Proseminar: Konvexe Mengen

Universelle Überdeckungen
Das Isoperimetrische Problem

Björn Walker

18.01.2005, 25.01.2005

Inhaltsverzeichnis

1 Universelle Überdeckungen

1.1 Definition: *Überdecken*

Seien $S, T \subset \mathbb{R}^2$. S *überdeckt* T (auch: *deckt* T *ab*), wenn $T \subset S$.

1.2 Definition: *Universelle Überdeckung*

Eine kompakte Teilmenge K des $\mathbb{R}^2$ heißt *universelle Überdeckung im* $\mathbb{R}^2$, wenn jede Teilmenge S des $\mathbb{R}^2$ die einen Durchmesser 1 hat von einer zu K kongruenten Menge überdeckt werden kann.

1.3 Bemerkung:

Wenn wir im Folgenden eine Menge darauf untersuchen, ob sie ein universeller Überdecker ist, werden wir uns darauf beschränken, kompakt konvexe Mengen mit Durchmesser 1 zu überdecken. Dass dies zulässig ist, folgt aus den beiden nächsten Lemmata.

1.4 Lemma

Für $S \subset \mathbb{R}^2$, S kompakt und $diam(S) = 1$ gilt: $diam(S) = diam(conv(S))$

Beweis

Es gilt, dass $diam(conv(S)) \geq diam(S)$, da $S \subset conv(S)$. Zu zeigen ist also $diam(conv(S)) \leq diam(S)$. Seien $x, y \in conv(S)$. Nach Caratheodory existieren zu x und y je drei Punkte $x_i, y_i \in S$ und $\lambda_i, \mu_i \in [0,1]$, $i \leq 3$ und $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = \sum_{i=1}^{3} \mu_i = 1$ so dass gilt:

$$x = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i \qquad und \qquad y = \sum_{i=1}^{3} \mu_i y_i \qquad .$$

Man wähle nun $\eta_j \in [0,1]$, $j \leq k \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=1}^{k} \eta_j = 1$ so, dass es für jedes λ_i, μ_i eine Darstellung als Summe von η_j's gibt, also:

$$\lambda_i = \sum_{j=s_1}^{s_2} \eta_j \qquad und \qquad \mu_i = \sum_{j=r_1}^{r_2} \eta_j$$

Dabei sind $s_1, s_2, r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ und $s_2, r_2 \leq k$. Eine solche Darstellung gibt es immer, wie man sich leicht überlegt. Geometrisch wird dies durch folgende Abbildung verdeutlicht:

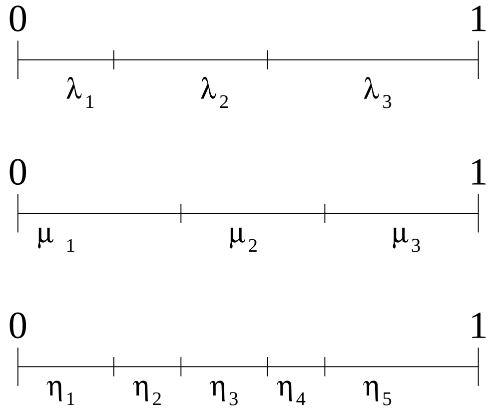

Abbildung 1

Seien nun $q, p \in S$ mit $\|q - p\| = 1$. Dann folgt:

$$\|x - y\| = \|\sum_{i=1}^{3} \lambda_i x_i - \mu_i y_i\| = \|\sum_{i=1}^{k} \eta_i x_{n_i} - \eta_i y_{n_i}\|$$

Für passende $x_{n_i}, y_{n_i} \in \{x_i, y_i \mid i \leq 3\}$. Weiter lässt sich abschätzen:

$$\|\sum_{i=1}^{k} \eta_i x_{n_i} - \eta_i y_{n_i}\| \leq \sum_{i=1}^{k} \eta_i \|x_{n_i} - y_{n_i}\| \leq \sum_{i=1}^{k} \eta_i \|(q-p)\| \leq \|q-p\| \sum_{i=1}^{k} \eta_i = \|q-p\| = 1$$

da q, p maximalen Abstand haben. Folglich $\|x-y\| = 1$, also $diam(conv(S)) = 1$.

$\square$

1.5 Lemma:

Für $S \subset \mathbb{R}^2$, S beschränkt und $diam(S) = 1$ gilt: $diam(S) = diam(\overline{S})$

Beweis:

Es gilt, dass $diam(\overline{S}) \geq diam(S)$, da $S \subset \overline{S}$. Annahme: $diam(\overline{S}) > diam(S)$. Dann gibt es $x, y \in \overline{S}$, so dass $\epsilon := \|x - y\| - 1 > 0$. Seien nun $x', y' \in S$, so dass $\|x' - x\| < \frac{\epsilon}{2}$ und $\|y' - y\| < \frac{\epsilon}{2}$. Folglich ist $\|x' - y'\| > 1$. Widerspruch, also $diam(S) = diam(\overline{S})$.

$\square$

1.6 Satz: *Kleinster u. Ü.: Das Quadrat*

Das kleinste Quadrat, welches ein universeller Überdecker im $\mathbb{R}^2$ ist, hat die Seitenlänge 1.

Beweis:

Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ mit dem Durchmesser 1 und sei K ein Quadrat mit Seitenlänge 1. Nach Satz 6.5 aus [1] reicht es zu zeigen, dass zu je drei Punkten $x_1, x_2, x_3 \in S$ eine Translation von K existiert, welche x_1, x_2, x_3 abdeckt. Da S den Durchmesser 1 hat, sind x_1, x_2, x_3 stets in einem Reuleaux Dreieck T mit konstanter Breite 1 enthalten. Dieses kann aber beliebig in einem umschriebenen Quadrat mit Seitenlänge 1 rotiert werden, da sich zu einer beliebig vorgegebenen Richtung je zwei parallele Hyperebenen (Geraden) konstruieren lassen, die T stützen, und somit den Abstand 1 haben. Somit existiert eine Verschiebung von K die das Dreieck T überdeckt, unabhängig von seiner Orientierung und deshalb auch x_1, x_2, x_3. Andererseits kann kein kleineres Quadrat ein universeller Überdecker sein, da es keinen Kreis mit Durchmesser 1 überdecken würde, welcher ja der Inkreis von K ist.

□

1.7 Satz: *Kleinster u. Ü.: Der Kreis*

Der kleinste Kreis der universell überdeckt im $\mathbb{R}^2$, hat den Radius $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Beweis:

Analog zur Argumentation im vorherigen Beweis, lässt sich mittels eines Reuleaux Dreiecks mit konstanter Breite 1 zeigen, dass ein das Dreieck umschließender Kreis jede Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ mit Durchmesser 1 überdeckt. Der kleinste Kreis, der dies tut, ist offensichtlich der Umkreis des Releaux Dreiecks, welcher gerade einen Radius von $\frac{1}{\sqrt{3}}$ hat.

□

1.8 Lemma:

Jede Menge $S \subset \mathbb{R}^2$ mit Durchmesser $w \in \mathbb{R}$ ist enthalten in einer Menge $S' \subset \mathbb{R}^2$ mit konstanter Breite w.

Beweis:

Der Beweis bleibt dem Leser als Übung überlassen.

□

1.9 Lemma:

Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ konvex, kompakt mit konstanter Breite $w \in \mathbb{R}$. Sei $l \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade. Dann gilt: Es existiert eine Raute R $\subset \mathbb{R}^2$ mit Eckpunkten $a, b, c, d \in \mathbb{R}^2$ mit:

- Die Seiten von R stützen S
- $S \subset \mathbb{R}^2$
- Der Winkel δ an d beträgt 120°
- $\overline{ac} \parallel l$

Beweis:

Seien S und l gegeben. Wir wählen Stützgeraden $g_{ad}, g_{bc} \subset \mathbb{R}^2$ von S mit $g_{ad} \neq g_{bc}$ und $g_{ad}, g_{bc} \angle l = 30°$. Wähle zwei weitere Stützgeraden von S, $g_{dc}, g_{ab} \subset \mathbb{R}^2$ mit $g_{dc} \neq g_{ab}$ und $l \angle g_{dc}, g_{ab} = 30°$ (siehe Abbildung 3). Die vier Geraden schneiden sich trivialerweise in genau vier Punkten, diese seien a,b,c,d und bilden ein Parallelogramm R. Aufgrund der konstanten Breite von S, ist R sogar eine Raute (siehe Abbildung 2). Nach Konstruktion ist $\delta = 120°$.

□

ABC kongruent zu CDE, also auch x = y

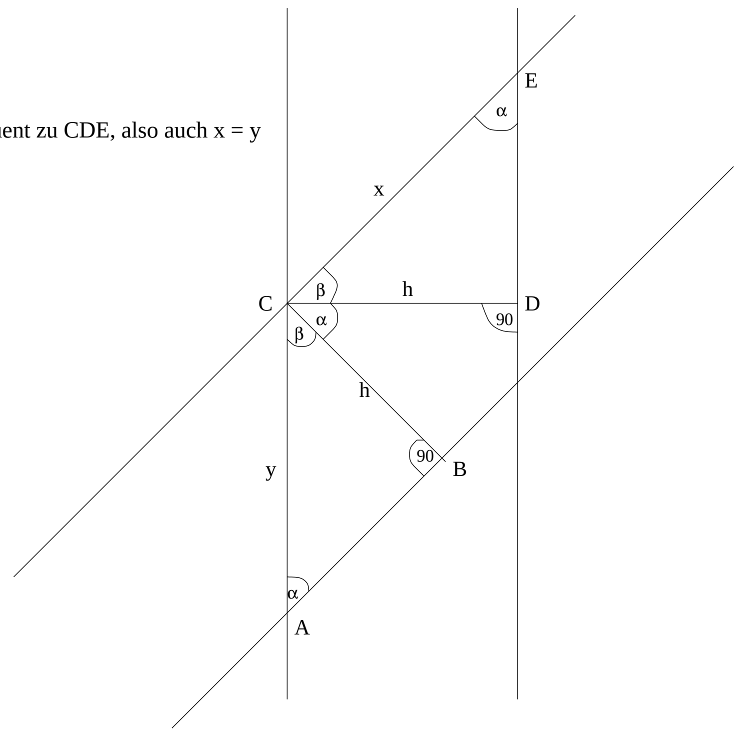

Abbildung 2

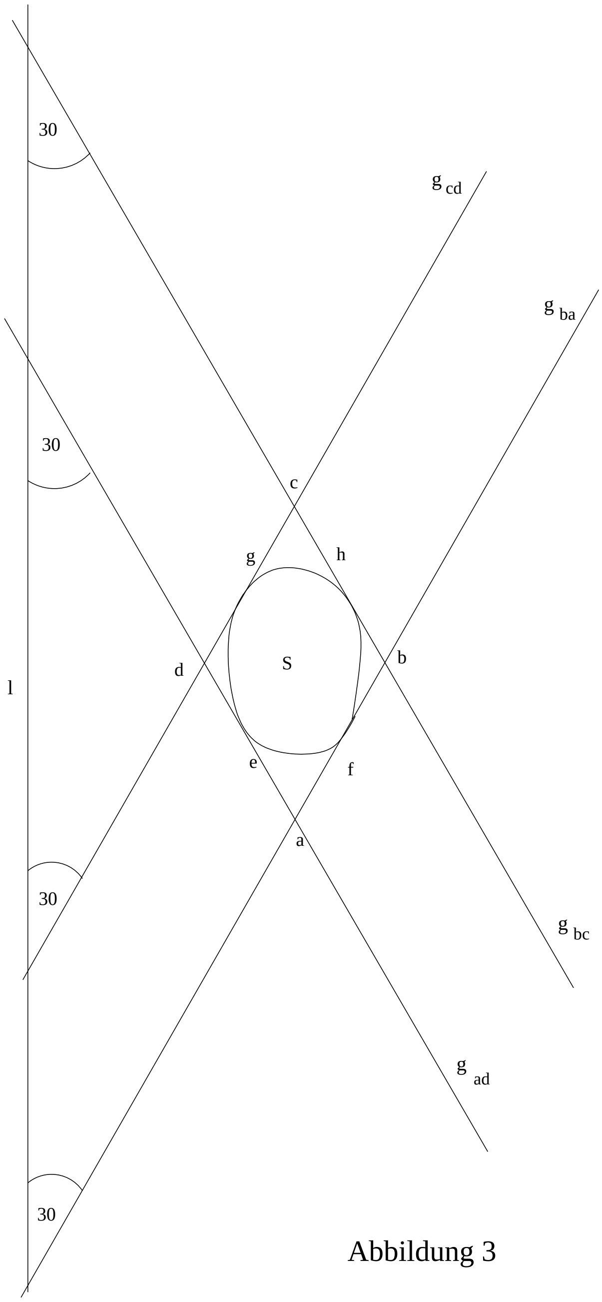

Abbildung 3

1.10 Satz: *Kleinster u.Ü.: Das regelmäßige Sechseck*

Das kleinste regelmäßige Sechseck das im $\mathbb{R}^2$ universell überdeckt hat die Seitenlänge $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Beweis:

Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ konvex,kompakt mit konstanter Breite 1 (siehe Lemma 1.8). Nach Lemma 1.9 existiert eine Raute $R \subset \mathbb{R}^2$ mit den dort erwähnten Eigenschaften. Wir wählen Stützgeraden $l_{ef}, l_{gh} \subset \mathbb{R}^2$ mit $l_{ef}, l_{gh} \perp \overline{ac}$ und $l_{ef} \neq l_{gh}$. Seien e,f,g,h die vier Schnittpunte dieser Geraden mit dem Rand von R. Dann bilden e,f,b,h,g,d ein Sechseck. Dieses ist genau dann regelmäßig, wenn $\|e - f\| = \|g - h\|$.

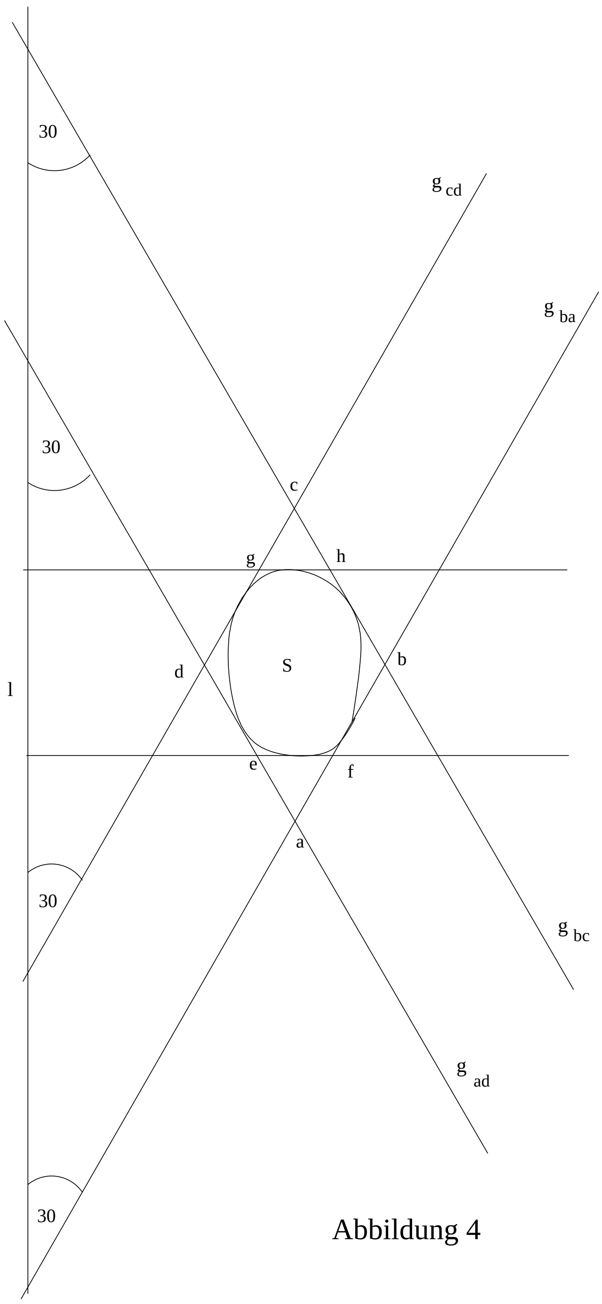

Abbildung 4

Sei nun R' eine weitere nach Lemma 1.9 konstruierte Raute, deren Diagonale $\overline{a'c'}$ die Diagonale $\overline{ac}$ von R im Winkel α schneidet. Entsprechend hängen dann die Eckpunkte von R' von α ab, so dass sich diese als Funktionen in Abhängigkeit des Rotationswinkels α auffassen lassen, also z.B. $e = e(0)$. Sei nun also $m(\alpha) := \|e(\alpha) - f(\alpha)\|$ die Funktion die jedem Rotationswinkel α die zugehörige Seitenlänge der Seite $\overline{e(\alpha)f(\alpha)}$ der Raute $R(\alpha)$ zuordnet. Entsprechend: $n(\alpha) := \|g(\alpha) - h(\alpha)\|$. Nun ist aber eine Raute R' mit den zugehörigen Punkten e',f',g',h' genau dann ein regelmäßiges Sechseck, wenn für den entsprechenden Rotationswinkel $m(\alpha) = n(\alpha)$ gilt (siehe Abbildung 4). Die Funktionen $n(\alpha)$ und $m(\alpha)$ sind stetig, wie anschaulich klar ist, hier aber leider nicht näher erläutert werden kann. Sei nun o.B.d.A. $n(0°) > m(0°)$. Da $R(0°)$ kongruent zu $R(180°)$, gilt $n(0°) = m(180°)$ und $m(0°) = n(180°)$. Also $m(0°) > n(0°)$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $0° < \beta < 180°$ für das gilt: $n(\beta) = m(\beta)$. Somit bildet $R(\beta)$ mit $e(\beta), f(\beta), g(\beta), h(\beta)$ ein regelmäßiges Sechseck, welches S überdeckt. Dass dieses auch das kleinste ist, folgt erneut aus dem Innkreis, welcher den Durchmesser 1 hat.

□

1.11 Satz: ***Kleinster u. Ü.: Das gleichschenklige Dreieck***

Das kleinste gleichseitige Dreieck, welches im $\mathbb{R}^2$ universell überdeckt, hat Seitenlänge $\sqrt{3}$.

Beweis:

Ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $\sqrt{3}$ kann ein gleichseitiges Sechseck mit Seitenlänge $\frac{1}{\sqrt{3}}$ abdecken (siehe Abbildung 5), welches ja wie gesehen ein universeller Überdecker ist. Da der Innkreis eines solchen Dreieckes den Durchmesser 1 hat, ist es also auch das kleinste.

□

Da das Sechseck regelmaessig ist folgt a = b und dann natuerlich fuer die kleinen Dreiecke c = b. Also sind die Seiten des grossen Dreieckes alle 3a lang.

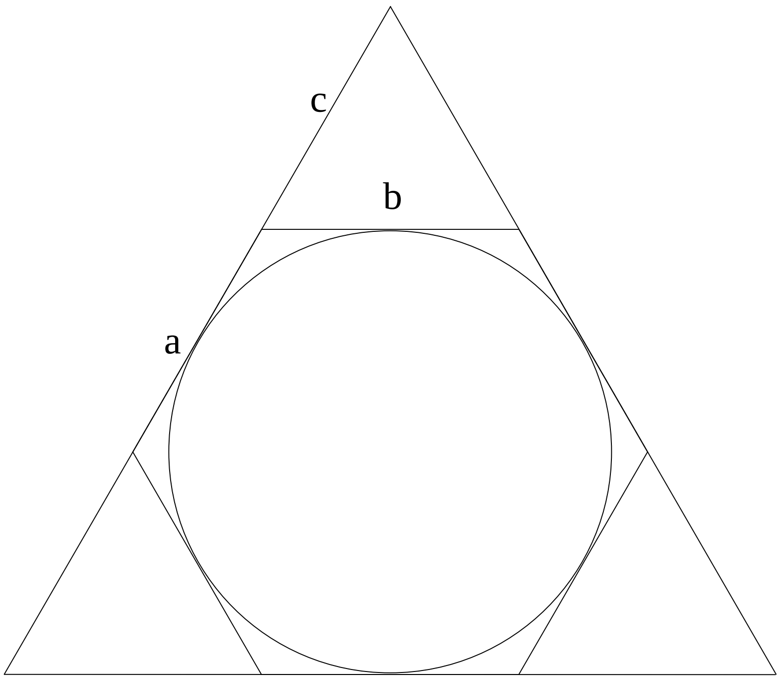

Abbildung 5

2 Das Isoperimetrische Problem:

Problem:

Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller $S \subset \mathbb{R}^2$ mit Umfang eins. Existiert $S \in \mathcal{M}$ mit maximalen Flächeninhalt? Und falls ja, wie ist diese Figur beschaffen? Diese, als *Isoperimetrisches Problem* bekannte Fragestellung, soll in diesem Abschnitt behandelt werden. Bei der Lösung wird hierbei davon ausgegangen, dass es reicht sich auf kompakte, konvexe Mengen zu beschränken, deren Inneres nicht leer ist. Dass diese Zusatzannahme zulässig ist, wird erst bei tiefergehender Betrachtung von kompakt, konvexen Mengen deutlich.

2.1 Lemma:

Sei D $\subset \mathbb{R}^2$ ein Dreieck mit zwei gegebenen Seiten a,b. Der Flächeninhalt von D ist genau dann am größten, wenn a $\perp$ b.

Beweis:

Man wähle a als Grundseite von D. Der Fächeninhalt A_D von D ist genau dann maximal, wenn die Höhe von a, h_a maximale Länge hat $(A_D = \frac{ah}{2})$. Nach Pythagoras gilt: $b^2 - x^2 = h_a^2$, wobei x der Abstand von A zur Senkrechten auf a durch C bezeichnet. Da x = 0 offensichtlich genau dann wenn $b \perp a$, ist dann auch h_a maximal.

$\square$

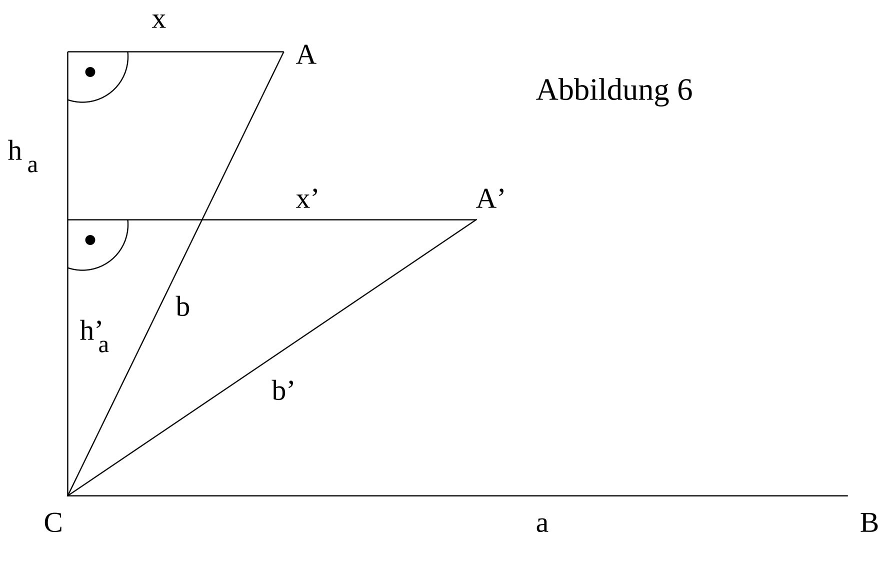

Abbildung 6

2.2 Definition: *Sehne*

Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ konvex, kompakt. Eine *Sehne* von S ist eine Verbindungsstrecke zwischen zwei Randpunkten von S.

2.3 Lemma:

Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ konvex, kompakt. Wenn eine Sehne den Umfang von S halbiert, nicht jedoch den Flächeninhalt, existiert eine Menge S^* mit gleichem Umfang aber größerem Flächeninhalt.

Beweis:

Sei $\overline{xy}$ eine Sehne von S, welche den Umfang halbiert, jedoch nicht den Flächeninhalt. Seien S_1, S_2 die hierbei entstehenden Teilmengen von S und S_1 habe o.B.d.A. größeren Flächeninhalt als S_2. Sei S_1^* das an $\overline{xy}$ gespiegelte Bild von S_1. Dann hat $S_1 \cup S_1^*$ den gleichen Umfang wie S, aber größeren Flächeninhalt.

$\square$

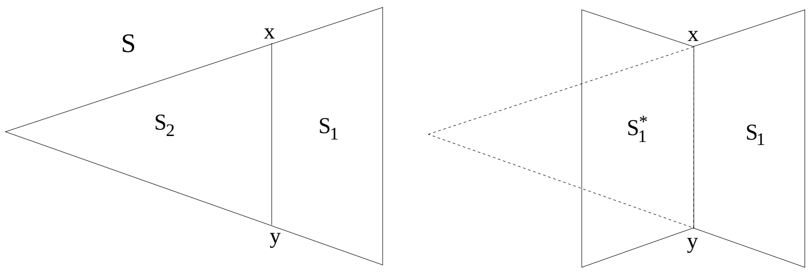

Abbildung 7

2.4 Satz: *Maximalität des Kreises*

Sei $S \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und konvex mit int $S \neq \emptyset$. Wenn S kein Kreis ist, existiert eine Menge $S^* \subset \mathbb{R}^2$ mit gleichem Umfang, aber größerem Flächeninhalt.

Beweis:

Seien x und y Randpunkte von S, die den Umfang halbieren. Falls $\overline{xy}$ den Flächeninhalt nicht halbiert, dann ist nach Lemma 2.3 alles gezeigt. Seien also S_1, $S_2 \subset \mathbb{R}^2$ mit $S_1 \cap S_2 = \overline{xy}$ und $S_1 \cup S_2 = S$. Da S kein Kreis ist, existiert ein Randpunkt p von S, so dass $\angle$ xpy $\neq 90°$ (folgt nach Satz von Thales). Sei o.B.d.A. $p \in S_1$. Dann teilen $\overline{xp}$ und $\overline{py}$ S_1 in drei Teile, das Dreieck xpy sowie A_1 und A_2 (siehe Abbildung 5). Sei nun S_1^* die Figur, die entsteht, wenn man das dreieck xpy ersetzt durch $x'p'y'$, mit $\angle x'p'y' = 90°$. Nach Lemma 2.1 hat $x'p'y'$ größeren Flächeninhalt als xpy und somit ist auch S_1^* vom Flächeninhalt größer als S_1. Schließlich hat noch die Vereinigung aus

S_1^* und dem Spiegelbild von S_1^* an $\overline{x'y'}$ größeren Flächeninhalt als S.

□

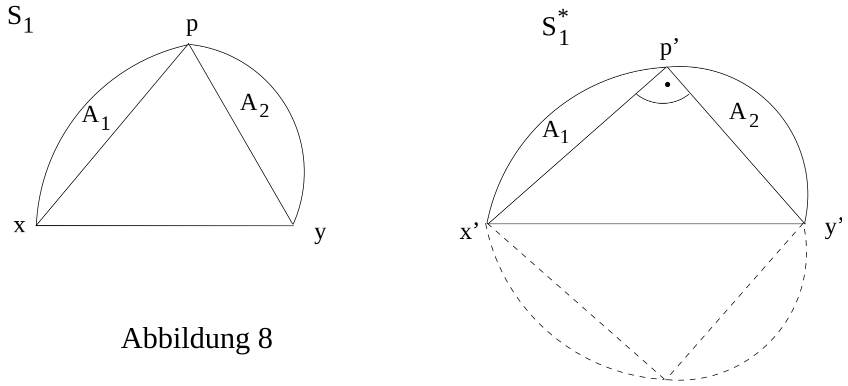

Abbildung 8

2.5 Bemerkung:

Der vorangehende Satz, löst das isoperimetrische Problem unter der Vorraussetzung, dass es eine Lösung gibt, also dass es eine Figur mit Umfang eins gibt die den größten Flächeninhalt hat. Dann nämlich folgt aus dem Satz, es müsse sich hierbei um den Kreis mit Umfang eins handeln. Die Existenz eines Maximums wird nicht an dieser Stelle geklärt, trotzdem werden wir sie für den nächsten Satz als wahr annehmen.

2.6 Satz: *Maximalität des Halbkreises*

Von allen Figuren $S \subset \mathbb{R}^2$ die durch eine Gerade und eine Kurve von fester Länge l gebildet werden können, hat der Halbkreis K mit Radius $\frac{l}{\pi}$ den größten Flächeninhalt.

Beweis:

Sei S eine beliebige Menge, die wie im Satz konstruiert sei. Sei S' die Vereinigung von S und dem Spiegelbild von S an der Konstruktionsgeraden. Sei weiter K' der durch K induzierte Vollkreis. Dann haben S' und K' den gleichen Umfang. Nach Satz 2.4 hat dann aber K' mindestens ebenso großen Flächeninhalt wie S', und somit gilt das gleiche für K und S.

□

3 Quellen/Literatur

[1] Stephen R. Lay, Convex Sets and Their Applications. Wiley and Sons, New York 1982, S.84 - 92.