpha$.
   Für $\lambda > 1$ folgt dann, da nach unserer Annahme $-f(x_0) > -\alpha$ und $(\lambda - 1) > 0$, dass $f(x_0 + \lambda \cdot (x - x_0)) = (\lambda - 1) \cdot (-f(x_0)) + \lambda\alpha$ $> (\lambda - 1) \cdot (-\alpha) + \lambda\alpha = -\lambda\alpha + \alpha + \lambda\alpha = \alpha$. $\quad ↯\ (zu f(y) \leq \alpha$ für alle $y \in C)$
   $\Rightarrow$ Die Annahme war falsch, es muss gelten $f(x_0) = \alpha$. Dies bedeutet aber, dass die Spitze x_0 in der Hyperebene enthalten ist. Da der Randpunkt und die zugehörige Stützhyperebene beliebig gewählt waren, folgt, dass jede Stützebene die Spitze x_0 enthält. ■

10. Satz

Sei C ein konvexer Kegel mit Spitze x_0. Es gilt:
Die abgeschlossene Hülle von C ist ein konvexer Kegel mit Spitze x_0.

Beweis

Sei $\bar{C}$ die abgeschlossene Hülle von C. Sei $x \in \bar{C},\ \lambda \geq 0$. Zu zeigen ist, dass $x_0 + \lambda \cdot (x - x_0) \in \bar{C}$, da es sich dann nach Definition um einen konvexen Kegel mit Spitze x_0 handelt. Definiere $F : E^n \to E^n$ mit $F(u) = x_0 + \lambda \cdot (u - x_0)$. Offensichtlich ist F stetig. Sei $x_\nu \in C$ mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} x_\nu = x$. Dann
$F(x_\nu) = x_0 + \lambda \cdot (x_\nu - x_0) \in C$ da C konvexer Kegel. Außerdem gilt
$F(x) = F(\lim\limits_{\nu \to \infty} x_\nu) \overset{stetig}{=} \lim\limits_{\nu \to \infty} F(x_\nu) \in \bar{C}$
$\Rightarrow F(x) = x_0 + \lambda \cdot (x - x_0) \in \bar{C}$ ■

11. Satz

Sei $C_\alpha,\ \alpha \in \zeta$ eine Familie von konvexen Kegeln, wobei jeder Kegel die Spitze x_0 besitzt. Es gilt:
Enthält $C \equiv \bigcap\limits_{\alpha \in \zeta} C_\alpha$ mindestens zwei Punkte, so ist C ein konvexer Kegel mit Spitze x_0.

Beweis

Da C_α ein konvexer Kegel mit Spitze x_0 folgt $x_0 \in C_\alpha$ für alle $\alpha \in \zeta$. Dann gilt aber auch $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha \in \zeta} C_\alpha$, also $x_0 \in C$.

Seien nun $x_0, x_1 \in C$ mit $x_0 \neq x_1$. Dann gilt $x_1 \in \bigcap\limits_{\alpha \in \zeta} C_\alpha$, folglich $x_1 \in C_\alpha$ für alle $\alpha \in \zeta$. Da C_α konvexer Kegel mit Spitze x_0, gilt insbesondere $(x_0 + \lambda \cdot (x_1 - x_0)) \in C_\alpha$ für alle $\alpha \in \zeta,\ \lambda \geq 0$. Daraus folgt wiederum, dass $(x_0 + \lambda \cdot (x_1 - x_0)) \in \bigcap\limits_{\alpha \in \zeta} C_\alpha$ und nach Definition $(x_0 + \lambda \cdot (x_1 - x_0)) \in C,\ \lambda \geq 0$. Da der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Mengen wieder konvex ist, und $(x_0 + \lambda \cdot (x_1 - x_0)) \in C$, ist C ein konvexer Kegel mit Spitze x_0. (Analog falls zusätzlich $x_2, x_3, \ldots \in C$.) $\blacksquare$