PROSEMINAR KONVEXE MENGEN

Konvexe Mengen mit konstanter Breite

Christoph Buck
Vortrag vom 11.05.2005
ProseminarWS 2004/2005
bei Prof. Dr. E. Oeljeklaus
Universität Bremen

Dieser Vortrag im Rahmen des Proseminars über konvexe Mengen behandelt speziell konvexe Mengen mit konstanter Breite. Dieses Thema hat seinen Ursprung in der Ebene und bezieht sich hauptsächlich auf technische Probleme, weswegen sie hier auch nur in der euklidschen Ebene $\mathbb{E}^2$ behandelt wird.
In Abschnitt 1 wird der Begriff der Breite für beliebige konvexe Mengen erklärt. In Abschnitt 2 wird dieser Begriff auf Mengen mit konstanter Breite eingeschränkt und der Begriff des Reuleaux Polygons definiert. Abschnitt 3 erläutert das Extremalproblem für konvexe Mengen mit konstanter Breite und Abschnitt 4 zeigt zwei Beispiele für die technische Anwendung.

1

1.1. Definition

Sei $S \subset \mathbb{E}^2$ eine konvexe, kompakte Menge, $S \neq \emptyset$. Sei f eine Gerade im $\mathbb{E}^2$.
Die ***Breite*** in Richtung f ist der Abstand zwischen zwei parallelen Stützgeraden an S,die senkrecht zu f sind.(Abb. 1.1.)

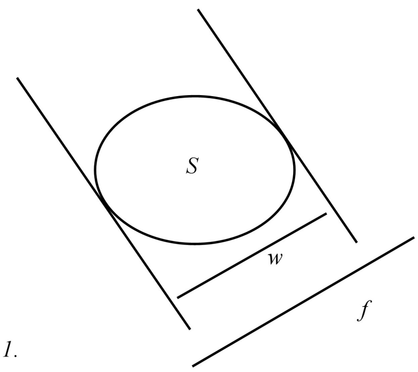

Abb. 1.1.

1.2. Definition

Sei $S \subset \mathbb{E}^2$ eine konvexe, beschränkte Menge, $S \neq \emptyset$.
Der ***Durchmesser*** d von S ist definiert als

$$d \equiv \sup_{\substack{x \in S \\ y \in S}} ||x - y||$$

Die Beziehung zwischen Breite und Durchmesser einer Menge wird in folgendem Satz festgehalten:

1.3. Satz

Sei $S \subset \mathbb{E}^2$ eine konvexe, kompakte Menge, $S \neq \emptyset$.
Der ***Durchmesser*** von S ist gleich der maximalen ***Breite*** von S.

Beweis:
Sei m die maximale Breite von S. Seien H_1 und H_2 parallele Stützgeraden mit Abstand m, die jeweils an den Punkten $x, y \in S$ anliegen.
Zu Zeigen: $m = ||x - y||$
1.Fall: Sei $\overline{xy}$ senkrecht zu H_1 und H_2.
Dann entspricht $\overline{xy}$ genau dem Abstand zwischen den Stützgeraden H_1 und H_2.
$\Rightarrow ||x - y|| = m$

2.Fall: Sei $\overline{xy}$ nicht senkrecht zu H_1 und H_2.
Dann gibt es zwei Stützgeraden H_3 und H_4, welche senkrecht zu $\overline{xy}$ sind.
Sei nun m' die Breite in Richtung $\overline{xy}$.
Da $\overline{xy}$ nicht senkrecht zu H_1 und H_2 ist, ist der Abstand zwischen H_3 und H_4 größer als der Abstand zwischen H_1 und H_2.(Abb. 1.2.)
$\Rightarrow m < ||x - y|| \leq m'$
Dies führt zu einem Widerspruch, da m als maximale Breite vorausgesetzt wurde.
$\Rightarrow ||x - y|| = m$
Wählen wir nun $p, q \in S$ beliebig und w als Breite in Richtung $\overline{pq}$, so folgt:
$||x - y|| = m \geq w \geq ||p - q||$,
so dass m der Durchmesser von S ist. $\square$

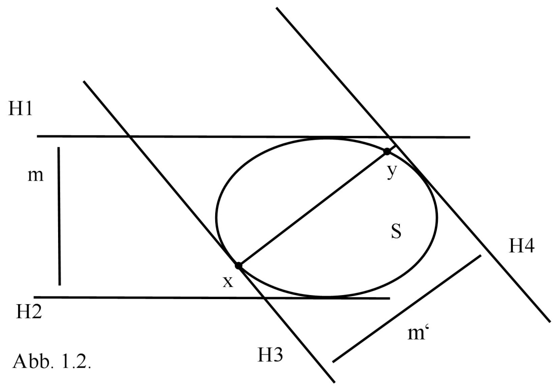

Abb. 1.2.

1.4. Korollar

Sei $S \subset \mathbb{E}^2$ eine konvexe, kompakte Menge, $S \neq \emptyset$.
Seien H_1 und H_2 parallele Stützgeraden an S in Richtung der maximalen Breite.
Wenn $x \in H_1 \cap S$ und f eine Gerade durch x ist, f senkrecht zu H_1, dann schneidet fH_2 in $y \in H_2 \cap S$ und $\overline{xy}$ ist senkrecht zu H_1 und H_2.

Beweis:
Seien H_3 und H_4 parallele Stützgeraden an S mit Abstand der maximalen Breite von S, so dass H_3 senkrecht zu H_1 und H_2 ist.
H_2 ist zu H_1 parallele Stüzgerade an S, also gibt es ein $y \in H_2 \cap S$, so dass $\overline{xy}$ Breite in Richtung H_3 ist.
Da f senkrecht zu H_1 ist, und somit parallel zu H_3, folgt, dass $\overline{xy}$ auf f liegt.
Also schneidet fH_2 in y und $\overline{xy}$ ist senkrecht zu H_1 und H_2. $\square$

2

Im Allgemeinen hat eine beliebige konvexe, kompakte Menge unterschiedliche Breiten in unterschiedliche Richtungen. Hat nun eine Menge in jede Richtung die gleiche Breite, so nennen wir dies eine Menge mit konstanter Breite.

Die einfachste Darstellung einer solchen Menge ist der Kreis. Aber es ist auch möglich nichtkreisförmige konvexe Mengen mit konstanter Breite zu konstruieren. Das einfachste Beispiel für eine nichtkreisfömige Menge mit konstanter Breite ist das Reuleaux - Dreieck, das nach dem deutschen Mathematiker und Ingenieur F. Reuleaux (1829-1905) benannt ist.

Das Reuleaux - Dreieck wird folgendermaßen konstruiert: Sei $\triangle\ ABC$ ein gleichseitiges Dreieck, mit Seitenlänge w. Man ziehe nun um jeden Eckpunkt einen $\frac{1}{6}$ Kreis mit Radius w zwischen den jeweils anderen Eckpunkten. Nun hat jede Stützgerade an einem beliebigen Eckpunkt von S eine parallele gegenüberliegende Stützgerade an S, als Tangente am $\frac{1}{6}$ Kreis, im Abstand w, der nach Konstruktion den Radius w hat. Also ist der Abstand aller Paare von parallelen Stützgeraden an R in jede Richtung gleich w.(Abb.2.1.)

Analog dazu lassen sich andere Mengen mit konstanter Breite aus gleichmäßigen, n-eckigen Polygonen, für ungerades n konstruieren. Zum Beispiel aus 5- oder 7- Ecken. Diese Mengen heißen Reuleaux - Polygone.(Abb. 2.2.) Hier hat ebenfalls jede Stützgerade an einem beiliebigen Eckpunkt der Menge eine parallele gegenüberliegende Tangente an dem jeweiligen Teilkreis, so dass der Abstand ebenfalls in alle Richtungen gleich w ist.

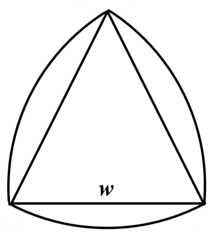

Abb. 2.1.

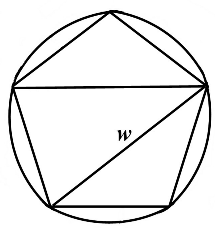

Abb. 2.2.

So erhalten wir folgende Definition eines Eckpunktes:

2.1. Definition

Sei $S \subset \mathbb{E}^2$ eine konvexe kompakte Menge, $S \neq \emptyset$.
Ein Punkt x aus dem Rand von S heißt ***Eckpunkt*** von S, wenn es mehr als eine Stützgerade von S an x gibt.

Reuleaux - Polygone haben, im Gegensatz zu anderen nichtkreisförmigen Mengen mit konstanter Breite, Eckpunkte.

Eine Möglichkeit eine nichtkreisförmige Menge mit konstanter Breite ohne Eckpunkte ist folgende:

Man konstruiert ein gleichseitiges Dreieck $\triangle\, ABC$ mit Seitenlänge w und verlängert diese von jedem Eckpunkt aus um die Strecke h. Dann ziehe man um jeden Eckpunkt ABC einen Teilkreis mit Radius $w + h$ und einen Teilkreis mit Radius h, zwischen den entsprechend neuen Eckpunkten. Diese Menge hat die konstante Breite $w + 2h$.

Der folgende Satz liefert nun eine Charaktisierung von konvexen, kompakten Mengen mit konstanter Breite.

2.2 Satz

Sei $S \subset \mathbb{E}^2$ eine konvexe, kompakte Menge, $S \neq \emptyset$.
S hat konstante Breite $\Leftrightarrow$
Für alle $x \notin S$ gilt: Der Durchmesser von $S \cup x$ ist größer als der Durchmesser von S .

Beweis:
„$\Rightarrow$ “
Sei w die konstante Breite von S, und sei $x \notin S$.
Sei $y \in S$, so dass y den kleinsten Abstand zu x hat. Sei H eine Gerade durch y, die senkrecht zu $\overline{xy}$ ist.
Dann ist H Stützgerade an S in Richtung der maximalen Breite und, da S in alle Richtungen maximale Breite hat, folgt nach Korollar 1.4., dass es einen Punkt z gibt, so dass H senkrecht zu $\overline{xy}$ ist und $y \in relint\overline{xz}$.
Also ist $||y - z|| = w$ Breite von S.
$\Rightarrow ||x - z|| = ||x - y|| + ||y - z|| > w$ ist Durchmesser von $S \cup x$. $\square$
(Abb. 2.3.)
„$\Leftarrow$“
Beweis indirekt:
Für alle $x \notin S$ gilt: Der Durchmesser von $x \cup x$ ist größer als der Durchmesser von S.
Annahme: S hat nicht kontante Breite.
Sei $w = ||y - z||$ maximale Breite von S.
Seien $p, q \in S$, so dass$||p - q|| < w$ Breite in beliebiger anderer Richtung.
Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $x \notin S$, so dass $||q - x|| \leq \varepsilon$.
$\Rightarrow ||p - x|| = ||p - q|| + ||q - x|| < w$
Dies führt zum Widerspruch, da x den Durchmesser von S vergößert.
$\Rightarrow S$ hat konstante Breite. $\square$
(Abb.2.4.)

Es ergibt sich die Charakterisierung, dass eine Menge genau dann konstante Breite hat, wenn sie in dem Sinne vollständig ist, dass kein Punkt hinzugefügt werden kann, ohne dass sich der Durchmesser vergrößert.

2.3. Definition

Sei $S \subset \mathbb{E}^2$ eine konvexe, kompakte Menge mit konstanter Breite w, $S \neq \emptyset$.
Ein Kreis $O \subset S$ mit größtmöglichem Durchmesser $m \leq w$ heißt ***Inkreis***.
Ein Kreis $O', S \subset O'$ mit kleinstmöglichem Durchmesser $n \geq w$ heißt ***Umkreis***.

Eine konvexe Menge kann im Allgemeinen mehrere Inkreise haben. Zum Beispiel hat ein Rechteck je nach Verhältnis von Länge und Breite im Unterschied zum Quadrat mehrere Inkreise.(Abb.2.5.)

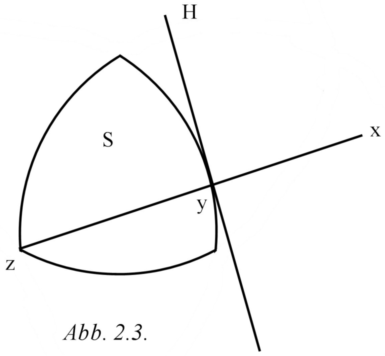

Abb. 2.3.

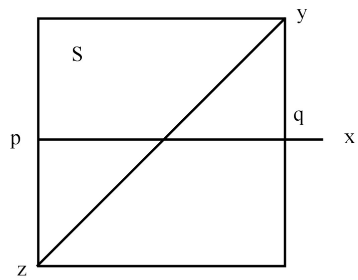

Abb. 2.4.

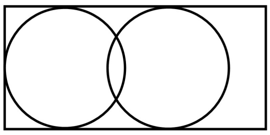

Abb. 2.5.

Für alle konvexen Mengen jedoch gilt:

2.4. Satz

Sei $S \subset \mathbb{E}^2$ eine konvexe, kompakte Menge, $S \neq \emptyset$.
Der Umkreis von S ist eindeutig.

Beweis:
Sei w die maximale Breite von S. Sei O ein Kreis mit kleinstmöglichem Durchmesser m, $S \subset O$.
Sei o.B.d.A. $m = w$.(Abb.2.6.)
Wir schließen aus, dass es einen Umkreis mit größerem oder kleinerem Durchmesser als m gibt. Dies widerspräche der Definition des Umkreises, da m bereits passend gewählt ist.

Annahme: Es gibt noch einen weiteren Umkreis K mit Durchmesser $n = m$, K nicht konzentrisch zu O.
Sei o Mittelpunkt von O und sei k Mittelpunkt von K. Sei $\overline{xy}$ maximale Breite von S und sei $\overline{pq}$ Durchmesser von K.

1. Fall: Sei k auf $\overline{xy}$ um ein $\delta > 0$ verschoben, so dass O und K nicht konzentrisch sind. $\Rightarrow p \in relint\overline{xy}$ oder $q \in relint\overline{xy}$, da $||x - y|| = w = ||p - q||$.
$\Rightarrow S \not\subset K$.
2.Fall: Sei k um ein $\delta > 0$ verschoben, so dass $k \notin relint\overline{xy}$.
Sei $\overline{pq}$ der Durchmesser von O. Dann ist $\overline{pq}$ parallel zu $\overline{xy}$ liegt aber nicht genau auf $\overline{xy}$.

$\Rightarrow x \notin K$ oder $y \notin K$.
$\Rightarrow S \not\subset K$
$\Rightarrow K$ ist kein Umkreis.
$\Rightarrow O$ ist eindeutiger Umkreis.

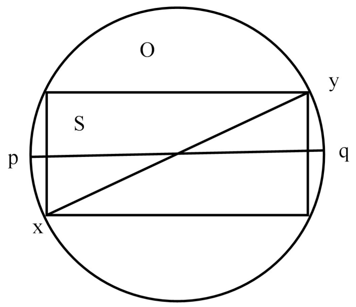

Abb. 2.6.

Für konvexe Mengen mit konstanter Breite sind sowohl der Inkreis als auch der Umkreis eindeutig. Hierbei entspricht der Durchmesser des Umkreises nicht der maximalen Breite und der Durchmesser des Inkreises nicht der minimalen Breite.(Abb.2.7.)

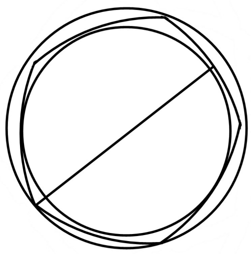

Abb. 2.7.

Unter der Annahme, dass beide Kreise existieren gilt außerdem:

2.5. Satz

Der Inkreis und der Umkreis einer konvexen und kompakten Menge mit konstanter Breite sind konzentrisch und die Summe der Radien ist gleich der konstanten Breite.

Beweis:
Sei $S \subset \mathbb{E}^2$ eine konvexe, kompakte Menge mit konstanter Breite w, $S \neq \emptyset$. Sei I ein Kreis mit Radius r und sei U ein Kreis mit Radius $w - r$.

Wir setzen voraus, dass $I \subset S$.
Zu zeigen: $S \subset U$.
Sei x aus dem Rand von U. Sei m' Stützgerade von U an x. Sei y aus dem Rand von I und m eine Stützgerade von I an y, m parallel zu m' mit Abstand w. Seien nun l und l' parallele Stützgeraden an S, so dass l parallel zu m ist.(Abb.2.8.)
$\Rightarrow$ Die Distanz zwischen l und l' ist gleich der Distanz zwischen m und m'.
$\Rightarrow y \in intS$ und m liegt zwischen l und l' und m' liegt nicht zwischen l und l'.
$\Rightarrow x \notin intS$
Da sowohl die Kreise U und I, als auch S konstante Breite haben, folgt für alle Randpunkte von U, dass sie nicht innerhalb von S liegen.
$\Rightarrow S \subset U$

Wählen wir nun R als Radius von U und $w - R$ as Radius von I, so lässt sich, unter der Vorraussetzung, dass $S \subset U$, durch die gleiche Konstruktion zeigen, dass $I \subset S$.

Sei nun U der Umkreis von S und I der Inkreis von S. Sei R der Radius von U und r der Radius von I.
Zu zeigen:$R = w - r$.
Der Radius von U kann weder kleiner noch größer $w - r$ sein. Wäre er größer, gäbe es einen weiteren Umkreis und da der Kreis mit Radius $w - r$ bereits S enthällt, wäre dies ein Widerspruch zu Eindeutigkeit des Umkreises. Wäre der Radius von U kleiner als $w - r$, so hätte der Kreis I, der mit Radius $w - R$ in S liegt, einen Radius der größer ist als r.
Also gilt: $R = w - r, R + r = w$.

Seien nun U und I nicht konzentrisch, dann gibt es einen Kreis O mit Radius R, der konzentrisch zu I ist und S enthält.
Dies ist aber ein Widerspruch zur Eindeutigkeit des Umkreises.$\square$

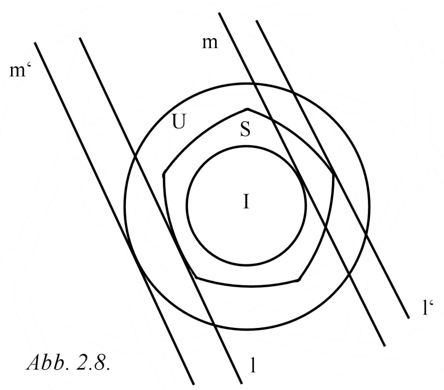

Abb. 2.8.

3

Die letzten zwei Sätze erklären den Umfang und die Fläche von konvexen kompakten Mengen mit konstanter Breite.

3.1. Definition

Sei $S \subset \mathbb{E}^2$ eine konvexe, kompakte Menge mit konstanter Breite w, $S \neq \emptyset$.
Der ***Umfang*** von S ist die Länge des Randes und gleich des Supremums des Umfangs aller innenliegenden Polygone.

3.2. Definition

Sei $S \subset \mathbb{E}^2$ eine konvexe, kompakte Menge mit konstanter Breite w, $S \neq \emptyset$.
Die ***Fläche*** von S ist gleich des Supremums der Fläche aller innenliegenden Polygone.

3.3. Satz von Barbier

Sei $S \subset \mathbb{E}^2$ eine konvexe, kompakte Menge mit konstanter Breite w, $S \neq \emptyset$.
Der ***Umfang***von S ist πw.

Hilfssatz:

Sei $\diamondsuit abcd$ ein Rhombus und seien $\overline{mn}$ und $\overline{pq}$ zwei parallele Strecken, die senkrecht zur Diagonale $\overline{bd}$ sind und deren Abstand w ist.(Abb.3.1.)
Das Sechseck $amncpq$ hat unabhängig von der Position von $\overline{mn}$ und $\overline{pq}$ immer den gleichen Umfang.

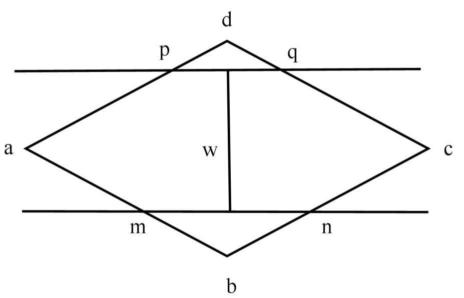

Abb. 3.1.

Sei e die Seitenlänge des Rhombus und seien die Strecken folgendermaßen definiert:

$$x = \overline{dp} = \overline{dq}, y = \overline{mb} = \overline{nb}, f = \overline{mn}, g = \overline{pq}$$

Der Umfang U des Sechsecks ist $U = 4e - 2x - 2y + f + g$
Zu zeigen: $U \equiv c$
Sei o.B.d.A. $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$. Nach Kosinussatz gilt:

$$f^2 = 2y^2 - 2y^2\cos(\alpha)$$
$$g^2 = 2x^2 - 2x^2\cos(\alpha)$$
$$\Leftrightarrow f = \sqrt{2y^2 - 2y^2\cos(\alpha)} = y\sqrt{2 - 2\cos(\alpha)}$$
$$g = \sqrt{2x^2 - 2x^2\cos(\alpha)} = x\sqrt{2 - 2\cos(\alpha)}$$
$$\Rightarrow U = 4e - 2x - 2y + x\sqrt{2 - 2\cos(\alpha)} + y2 - 2\cos(\alpha)$$

Sei z der Abstand zwischen d und $\overline{pq}$

$$\begin{aligned}
z^2 &= x^2 - (\frac{g}{2})^2 \\
\Leftrightarrow z &= \sqrt{x^2 - x^2 + x^2\cos(\alpha)} = x\sqrt{\cos(\alpha)} \\
y^2 &= (\frac{f}{2})^2 + (d-w-z)^2 \\
\Leftrightarrow y^2 &= (y^2 - y^2\cos(\alpha) + (d-w-x\sqrt{\cos(\alpha)})^2 \\
\Leftrightarrow y^2\cos(\alpha) &= (d-w-x\sqrt{\cos(\alpha)})^2 \Leftrightarrow y = \frac{(d-w)}{\sqrt{\cos(\alpha)}} - x \\
\Rightarrow U = 4e - 2x - 2\frac{(d-w)}{\sqrt{\cos(\alpha)}} &+ 2x + x\sqrt{2-2\cos(\alpha)} + \frac{(d-w)}{\sqrt{\cos(\alpha)}}\sqrt{2-2\cos(\alpha)} - x\sqrt{2-2\cos(\alpha)} \\
\Rightarrow U &= 4e - 2\frac{(d-w)}{\sqrt{\cos(\alpha)}} + \frac{(d-w)}{\sqrt{\cos(\alpha)}}\sqrt{2-2\cos(\alpha)} \\
&\Rightarrow U \equiv c \, \square
\end{aligned}$$

Beweis:
Sei O ein Kreis mit Durchmesser w.
Behauptung: 2 gleichwinklige Polygone mit 2^n Seiten umschreiben jeweils S und O und haben denselben Umfang.
Beweis durch Induktion über $n > 1$.
Induktionsanfang: Sei $n = 2$.
Dann gibt es zwei Quadrate mit gleichem Umfang, die jeweils S und O umschließen.
Die Quadrate sind insbesondere kongruent.
Induktionsvoraussetzung:
Die Behauptung gilt für ein $n \in \mathbb{N}$, beide Polygone sind insbesondere kongruent.
Induktionsschluss:
Seien S und O jeweils von zwei kongruenten Polygonen mit 2^n Seiten und gleichem Umfang umschlossen.

Seien $\overline{be}$ und $\overline{bf}$ zwei aneinanderliegende Seiten und $\overline{dg}$ und $\overline{dh}$ die gegenüberliegenden Seiten des Polygons, das S umschließt, so dass b und d gegenüberliegende Punkte sind.
Die Verlängerungen jeder Seite von b bzw. d ausgehend schneiden sich in den Punkten a bzw. c, so dass $\diamondsuit abcd$ ein Rhombus ist. Analog errichtet man um O ein Rhombus $\diamondsuit a'b'c'd'$ aus dem kongruenten Polygon, das O umschließt.
Seien nun $\overline{mn}$ und $\overline{pq}$ parallele Stützgeraden an S mit Abstand w und $\overline{m'n'}$ und $\overline{p'q'}$ parallele Stützgeraden an O mit Abstand w.(Abb. siehe R.Lay 1982, Figure 11.7., Seite 82)
Dann folgt nach dem *Hilfssatz*, dass die Hexagone $\diamondsuit amncpq$ und $\diamondsuit a'm'n'c'p'q'$ den gleichen Umfang haben. Beide Hexagone sind jedoch nicht kongruent zueinander. Kürzt man nun wieder die Strecken $\overline{am}$, $\overline{aq}$ und $\overline{nc}$, $\overline{pc}$, bzw. $\overline{a'm'}$, $\overline{a'q'}$ und $\overline{n'c'}$, $\overline{p'c'}$, so erhällt man zwei gleicheckige Polygone mit $2^n + 1$ Seiten und gleichem Umfang, die jeweils S und O umschließen. Führt man diese Konstruktion um jeden Eckpunkt der gleichwinkligen Polygone mit 2^n Seiten durch, so erhält man zwei gleichwinklige Polygone mit 2^{n+1} Seiten, die jeweils O und S umschließen und den gleichen Umfang

haben. $\Rightarrow$ Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
Zwei gleicheckige Polygone mit 2^n Seiten umschließen jeweils S und O und haben den gleichen Umfang.

Für $n \to \infty$ folgt, dass der Kreis O und die Menge S den gleichen Umfang haben. $\square$

3.4. Satz

Sei O ein Kreis mit Durchmesser w und sei R_3 ein Reuleaux Dreieck mit Durchmesser w.
Von allen Mengen mit konstanter Breite hat der das Reuleaux Dreieck den kleinsten Flächeninhalt.

Voraussetzung:
Sei F_n der Flächeninhalt eines beliebigen Reuleaux - Polygons mit $n = 3, 5, 7, ...$
Dann gilt: $F_3 \leq F_n$.
Beweis nach W. Blaschke.*(siehe Quellen)

Beweis:
Sei K eine beliebige Menge mit konstanter Breite w und sei K_ε die parallele Menge zu K, so dass der Abstand von K und K_ε gleich ε ist und $K \subset K_\varepsilon$.
Dann ist K_ε konvex und hat konstante Breite $w + 2\varepsilon$.

Zu zeigen:
Es gibt ein beliebiges Reuleaux Polygon R_n^ε mit Durchmesser $w+\varepsilon$, das zwischen K und K_ε liegt, so dass $K \subset R_n^\varepsilon \subset K_\varepsilon$.
Konstruktion:
Sei p_1 aus dem Rand von K_ε. Man ziehe einen Kreisbogen B_1 mit Radius $w + \varepsilon$, zwischen den Punkten p_0 und p_2 aus dem Rand von K_ε.
Sei nun p_2 Mittelpunkt für einen weiteren Kreisbogen B_2 mit Radius $w+\varepsilon$ zwischen den Punkten p_1 und p_3, ebenfalls aus dem Rand von K_ε.
Man führt diese Konstruktion mit dem Kreisbogen B_3 zwischen den Punkten p_2, p_4 mit p_3 als Mittelpunkt fort und erhält eine Reihe von Punkten $p_5, p_6, p_7, ...$, die keinen Häufungspunkt haben, da die Entfernung der Endpunkte der Kreisbögen sich für jeden neuen Mitelpunkt auf K_ε ändert, so dass die Entfernung zweier benachbarter Punkte immer $\geq \delta > 0$ bleibt.
Also gibt es einen Punkt p_{2n+1}, so dass der Bogen B_2n den Bogen B_1 in p^*_{2n+1} schneidet.
Dann definieren wir den Bogen zwischen p^*_{2n+1} und p_2 als B_1^*, den Bogen zwischen p_{2n-1} und p^*_{2n+1} als B^*_{2n} und den Bogen um p^*_{2n+1} als Mittelpunkt zwsichen p_{2m} und p_1 als B^*_{2n+1}.
So schließen sich die konstruierten Kreisbögen $B_1^*, B_2, ..., B_{2n-1}, B^*_{2n}, B^*_{2n+1}$ zu einem Reuleaux Polygon zusammen, das in dem Streifen zwischen K und K_ε liegt und die Breite $w + \varepsilon$ hat.(Abb. siehe W.Blaschke 1915, Fig. 7, Seite 80)
Die Eckpunkte von R_n^ε liegen bis auf p^*_{2m+1} auf dem Rand von K_ε und die Seiten von R_n^ε berühren mit Ausnahme von B^*_{2m+1} die Menge K von außen.
Der Flächeninhalt F_n^ε von R_n^ε liegt nun zwischen den Flächeninhalten der parallelen Mengen. Sei F^ε der Fächeninhalt von K_ε, dann folgt, dass $F^\varepsilon \geq F_n^\varepsilon$. Sei nun F_3^ε der Flächeninhalt des Reuleaux Dreiecks mit der Breite $w + \varepsilon$.

Für Reuleaux - Polygone gilt: $F_3 \leq F_n, n = 3, 5, 7, ...$.
Dann folgt für $\varepsilon \rightarrow\ 0 : F_3 \leq F_n \leq F.\square$

3.5. Satz

Von allen Mengen mit konstanter Breite hat der Kreis die größte Fläche.

Beweis:
Isoperimetrischer Satz nach J. Steiner.*
(siehe auch Vortrag über das isoperimetrische Problem von B. Walker)

4

4.1. Anwendung:

Es ist möglich mittels eines Bohrers in der Form eines Reuleaux Dreiecks ein quadratisches Loch zu bohren.

Ein Reuleaux Dreieck lässt sich innerhalb eines Quadrates mit einer Seitenlänge gleich der konstanten Breite des Reuleaux Dreiecks so drehen, dass alle Seiten des Quadrats bis auf die Eckpunkte von innen berührt werden.
Der Mittelpunkt des Reuleaux Dreiecks rotiert dabei auf einem nahezu Kreisförmigen Pfad, der aus genau 4 elliptischen Bögen besteht. Mit den Ränder des Dreiecks als Schneiden lässt sich so ein nahezu quadratisches Loch bohren.(Abb.4.1.)

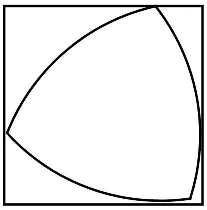

Abb. 4.1.

4.2. Anwendung:

Um einen Film zu projezieren muss der Film eine kurze schnelle Bewegung, mit geschlossenem Verschluss, und danach eine Pause, mit geöffnetem Verschluss machen. Dieser Mechanismus basiert ebenfalls auf dem Reuleaux Dreieck.

Sei P eine rechteckige Platte, welche sich nur horizontal, aber nicht vertikal bewegen lässt und die innen mit Breite w ausgeschnitten ist.
Nun lässt sich in das innere Rechteck ein Reuleaux Dreieck mit Breite w legen.
Dieses Dreieck rotiert nun dauerhaft um einen Eckpunkt x, wodurch die Platte P mit Unterbrechung nach rechts und nach links bewegt wird.
Rotiert das Dreieck um 120°, so bewegt sich die Platte um die Distanz w nach rechts und bleibt während der nächsten Rotation um 60° stehen. Dann bewegt sich die Platte während der nächsten Rotation um 120° wieder um die Distanz w nach links zur Ausgangsposition und bleibt bei der letzten Rotation um 60° wieder stehen.
Somit wird durch die kontinuierliche Rotation des Dreiecks eine unterbrochene lineare Bewegung der Platte P erzeugt.(Abb. siehe R.Lay 1982, Figure 11.9, Seite 83)

Quellen:

Stephen R. Lay, Convex Sets and Their Applications. Wiley&Sons, New York 1982, S. 76 - 83.

*W. Blaschke, J. Steiner, Mathematische Annalen. Bd. 76, 1915, S. 504 - 513.

http://www.wundersamessammelsurium.de/Mathematisches/Reuleaux/ , abgerufen am 03.01.2005