

# KONVEXE POLYTOPE

Schriftliche Ausarbeitung  
zum Proseminar *Konvexe Mengen*  
bei Prof. Dr. Oeljeklaus

vorgelegt von Johannes Jaerisch  
an der Universität Bremen  
im WS 2004 / 2005

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit speziellen konvexen Mengen: den Polytopen. Nachdem einige nützliche Begriffe erklärt sind, stellt Theorem 5 fest, daß das Profil eines Polytops gleich der Menge seiner Eckpunkte ist. Theorem 11 und 12 erlauben schließlich die Charakterisierung des Polytops als beschränktes Polyeder.

Dabei orientiert sich die Arbeit an *Section 20* in [1]. Die in Klammern angegebene Numerierung verweist auf die entsprechenden Sätze in [1].

**Definition 1.** (2.24)  $P \subset \mathbb{R}^n$  heißt (**konvexes**) **Polytop**, falls  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^n$  existiert, so daß  $P = \text{conv}(S)$ .

**Definition 2.** (20.1) Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  konvex und abgeschlossen. Sei  $F \subset K$  und sei  $k \in \{0, 1, \dots, \dim(K) - 1\}$ .  $F$  heißt  **$k$ -Seite von  $K$** , falls  $\dim(F) = k$  und eine Stützhyperebene  $H$  an  $K$  existiert, so daß  $F = K \cap H$ .  $\emptyset$  und  $K$  heißen **uneigentliche Seiten von  $K$** , alle übrigen heißen **eigentliche Seiten von  $K$** . Jede  $\dim(K) - 1$  dimensionale Seite von  $K$  heißt **Facette**, jede 1-Seite von  $K$  **Kante** und jede 0-Seite **Ecke**.

Wir wissen bereits, daß jede kompakte konvexe Menge durch ihr Profil erzeugt wird (5.6). Im Folgenden werden wir sehen, daß das Profil eines Polytopes gleich der Menge der Ecken von  $P$  ist. Desweiteren ist diese Menge die im Sinne der folgenden Definition eindeutig bestimmte minimale Darstellung des Polytopes  $P$ .

**Definition 3.** (20.3) Die Menge  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ist eine **minimale Darstellung** des Polytopes  $P$ , wenn  $P = \text{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  und  $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : x_i \notin \text{conv}\bigcup_{j \neq i} \{x_j\}$ .

**Bemerkung 4.** Jedes Polytopes  $P = \text{conv}(S)$  mit  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  besitzt eine minimale Darstellung. Falls nämlich  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  nicht minimal, so existiert  $x_k \in S$  mit  $x_k \in \text{conv}\{x_i \in S \mid i \neq k\}$ . Es folgt  $P = \text{conv}\{x_i \in S \mid i \neq k\}$ . Auf diese Weise kann man stets eine echt kleinere Erzeugermenge des Polytopes finden, bis die Erzeugermenge minimal ist.

**Theorem 5.** (20.4) Sei  $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  eine minimale Darstellung des Polytopes  $P$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $x \in M$ .
- (ii)  $x$  ist Ecke von  $P$ .
- (iii)  $x$  ist Extrempunkt von  $P$ .

*Beweis.* i)  $\Rightarrow$  ii): Sei  $x \in M$ . Betrachte  $\text{conv}(M - \{x\})$ . Wegen  $M$  minimal und  $x \in M$  folgt  $x \notin \text{conv}\{M - \{x\}\} =: Q$ . Da  $\{x\}$  und  $Q$  kompakt und konvex, folgt mit (4.12) die Existenz einer Hyperebene  $H' = f^{-1}(a)$ , die  $\{x\}$  und  $Q$  streng trennt. O.B.d.A. sei  $f(Q) > a$  und  $f(x) < a$ . Dann ist

$$H := f^{-1}(f(x))$$

wegen

$$f(Q) > a > f(x) \quad (1)$$

eine Stützhyperebene an  $P$  im Punkt  $x$ .

Desweiteren gilt für  $y \in P$ ,  $y \neq x$

$$y = \lambda x + \sum_i \lambda_i x_i \quad \text{mit } 0 \leq \lambda < 1, \quad \lambda + \sum_i \lambda_i = 1, \quad x_i \in Q$$

$$\Rightarrow f(y) = \lambda f(x) + \sum_i \lambda_i f(x_i) \quad \text{mit } 0 \leq \lambda < 1, \quad \lambda + \sum_i \lambda_i = 1, \quad x_i \in Q$$

Wegen  $0 \leq \lambda < 1$  und  $\lambda + \sum_i \lambda_i = 1$  existiert  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  mit  $\lambda_i \neq 0$ .  
Es folgt mit (1)

$$f(y) > \lambda f(x) + \sum_i \lambda_i f(x) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x) = f(x)$$

Es gilt also  $P \cap H = \{x\}$ .  $x$  ist also Ecke von  $P$ .

ii)  $\Rightarrow$  iii): Im Folgenden genügt die Eigenschaft, daß  $P$  kompakt und konvex.  
Sei  $x$  eine Ecke von  $P$ .

Indirekt Beweis: Angenommen  $x$  ist kein Extrempunkt von  $P$ . Dann gilt:

$$\exists \text{ echte Strecke } \overline{yz} \subset P : \quad x \in \text{relint}(\overline{yz})$$

Da  $x$  Ecke von  $P$

$$\exists H \text{ Hyperebene} : \quad H \cap P = \{x\} \text{ und } P \subset H^+$$

Sei o.B.d.A.

$$H = f^{-1}(a) \quad \text{und } f(P) \geq a$$

Wegen  $\overline{yz} \not\subset H$  folgt

$$\exists \tilde{x} \in \overline{yz} \subset P : \quad f(\tilde{x}) > a$$

$$\Rightarrow f(\tilde{x} - x) > 0$$

Da  $x \in \text{relint}(\overline{yz})$  kann  $\lambda > 0$  so gewählt werden, daß  $x - \lambda(\tilde{x} - x) \in \overline{yz} \subset P$ .

$$\Rightarrow f(x - \lambda(\tilde{x} - x)) = f(x) - \lambda f(\tilde{x} - x) < f(x) = a.$$

Widerspruch zu  $f(P) \geq a$ !

iii)  $\Rightarrow$  i): Sei  $x$  ein Extrempunkt von  $P$  und  $M$  minimale Darstellung von  $P$ .  
Dann ist  $P - \{x\}$  konvex. Wäre  $x \notin M$ , folgte  $\text{conv}(M - \{x\}) \subset P - \{x\}$ .  $\square$

**Bemerkung 6.** Jedes Polytop  $P$  hat genau eine minimale Darstellung.

**Bemerkung 7.** Sei  $P = \text{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_{k+1}\}$  ein  $k$ -dimensionales Simplex (siehe Definition 2.24). Dann sind  $x_1, x_2, \dots, x_{k+1}$  die Ecken von  $P$ .

*Beweis.* Die Darstellung  $\{x_1, x_2, \dots, x_{k+1}\}$  von  $P$  ist minimal, da  $\dim(\text{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_r\}) := \dim(\text{aff}\{x_1, x_2, \dots, x_r\}) < r$ . Also gilt  $x_i \notin \text{conv}\bigcup_{j \neq i} \{x_j\}$ . Mit Theorem 5 folgt die Behauptung.  $\square$

**Theorem 8.** (20.5) Sei  $P \subset \mathbb{R}^n$  ein konvexes Polytop. Dann ist jede Seite von  $P$  selbst ein Polytop und es gibt nur endlich viele Seiten.

*Beweis.* Sei  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  die minimale Darstellung von  $P$  und sei  $F \subset P$  eine echte Seite von  $P$ . Sei  $H = f^{-1}(a)$  eine stützende Hyperebene von  $P$  mit  $H \cap P = F$ .

O.B.d.A. sei  $\{x_1, x_2, \dots, x_r\} \subset H$  und  $f(x_i) = a + \epsilon_i$  mit  $\epsilon_i > 0$  für  $x \in \{r+1, \dots, k\}$ . Da  $P \cap H \neq \emptyset$ , folgt  $r > 0$ .

Sei nun  $x \in P$ . D.h.

$$x = \sum_{i=0}^k \lambda_i x_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{i=0}^r \lambda_i a + \sum_{i=r+1}^r \lambda_i (a + \epsilon_i) = \sum_{i=0}^k \lambda_i a + \sum_{i=r+1}^r \epsilon_i = a + \sum_{i=r+1}^r \epsilon_i$$

Daraus folgt:

$$x \in H \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon_i = 0 \quad \forall i \in \{r+1, \dots, k\}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \text{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$$

Also gilt:

$$H \cap P = \text{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_r\} = F$$

D.h.  $F$  ist ein Polytop.

Wegen  $\#\varphi(\{x_1, x_2, \dots, x_k\}) = 2^k < \infty$  hat  $P$  nur endlich viele verschiedene Seiten.  $\square$

**Theorem 9.** (20.6) Sei  $(F_1, \dots, F_m)$  eine Familie von Seiten einer kompakten, konvexen Menge  $S \subset \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $F := \bigcap_{i=1}^m F_i$  eine Seite von  $S$ .

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $F \neq \emptyset$ , sei  $0 \in F$  und sei  $F_i$  echte Seite von  $S$  für alle  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Nach Voraussetzung existieren Stützhyperbenen  $H_i$  von  $S$  und entsprechende lineare Abbildungen  $f_i$ , so daß

$$H_i = f_i^{-1}(0), \quad F_i \subset H_i \quad \text{und o.B.d.A.} \quad f_i(S) \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$$

Definiere lineare Abbildung  $f$ :

$$f := \sum_{i=1}^m f_i$$

und betrachte

$$H := f^{-1}(0).$$

Wir zeigen, daß  $F = H \cap S$ .

Wegen  $f_i(S) \geq 0$  gelten folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} & x \in F \cap S \\ \Leftrightarrow & x \in \bigcap_{i=1}^m F_i \cap S \\ \Leftrightarrow & x \in \bigcap_{i=1}^m f_i^{-1}(0) \cap S \\ \Leftrightarrow & x \in f^{-1}(0) \cap S \\ \Leftrightarrow & x \in H \cap S \end{aligned}$$

Außerdem gilt  $0 \in H \cap S$  und  $f(S) \geq 0$ .  $H$  ist also stützende Hyperebene von  $S$  mit  $F = H \cap S$ . D.h.  $F$  ist Seite von  $H$ .  $\square$

Wir wissen bereits, daß jede abgeschlossene konvexe Menge der Durchschnitt abgeschlossener Halbräume ist (siehe Übung 4.2). Im Folgenden werden wir feststellen, daß jedes Polytop Durchschnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume ist. Polytope lassen sich sogar als genau die beschränkten Mengen beschreiben, die Durchschnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume sind.

**Definition 10.** (20.7) Eine **polyedrische** Menge ist Durchschnitt endlicher vieler abgeschlossener Halbräume.

**Theorem 11.** (20.8) Jedes Polytop  $P$  im  $\mathbb{R}^n$  ist eine beschränkte polyedrische Menge.

*Beweis.* Sei  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  die minimale Darstellung von  $P$ .

O.B.d.A. sei  $P$   $n$ -dimensional. Sonst existieren Halbräume  $H_i$  mit  $\bigcap_i H_i = \text{aff}(P)$ . Betrachte  $P$  in  $\mathbb{R}^k \sim \text{aff}(P)$ ,  $k < n$ .

Seien  $F_1, \dots, F_m$  die Facetten von  $P$ ,  $m > 0$ . Die Existenz von Facetten zeigen wir im Folgenden auch. Zu  $F_i$  sei  $H_i$  die entsprechende stützende Hyperebene von  $P$  und  $H_i^+$  der  $P$  enthaltende abgeschlossene Halbraum. Es gilt also:

$$F_i = H_i \cap P \quad \text{und} \quad P \subset H_i^+ \quad \text{für } i \in \{1, \dots, m\}$$

Wir zeigen, daß

$$P = \bigcap_{i=1}^m H_i^+.$$

Es gilt:

$$P \subset \bigcap_{i=1}^m H_i^+.$$

Die andere Inklusion  $\bigcap_{i=1}^m H_i^+ \subset P$  zeigen wir indirekt. Angenommen, es existierte  $x \in \bigcap_{i=1}^m H_i^+$  mit  $x \notin P$ .

Definiere:

$$D := \bigcup_{B \subset \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \text{ mit } \#B \leq n-1} \text{aff}(\{x\} \cup B)$$

Da  $\dim(\text{aff}(\{x\} \cup B)) \leq n-1$  und  $D$  endliche Vereinigung solcher höchstens  $n-1$ -dimensionalen affinen Unterräume ist, folgt  $\dim(D) < n = \dim(P)$ . Da außerdem  $D$  und  $P$  abgeschlossen sind, folgt

$$\text{int}(P) \not\subset D$$

Sei  $y \in \text{int}(P) - D$  und sei  $z \in \text{relint}(\overline{xy})$  mit  $z \in \text{bd}P$ . Da  $\overline{xy} \cap P$  kompakt, kann  $z$  als dasjenige Element aus  $\overline{xy} \cap P$  definiert werden, das von  $y$  maximalen Abstand hat.

Es genügt jetzt zu zeigen, daß  $z$  auf einer Facette von  $P$  liegt und damit  $z \in H_j$  für  $j \in \{1, \dots, k\}$  gilt. Dann folgt mit

$$z \in H_j \quad \text{und} \quad y \in \text{int}P \subset H_j^+$$

daß  $x \notin \bigcap_{i=1}^m H_i^+$ . Widerspruch zur Voraussetzung!

Es bleibt zu zeigen, daß  $z$  in einer  $n-1$ -dimensionalen Seite, einer Facette, von  $P$  enthalten ist. Wir verwenden hier die oben konstruierte Menge  $D$ . Beachte, daß dafür nur  $\dim(P) = n$  und die Existenz eines  $x \notin P$  vorausgesetzt werden muß. Mit Theorem 5.4 folgt, daß  $z$  als Randpunkt einer kompakten konvexen Menge  $P$  mit  $\text{int}(P) \neq \emptyset$  auf einer stützenden Hyperebene von  $P$  liegt.  $z$  liegt also auf einer  $k$ -Seite von  $P$ . Wir zeigen, daß  $k > n-2$ . Angenommen, es wäre  $k \leq n-2$ . Da jede  $k$ -Seite von  $P$  nach Theorem 5 ein von Elementen der minimalen Darstellung erzeugtes Polytop ist und da nach dem Theorem 2.23 (Caratheodory) jedes Element der Seite Konvexkombination von höchstens  $(n-2) + 1 = n-1$  Elementen der Erzeugermenge ist, folgte  $z \in \text{conv}B_0$  mit  $B_0 \subset \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  mit  $\#B \leq n-1$ . Also wäre  $z \in D$  und damit auch  $y \in D$ . Widerspruch! Also  $k = n-1$ .  $\square$

**Theorem 12.** (20.9) *Jede beschränkte polyedrische Menge  $P \subset \mathbb{R}^n$  ist ein Polytop.*

*Beweis.* Wir zeigen:  $P$  hat endliche viele Extrempunkte. Dann folgt wegen der Kompaktheit von  $P$  und Theorem 5.6, daß  $P = \text{conv}\{x \in P \mid x \text{ ist Extrempunkt von } P\}$ .

Vollständige Induktion über  $n$ :

*Induktionsanfang:* Sei  $P \subset \mathbb{R}^1$  eine beschränkte und polyedrische Menge. Dann ist  $P$  ein Punkt oder eine Linie und hat nur endliche viele Extrempunkte.

*Induktionsvoraussetzung:* Eine beschränkte polyedrische Menge  $P \subset \mathbb{R}^{n-1}$  hat endliche viele Extrempunkte.

*Induktionsschritt:* Sei  $P \subset \mathbb{R}^n$  eine beschränkte polyedrische Menge. Seien  $H_1, \dots, H_m$  die Hyperebenen, welche die Halbräume definieren, deren Durchschnitt  $P$  ist.

Sei  $x$  ein Extrempunkt von  $P$ . Dann ist  $x \in \text{bd}P$ . Da  $P$  von endlich vielen  $H_k$  begrenzt wird, folgt  $x \in H_i$  mit  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

$$\Rightarrow x \text{ ist Extrempunkt von } P \cap H_i$$

Da  $\dim(H_i) = n - 1$  folgt

$$P \cap H_i = P \cap H_i^+ \text{ ist polyhedrale Menge mit } \dim(P \cap H_i) \leq n - 1$$

Mit der Induktionsvoraussetzung folgt, daß  $P \cap H_i$  nur endliche viele Extrempunkte hat. Da es außerdem nur endliche viele Hyperebenen  $H_k$  gibt, auf denen Extrempunkte von  $P$  liegen können, folgt die Behauptung.  $\square$

**Theorem 13.** (20.10) Sei  $P \subset \mathbb{R}^n$  eine polyedrische Menge, die keine Geraden enthält. Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine lineare Abbildung, die auf  $P$  nach oben beschränkt ist. D.h.  $\sup_{x \in P} f(x) < \infty$ . Dann existiert ein Extrempunkt  $\bar{x} \in P$ , so daß  $f(\bar{x}) = \sup_{x \in P} f(x)$ .

*Beweis.* O.B.d.A. sei  $\dim(P) = n$ .

Vollständige Induktion über  $n$ :

*Induktionsanfang  $n = 1$ :* Gilt, da  $P$  keine Gerade ist.

*Induktionsvoraussetzung:* Gelte die Behauptung für  $P \subset \mathbb{R}^k$ ,  $k \leq n - 1$ ,  $n > 0$ .

*Induktionsschritt:* Da  $f$  linear ist, gilt:

$$a := \sup_{x \in P} f(x) = \sup_{x \in \text{bd}(P)} f(x)$$

Da  $P$  polyedrisch, folgt:

$$\text{bd}(P) = (P \cap H_1) \cup (P \cap H_2) \cup \dots \cup (P \cap H_m)$$

wobei  $H_1, \dots, H_n$  die  $P$  begrenzenden Hyperebenen. Also folgt:

$$a = \sup_{x \in P \cap H_i} f(x) \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\}$$

Da  $P \cap H_i$  polyedrisch ist und  $\dim(P \cap H_i) < n$  und außerdem keine Geraden enthält, folgt mit der Induktionsvoraussetzung, daß ein Extrempunkt  $\bar{x} \in P \cap H_i$  existiert, so daß  $a = f(\bar{x})$ . Da jeder Extrempunkt von  $P \cap H_i$  ein Extrempunkt von  $P$  ist, folgt die Behauptung.  $\square$

**Theorem 14.** (20.11) Seien  $S_2$  und  $S_1$  kompakte, konvexe Mengen mit  $S_2 \subset S_1$ . Dann gilt:  $F$  Seite von  $S_1 \Rightarrow F \cap S_2$  Seite von  $S_2$ .

*Beweis.* Falls  $F$  unechte Seite ist, so auch  $F \cap S_2$ .

Sei also  $F$  eine echte Seite von  $S_1$ .

Dann existiert eine stützende Hyperebene  $H$  von  $S_1$ , so daß  $F = H \cap S_1$ .

Dann ist  $H \cap S_2 = H \cap S_1 \cap S_2 = F \cap S_2$  Seite von  $S_2$ .  $\square$



# Bibliography

- [1] Steven R. Lay: Convex sets and their applications. New York u.a.  
: Wiley, 1982.